Diskrete Strukturen Lösungen

Anonymous

22. Februar 2014

Aufgabe 1

Handelt es sich um eine mathematische Aussage?

- Es ist neblig.

  Solution: Nein

- Alle eingeschriebenen Studenten erschienen zur ersten Vorlesung.

  Solution: Ja

Aufgabe 2

Handelt es sich um eine Verneinung von *Das Glas ist voll*?

- Das Glas ist nicht voll.

  Solution: Ja

- Das Glas ist leer.

  Solution: Nein

- Es gilt nicht, dass das Glas leer ist.

  Solution: Nein

- Es gilt nicht, dass das Glas nicht voll ist.

  Solution: Nein

- Es gilt nicht, dass das Glas voll ist.

  Solution: Ja

- Es gilt nicht, dass das Glas nicht leer ist.

  Solution: Nein

Aufgabe 3

Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstabelle. Einzugeben ist für jede Zeile der Tabelle eine Zeichenkette aus f's und w's ohne Leerzeichen (z.B. fwf).

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \rightarrow B$	$B \rightarrow A$	$(A \vee \neg A) \rightarrow B$	$B \rightarrow (A \vee \neg A)$
w	w	f		f	w	w		
w	f	f	w	w	f		f	w
f	w	w	f		w		w	w
f	f	w	w	f		w	f	

- 1. Zeile

  Solution: fww

- 3. Zeile

  Solution: ff

- 2. Zeile

  Solution: w

- 4. Zeile

  Solution: ww

Aufgabe 4

Hängt der Wahrheitswert der folgenden Aussageformen von der Belegung der Variablen ab?

- *Das Glas x ist voll* $\vee$ *Das Glas x ist leer*

  Solution: Ja

- *Das Glas x ist voll* $\vee$ *Das Glas x ist nicht voll*

  Solution: Nein

Aufgabe 5

Handelt es sich bei den folgenden logischen Formeln um Tautologien? (w steht für wahr)

- $(\mathrm{f} \vee A) \Leftrightarrow \neg A$

  Solution: Nein

- $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

  Solution: Ja

- $(\mathrm{f}xorA) \Leftrightarrow A$

Solution: Ja

- $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

Solution: Ja

Aufgabe 6

Sind die Mengen gleich?

- $\{1, 2, 2, 1\}$ und $\{2 \cdot 1, 2 \cdot 2\}$

Solution: Nein

- $\{1, 2, 3, 4\}$ und $\{4, 4, 3, 2, 4, 2, 1\}$

Solution: Ja

- {Teller, Tasse, Glas, Tee} und {Teetasse, Teller, Glas}

Solution: Nein

- $\mathbb{N}$ und $\{z \in \mathbb{Z}\}z > 0$

Solution: Ja

- $\{\frac{a}{b}\}a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

Solution: Nein

- $\{\frac{a}{b}\}a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und $\{\frac{a}{b}\}a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

Solution: Ja

Aufgabe 7

Ist die Aussage eine Verneinung von *Jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*?

- *Keine reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Jede reelle Zahl ist nicht das Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Nicht jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.*

Solution: Ja

- *Es gibt eine reelle Zahl, die nicht das Quadrat einer reellen Zahl ist.*

Solution: Ja

- *Jede reelle Zahl ist das Quadrat einer nicht-reellen Zahl.*

Solution: Nein

- *Es gibt eine reelle Zahl, die das Quadrat einer reellen Zahl ist.*

Solution: Nein

Aufgabe 8

Ist die Aussage eine Verneinung von *Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*?

- *Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Ja

- *Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Ja

- *Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Nein

- *Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.*

Solution: Nein

Aufgabe 9

Wie lautet die Mächtigkeit der folgenden Mengen? Einzugeben ist eine natürliche Zahl oder 0.

