

Diskrete Strukturen Abschlussklausur

Name:

Matrikelnummer:

Bitte beachten Sie die auf der Rückseite dieses Blattes angegebenen Regeln und Hinweise. Mit Ihrer Unterschrift bestätigen Sie deren Kenntnisnahme.

Unterschrift:

Für die Aufgaben 1 bis 6 sind keine Begründungen nötig. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte. Unter den Aufgaben sowie auf den Rückseiten befindet sich Raum für Notizen, welche nicht bewertet werden.

Bei den Aufgaben 7 bis 9 sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite und den Folgeseiten fort. Das Vorhandensein einer Folgeseite bedeutet nicht zwingend, dass eine solche erforderlich ist. Am Ende des Klausurbogens befinden sich weitere Blankoseiten.

Aufgabe	max. Punktzahl	erreichte Punktzahl	Prozent
1	8		—
2	6		—
3	6		—
4	6		—
5	9		—
6	5		—
7	6		—
8	8		—
9	6		—
Σ	60		
Bonus	280		
Gesamt	—	—	
Note	—	—	

Hinweise zur Durchführung der Klausur.

- Sofern Sie bisher noch an keiner Abschlussprüfung in diesem Modul teilgenommen haben, müssen Sie zur Teilnahme an dieser Klausur vorab eine Zulassung erworben haben. Ferner müssen Sie sich je nach Studiengang gegebenenfalls bei dem für Sie zuständigen Prüfungsamt zu dieser Klausur angemeldet haben. Ihre Teilnahme an dieser Klausur erfolgt vorbehaltlich einer gültigen Zulassung und Anmeldung.
- Tragen Sie bitte auf jedes bearbeitete Blatt Ihren Namen in Blockbuchstaben sowie Ihre Matrikelnummer ein. Blätter ohne Namen können *nicht* korrigiert werden.
- Die Klausur besteht aus 9 Aufgaben auf 11 durchnummerierten Blättern und einem unnummerierten Deckblatt. Bitte prüfen Sie die Vollständigkeit Ihres Exemplars.
- Bitte halten Sie Ihre RWTH BlueCard zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Mobilfunkgeräte vor Beginn der Klausur aus und verstauen Sie diese in Ihren Taschen.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 120 Minuten.
- Es darf nur mit einem blauen oder schwarzen Stift geschrieben werden (auf keinen Fall mit rot, grün oder Bleistift). Es darf kein Tipp-Ex benutzt werden. Für Markierungen in Aufgabe 6 darf ein zweiter farbiger Stift (nicht rot oder grün) benutzt werden; diese Markierungen zählen als Notizen und werden nicht bewertet.
- Zur Bearbeitung sind ansonsten keine Hilfsmittel wie Skripte, Bücher, Notizen, Taschenrechner, etc. erlaubt.
- Die Heftklammern der Klausur dürfen nicht gelöst werden.
- Täuschungsversuche führen zum Nichtbestehen der Klausur.
- Sollte der unterhalb eines Aufgabentextes zur Verfügung stehende Platz (inklusive Rückseiten) nicht zur Bearbeitung ausreichen, verwenden Sie bitte die Blankoseiten am Ende der Klausur. Machen Sie in diesem Fall bitte einen Vermerk über die Fortsetzung der Aufgabe. Sollte das zur Verfügung gestellte Papier danach nicht ausreichen, melden Sie sich bitte per Handzeichen. Es darf kein eigenes Papier verwendet werden.
- Bei manchen Rechenaufgaben bietet es sich an, eine Probe zu machen.
- Wenn Sie während der Bearbeitungszeit auf Toilette müssen, kommen Sie bitte mit Ihrer Klausur und Ihrer RWTH BlueCard zu den Aufsichtspersonen. Es darf stets nur eine Person gleichzeitig die Toilette aufsuchen.
- Bitte reden Sie während der Klausur nicht laut. Bei Unklarheiten geben Sie bitte Handzeichen, eine Aufsichtsperson kommt dann an Ihren Platz.
- Sie dürfen die Bearbeitung Ihrer Klausur vor Ablauf der Bearbeitungszeit beenden und den Hörsaal vorzeitig verlassen – mit folgenden Einschränkungen: Bleiben Sie bitte zum einen mindestens 15 Minuten. Zum anderen sollten Sie 15 Minuten vor Ablauf der Bearbeitungszeit bitte bis zum Ende bleiben, um Unruhe zu vermeiden.
- Bitte entsorgen Sie nach der Klausur den eigenen Müll.