- $\{0,1\} \times \underline{3}$

Solution: 6

- $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Q}$

Solution: 0

- $(\emptyset)$

Solution: 1

- $\{0,1\}^3$

Solution: 8

- $\{n \in \mathbb{N}\} n < 1000$

Solution: 999

- $(\{0,1\})$

Solution: 4

- $\{n \in \mathbb{N}\}n \leq 1000$

Solution: 1000

- $(\{0\})$

Solution: 2

Aufgabe 10

Wie lautet der Wahrheitswert der folgenden Aussagen? Kreuzen Sie das Fragezeichen an, wenn der Wahrheitswert von der Aussageform $A(x)$ anhängt.

- Es gibt ein $x \in \emptyset$ mit $A(x)$.

Solution: f

- Für alle $x \in \emptyset$ gilt $A(x)$.

Solution: w

Aufgabe 1

Es sei M eine Menge mit m Elementen und es sei $n \in \mathbb{N}$. Kreuzen Sie die richtige Antwort an.

- Die Anzahl der Elemente von M^n beträgt
  A.m^n **B.**n^m **C.**$n \cdot m$ **D.**$n + m$

Solution: A

- Gilt $M^n = M \times \underline{n}$?

Solution: Nein

Aufgabe 2

Gelten die folgenden Aussagen?

- $\{n \in \mathbb{N}\}n$ gerade, $\{n \in \mathbb{N}\}n$ ungerade ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

- $\{1\}, \{2,3,4\}, \{5\}$ ist eine Partition von $\underline{5}$.

Solution: Ja

- Für je zwei beliebige Mengen A, B gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Solution: Nein

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{<0}$ ist eine Partition von $\mathbb{Q}$.

Solution: Nein

- Jeder Ring ist eine Gruppe bezüglich der Addition des Rings.

Solution: Ja

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Q}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}$.

Solution: Nein

- Jeder kommutative Ring ist nullteilerfrei.

Solution: Nein

- $\{n \in \mathbb{N}\}n$ gerade, $\{n \in \mathbb{N}\}n$ ungerade, $\{-n\}n \in \mathbb{N}, n$ gerade, $\{-n\}n \in \mathbb{N}, n$ ungerade ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

Aufgabe 3

Geben Sie die korrekte Anzahl ein.

- Wieviele verschiedene 2-elementige Teilmengen besitzt $\{a, b, c, d\}$?

Solution: 6

- Wieviele verschiedene Partitionen besitzt $\{a, b, c\}$? Beachten Sie, dass die Teile einer Partition nicht leer sein dürfen (vgl. Skript).

Solution: 5

Aufgabe 4

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Beschreibt folgendes Pfeildiagram eine Abbildung?

$$\bullet @|->[r] \bullet \ \bullet @|->[r] @|->[ru] \bullet$$

Solution: Nein

- Wieviele Abbildungen von $\emptyset$ nach $\emptyset$ gibt es?

Solution: 1

- Eine Abbildung ordnet jedem Element des Definitionsbereiches ... ein Element des Zielbereiches zu.

Solution: genau

- Sind die Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto (x-1)(x+1)$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2 - 1$ gleich?

Solution: Ja

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

  $$f : \ldots \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto |-x|$$

  A.$\mathbb{R}_{\geq 0}$ **B.**$\mathbb{N}$ **C.**$\mathbb{N}_0$ **D.**$\mathbb{Z}$

Solution: B

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

  $$f : \mathbb{N} \to \ldots, \quad n \mapsto 2n$$

  A.$\mathbb{R}$ **B.**$\mathbb{N}$ **C.**$\mathbb{N}_0$ **D.**$\mathbb{Z}$

Solution: A,B,C,D

- Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Abbildungen von

Solution: N nach M

- Lässt sich jedes Tupel (über einer beliebigen Menge) als eine Abbildung auffassen?

Solution: Ja

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

  $$f : \ldots \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |\sqrt{x}|$$

  A.$\mathbb{R}_{\geq 0}$ **B.**$\mathbb{R}$ **C.**$\mathbb{N}$ **D.**$\mathbb{Z}$

Solution: A,C

- Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

  $$f : \mathbb{N} \to \ldots, \quad n \mapsto \frac{1}{2}n$$

  A.$\mathbb{R}$ **B.**$\mathbb{N}$ **C.**$\mathbb{N}_0$ **D.**$\mathbb{Z}$

Solution: A

- Lässt sich jede Folge (in einer beliebigen Menge) als eine Abbildung auffassen?

Solution: Ja

Aufgabe 5

Beantworten Sie die Fragen.

- Sei $f : N \to M$ eine Abbildung. Die Menge $\{f(x)\}x \in N$ heisst ... von f.

Solution: Bild

- Die Fasern einer Abbildung $f : N \to M$ sind Teilmengen von ...

Solution: N

- Das Bild einer Abbildung $f : N \to M$ ist eine Teilmenge von ...

Solution: M

- Können Fasern leer sein?

Solution: Ja

- Welche Ungleichungen gelten für alle Abbildungen $f : N \to M$? (alle ankreuzen!) **A.**$|f(N)| \leq |N|$ **B.**$|f(N)| \geq |N|$ **C.**$|f(N)| \leq |M|$ **D.**$|f(N)| \geq |M|$

Solution: A,C

Aufgabe 6

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

- Ist jede Abbildung entweder injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

  $$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

Solution:

- Gibt es Abbildungen die injektiv und surjektiv sind?

Solution: Ja

- Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: mindestens

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv

- Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches … ein Urbild hat.

Solution: höchstens

- Gibt es Abbildungen die weder injektiv noch surjektiv sind?

Solution: Ja

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: surjektiv

- Ist jede Abbildung injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv,surjektiv

Aufgabe 7

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit … gekennzeichnete Lücke.

- Gilt $f \circ g = \mathrm{id}$, so heisst g eine …-seitige Umkehrabbildung von f.

Solution: rechts

- Wenn f surjektiv ist, so existiert stets eine …-seitige Umkehrabbildung.

Solution: rechts

- Hat jede Abbildung eine links- oder rechtsseitige Umkehrabbildung?

Solution: Nein

- Gilt $g \circ f = \mathrm{id}$, so heisst g eine ...-seitige Umkehrabbildung von f.

Solution: links

- Wenn f injektiv ist, so existiert stets eine ...-seitige Umkehrabbildung.

Solution: links

Aufgabe 8

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- Wenn f eine links-seitige und eine rechts-seitige Umkehrabbildung besitzt, besitzt f dann auch eine beidseitige Umkehrabbildung?

Solution: JA

- Wenn eine Abbildung eine ...-seitige Umkehrabbildung besitzt, so ist diese eindeutig.

Solution: beid

- Sollte decrypt eine links- oder rechts-seitige Umkehrabbildung von crypt sein?

Solution: links

- Wenn f und g bijektive Abbildungen sind und $g \circ f$ definiert ist, gilt dann $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$?

Solution: NEIN

- Jede Abbildung lässt sich durch Einschrdes Definitionsbereiches ... machen.

Solution: injektiv

- Falle surjektiven Abbildungen $f : N \to M$ gilt .... $|f(N)| \leq |N||f(N)| \geq |N||f(N)| \leq |M||f(N)| \geq |M|$

Solution: A,C,D

- Jede Abbildung lässt sich durch Einschrdes Zielbereiches ... machen.

Solution: surjektiv

- f surjektiv ... $|N| \geq |M| \iff$

Solution: B

- f injektiv … $|N| \leq |M| \Longleftrightarrow$

Solution: B

- Falle injektiven Abbildungen $f : N \to M$ gilt …. $|f(N)| \leq |N||f(N)| \geq |N||f(N)| \leq |M||f(N)| \geq |M|$

Solution: A,B,C

Aufgabe 1

Es seien f, g, h Abbildungen. Ja oder Nein?

- Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Solution: Nein

- Zu zwei beliebigen Abbildungen f und g existiert stets eine der Kompositionen $f \circ g$ oder $g \circ f$.

Solution: Nein

- Es gilt stets $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Solution: Ja

Aufgabe 2

Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit … gekennzeichnete Lücke.

- Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches … ein Urbild hat.

Solution: mindestens

- Ist jede Abbildung entweder injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

Solution:

- Gibt es Abbildungen die injektiv und surjektiv sind?

Solution: Ja

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: surjektiv

- Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: höchstens

- Gibt es Abbildungen die weder injektiv noch surjektiv sind?

Solution: Ja

- Ist jede Abbildung injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv

- Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv,surjektiv

Aufgabe 3

Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Relation R auf N erfüllt. Es steht (R) für reflexiv, (S) für symmetrisch, (A) für antisymmetrisch, (T) für transitiv.

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

Solution: A,T

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

Solution: S,T

- $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}$.

  Solution: A,R

- Jede Äquivalenzrelation R auf N.

  Solution: R,S,T

- Jede partielle Ordnung R auf N.

  Solution: A,R,T

Aufgabe 1

Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation | auf $\mathbb{Z}$. Kreuzen Sie alle maximalen Elemente der Menge an.

- $\{2, 3, 4, 6, 12\}$

  Solution: 12

- $\{2, 3, 4, 6\}$

  Solution: 4,6

- $\{2, 3, 5\}$

  Solution: 2,3,5

- $\{2, 3, 5\}$

  Solution: 2,3,5

- $\{2, 4, 6\}$

  Solution: 4,6

Aufgabe 2

Ist R eine Äquivalenzrelation auf N? Falls ja geben Sie die Anzahl der ein, falls nein schreiben Sie -.

- $N = \{x, y, z\}$ und $R = \{(x, x), (x, y), (y, y), (y, x), (z, z)\}$.

  Solution: 2

- $N = \{x, y, z\}$ und
  $R = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (y, x), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\}$.

  Solution: 1

- $N = \{x, y, z\}$ und $R = \{(x, y), (x, z), (y, x), (y, z), (z, x), (z, y)\}$.

  Solution: -

Aufgabe 3

Seien π, ψ beliebige Elemente aus S_n. Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- Es sei $k \in \mathbb{N}$. Welche Abbildungen sind definiert und liegen in S_n? $\pi^{-1}\pi^k\pi^{-k}\pi^0\psi \circ \pi\pi \circ \psi$

Solution: A,B,C,D,E,F

- $(()\pi \circ \psi) = (()\pi) \ldots (()\psi)$ $+\cdot-$

Solution: B

- Gilt $\sigma^{-l} = \sigma^{k-l}$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$ und alle $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq k-1$?

Solution: JA

- π lsich eindeutig (bis auf Reihenfolge und bis auf Erwähnung von 1-Zykeln) als Produkt von … schreiben. Zykelndisjunkten Zykeln-Transpositionen

Solution: B

- Falls π ein k-Zykel ist und k gerade, so ist $(()\pi) = \ldots$.

Solution: -1

- $(()\pi) \in \ldots$ $\{0,1\}$<u>21</u>

Solution:

- π lsich als Produkt von … schreiben. Zykelndisjunkten Zykeln-Transpositionen

Solution: A,B,C

- Gilt $\sigma^{-k} =$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$?

Solution: JA

- Welche Aussagen gelten allgemein? π ist injektivπ ist surjektiv$\pi \circ \psi = \psi \circ \pi$ $T_\pi \subseteq S_n$

Solution: A,B

- An $(()\pi)$ lsich die Anzahl der … von π erkennen. Inversionen-Transpositionendisjunkten Zykel

Solution:

- Falls π ein k-Zykel ist und k ungerade, so ist $(()\pi) = \ldots$.

Solution: 1

Aufgabe 1

Sind die folgenden Elemente paarweise verschieden?

- 1,2,4,1

Solution: Nein

Aufgabe 2

Handelt es sich um eine Permutation oder ein Tupel? Falls beide Auffassungen möglich sind, sind zwei Kreuze zu machen.