Bearbeiten Sie die folgenden sechs Aufgaben und schreiben Sie Ihre Ergebnisse in die dafür vorgesehenen Kästchen. Sie müssen Ihre Entscheidungen nicht begründen. Für Begründungen und Ansätze gibt es keine Punkte.

1	<p>Es seien $\pi, \rho, \sigma \in S_9$ gegeben durch</p> $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 1 & 9 & 7 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \rho = (1, 9)(2, 7, 3, 5)(6, 8), \sigma = (1, 5, 2, 6)(3, 8, 7).$ <p>Ferner sei $\xi \in S_9$ mit $\sigma \circ \xi = \rho$ gegeben. Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Verwenden Sie zur Angabe von Permutationen stets die Zykelschreibweise. <i>(8 Punkte)</i></p>			
$\pi =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\sigma^{-1} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	
$\xi =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\rho^8 \circ \sigma^4 =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	
$\min \{k \in \mathbb{N} \mid \sigma^k = \text{id}_{[1,9]}\} =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$ [1, 9]/\sigma =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	
$\text{sgn } \sigma =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	$\text{sgn}(\pi \circ \rho \circ \pi) =$	<input style="width: 95%;" type="text"/>	

Punkte: /8

(Raum für Notizen)

2	<p>Es sei ein RSA-Kryptosystem mit öffentlichem Schlüssel $K_{\text{publ}} = (n, a) = (51, 3)$ und privatem Schlüssel $K_{\text{priv}} = b$ gegeben. Ferner sei y_1 der Geheimtext zum Klartext $x_1 = 3$ und es sei x_2 der Klartext zum Geheimtext $y_2 = 2$. Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. <i>(6 Punkte)</i></p>			
	$\varphi(n) =$		$K_{\text{priv}} =$	
	$y_1 =$		$x_2 =$	

Punkte: /6

(Raum für Notizen)

3	<p>Es seien $A, B \in \mathbb{Q}^{3 \times 2}$, $C \in \mathbb{Q}^{2 \times 3}$, $D \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ gegeben durch</p> $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & -3 & 9 \\ -3 & -5 & 15 \end{pmatrix}.$ <p>Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke, sofern sie existieren; andernfalls schreiben Sie „ex. nicht“ ins Antwortfeld. <i>(6 Punkte)</i></p>		
$DB =$		$C^{\text{tr}}A =$	
$A^{-1} =$		$(CB)^{-1} =$	
$A - C^{\text{tr}} =$		$D^2 + 3B^{\text{tr}}A =$	

Punkte: /6

(Raum für Notizen)

4	<p>Es seien $A \in \mathbb{F}_3^{4 \times 3}$, $b, c \in \mathbb{F}_3^{4 \times 1}$ gegeben durch</p> $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$ <p>Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Verwenden Sie zur Angabe von Restklassen entweder stets die Standardtransversale oder stets die Transversale $\{-1, 0, 1\}$. <i>(6 Punkte)</i></p>	
	<p>$\text{Sol}(A, b) =$</p> <div style="border: 1px solid black; height: 80px; width: 100%;"></div>	<p>$\text{Sol}(A, c) =$</p> <div style="border: 1px solid black; height: 80px; width: 100%;"></div>
	<p>$\text{Sol}(A, 0) =$</p> <div style="border: 1px solid black; height: 80px; width: 100%;"></div>	

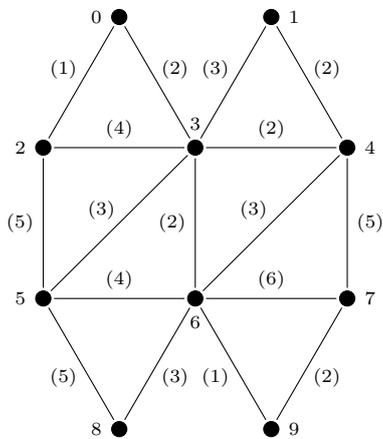
Punkte: /6

(Raum für Notizen)