- $(0, 0, 7)$

Solution: Tupel

- $(1, 2, \frac{1}{2})$

Solution: Permutation,Tupel

Aufgabe 3

Wieviele verschiedene k-Permutationen lassen sich durch Anordnung aus der angegebenen k-Kombination gewinnen?

- $\{0\}$

Solution: 1

- $\{2, 4, 5\}$

Solution: 6

Aufgabe 4

Schreiben Sie die angegebene Teilmenge von $\underline{5}$ als ein Tupel über $\{0, 1\}$ wie in Beispiel III(1.3a). Geben Sie das Tupel als Zeichenfolge von Nullen und Einsen ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein (z.B. 011 . . .).

- $\underline{5}$

Solution: 11111

- $\{\}$

Solution: 00000

- $\{2, 4, 5\}$

Solution: 01011

Aufgabe 5

Geben sie zu folgenden k-Kombinationen, k-Tupeln, k-Multimengen, bzw. k-Permutationen das k an!

- $(\cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(0), \cos(-\pi), \cos(0), \cos(0))$

Solution: 5

- $(1, 2, 4, 5, 6)$

Solution: 5

- $\{1, 3, 4, 2, 1\}$

Solution: 4

- $999, 432, 975, 875, 975, 432, 924, 37$

Solution: 8

Aufgabe 6

Sind die angegebenen Objekte gleich?

- Die k-Kombinationen $\{1, 2, 4\}$ und $\{4, 2, 1\}$.

Solution: Ja

- Die k-Permutationen $(1, 2, 4)$ und $(4, 2, \sin\frac{\pi}{2})$.

Solution: Nein

- Die k-Tupel $(1, 2, 3, 4, 4, 4, 1, 5)$ und $(1, 2, 4, 3, 4, 1, 4, 5)$.

Solution: Nein

- Die k-Multimengen $1, 3, 4, 2, 1$ und $3, 2, 4, 1$.

Solution: Nein

Aufgabe 7

Ein Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig ergibt

$$3 Augen$$

,

$$3 Augen$$

,

$$2 Augen$$

,

$$6 Augen$$

,

$$3 Augen$$

. Wir fassen diesen Wurf wie in Beispiel III(1.3) als eine k-Multimenge M auf und schreiben diese anschliessend als ein l-Tupel T.

- M ist eine k-Multimenge über **A.**$\underline{5}$ **B.**$\underline{6}$ **C.**$\mathbb{N}$ **D.**$\mathbb{N}_0$

Solution: B

- Wie lautet k?

Solution: 5

- Wie lautet l?

Solution: 6

- T ist ein k-Tupel über $\underline{5}\underline{6}\mathbb{N}\mathbb{N}_0\{$

  $$1 Augen$$

  ,

  $$2 Augen$$

  ,

  $$3 Augen$$

  ,

  $$4 Augen$$

  ,

  $$5 Augen$$

  ,

  $$6 Augen$$

  $\}$

Solution: D

- Wir kodieren das Tupel T als ein Wort über $\{0, 1\}$ wie im Beweis von Satz III(1.3). Geben Sie das Wort ein.

Solution: 0101110001

- Wie lautet das Tupel T? Geben Sie das Tupel als Zeichenkette ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein.

  Solution: 013001

Aufgabe 8

Berechne die folgenden Anzahlen

- Die Anzahl der 4-Permutationen aus $\underline{6}$

  Solution: 360
- Die Anzahl der 5-Tupel aus $\underline{5}$

  Solution: 3125
- Die Anzahl der 5-Kombinationen aus $\underline{5}$

  Solution: 1
- Die Anzahl der 4-Multimengen aus $\underline{6}$

  Solution: 126
- Die Anzahl der 4-Tupel aus $\underline{6}$

  Solution: 1296
- Die Anzahl der 3-Multimengen aus $\underline{7}$

  Solution: 84
- Die Anzahl der 3-Kombinationen aus $\underline{7}$

  Solution: 35
- Die Anzahl der 3-Permutationen aus $\underline{7}$

  Solution: 210
- Die Anzahl der 3-Tupel aus $\underline{7}$

  Solution: 343

Aufgabe 9

Gelten die folgenden Gleichungen für alle n und k? Es wird angenommen, dass n und k in einem Bereich liegen, dass alle auftretenden Binomialkoeffizienten definiert sind (also von der Form $\binom{a}{b}$ mit $0 \leq b \leq a$).