5	Bestimmen Sie die folgenden Ausdrücke. Die folgende Tabelle könnte Ihnen dabei behilflich sein.							
	k	0	1	2	3	4	5	6
	$\binom{6}{k}$	1	6	15	20	15	6	1
	$\left\{ \begin{matrix} 6 \\ k \end{matrix} \right\}$	0	1	31	90	65	15	1
	$\left[\begin{matrix} 6 \\ k \end{matrix} \right]$	0	120	274	225	85	15	1
	$\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\} =$				$ \{\mathcal{P} \mid \mathcal{P} \text{ ist eine Partition von } \mathbb{Z}/6\} =$			
	Wir würfeln gleichzeitig mit fünf gewöhnlichen, gleich aussehenden Würfeln. Wieviele Würfe enthalten genau eine 4 und (mindestens) eine 2?							
	Eine Softwarefirma hat elf (verschiedene) Apps im Verkauf, darunter vier Bestseller. Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein Bundle aus vier Apps zusammenzustellen, wenn dieses Bundle mindestens ein und höchstens zwei Bestseller enthalten soll?							
								Punkte: /9

(Raum für Notizen)

6 Es sei G der folgende schlichte gewichtete Graph.

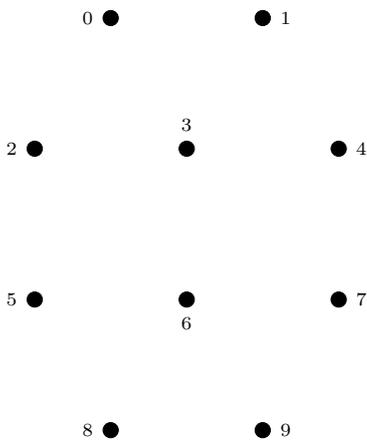


(5 Punkte)

Gibt es einen offenen Eulerzug oder eine Eulertour in G ?

- offener Eulerzug
 Eulertour
 weder noch

Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum von G und zeichnen Sie die Kanten in folgender Skizze ein.



Punkte: /5

(Raum für Notizen)

Bei den folgenden drei Aufgaben sind sämtliche Schritte ausreichend zu begründen. Beginnen Sie die Bearbeitung unterhalb des Aufgabentexts und setzen Sie diese bei Bedarf auf der Rückseite fort.

- 7 (a) Zeigen Sie, dass die aussagenlogische Formel $A \Leftrightarrow B$ die aussagenlogische Formel $A \Rightarrow B$ semantisch impliziert.
- (b) Bestimmen Sie eine aussagenlogische Formel in disjunktiver Normalform, welche zur aussagenlogischen Formel
- $$A \vee B \Rightarrow C$$
- logisch äquivalent ist. (6 Punkte)

Punkte: /6

8	<p>Es seien $f, g \in \mathbb{F}_5[X]$ gegeben durch</p> $f = X^2 - 2, g = X + 1.$ <p>(a) Geben Sie die Standardtransversale von $\mathbb{F}_5[X]/f$ an.</p> <p>(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{F}_5[X]/f$ ein Körper ist.</p> <p>(c) Zeigen Sie, dass $\gcd(f, g) = 1$ ist und bestimmen Sie $h, k \in \mathbb{F}_5[X]$ mit $1 = hf + kg$.</p> <p>(d) Bestimmen Sie den Standardrepräsentanten von $[g]^{-1}$ in $\mathbb{F}_5[X]/f$. (8 Punkte)</p>
---	--

Punkte: /8

9	<p>Es sei eine Gruppe G gegeben und für $g \in G$ sei</p> $\lambda_g: G \rightarrow G, x \mapsto gx.$ <p>Zeigen oder widerlegen Sie:</p> <p>(a) Für alle $g \in G$ ist λ_g ein Gruppenhomomorphismus.</p> <p>(b) Für alle $g \in G$ ist λ_g eine Bijektion. (6 Punkte)</p>
---	---

Punkte: /6

Matrikelnr.: _____ Name: _____

Blatt 10

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)

Matrikelnr.: _____ Name: _____

Blatt 11

(Zusätzlicher Raum für Aufgaben, sofern benötigt. Bitte geben Sie die Aufgabennummer an.)