- $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$

  Solution: Nein

- $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k+1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

Solution: Nein

- $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{n} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

Aufgabe 1

Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

- Die Stirling-Zahlen erster Art zählen bestimmte ....

Solution: Permutationen

- Die Binomialkoeffizienten zählen bestimmte ....

Solution: Kombinationen

- Bei $S_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ....

Solution: keins davon

- Werden bei der Zykelzahl die 1-Zykeln mitgezählt?

Solution: Ja

- Die Stirling-Zahlen zweiter Art zählen bestimmte ....

Solution: Partitionen

- Bei $s_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ....

Solution: Zykeln

Aufgabe 2

Welche Art von Zählkoeffizient erfüllt die angegebene Rekursionsgleichung?

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1}$

Solution: Binomial

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + kc_{n-1,k-1}$

Solution: keins davon

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-1)c_{n-1,k-1}$

  Solution: keins davon

- $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-k)c_{n-1,k-1}$

  Solution: keins davon

Aufgabe 3

Geben Sie die Stirling-Zahlen ein. Hier steht $S_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen zweiter Art und $s_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen erster Art.

- $S_{5,1}$

  Solution: 1

- $s_{6,5}$

  Solution: 15

- $S_{4,2}$

  Solution: 7

- $S_{6,5}$

  Solution: 15

- $s_{5,1}$

  Solution: 24

Aufgabe 1

Ergänzen Sie die Lücke mit allen Wörtern, so dass sich eine korrekte Aussage ergibt.

- Zur Bestimmung der Zusammenhangskomponente eines Knotens kann die ... benutzt werden.

  Solution: Breitensuche,Tiefensuche

- Jede Relation auf der endlichen Menge V kann als Graph mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

  Solution: gerichtet,mit Schlingen

- Jeder ungerichtete Graph ohne Schlingen kann als eine Relation auf der Knotenmenge mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

  Solution: antireflexiv,symmetrisch

- Zur Bestimmung eines kürzesten Kantenzuges zwischen zwei Knoten kann die ... benutzt werden.

  Solution: Breitensuche

Aufgabe 2

Es sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "G2a")

- Was ist der Grad des Knotens 4?

  Solution: 4

- Welche Länge hat die Adjazenzliste von G?

  Solution: 9

- Ist $(2, 3, 4, 2, 1, 9, 2)$ ein Kreis? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

  Solution: -

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat G?

  Solution: 1

- Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{6, 8\}$ inzident?

  Solution: 6,7

- Was ist die Distanz von 5 zu 9?

  Solution: 3

- Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 2

- Wieviele Elemente hat V?

  Solution: 9

- Wieviele Spalten hat die Adjazenzmatrix von G?

  Solution: 9

- Wieviele Kanten hat der auf $\{6, 7, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

  Solution: 4

- Wieviele Nachbarn hat der Knoten 1?

  Solution: 3

- Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{6, 8\}$ inzident?

Solution: 2

- Ist $(6, 4, 3, 2, 4)$ ein Pfad? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

Solution: -

- Ist $(1, 9, 8, 6, 9, 2)$ ein Kantenzug? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

Solution: -

- Wieviele Elemente hat E?

Solution: 14

- Was ist die Summe der Grade aller Knoten?

Solution: 28

- Wieviele kürzeste Kantenzüge von 7 nach 2 gibt es?

Solution: 3

- Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 1?

Solution: 28

- Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{4, 6\}$ inzident?

Solution: 2

- Wieviele Zeilen hat die Adjazenzmatrix von G?

Solution: 9

- Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 0?

Solution: 53

- Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{4, 6\}$ inzident?

Solution: 6,7

- Wieviele Kanten hat der auf $\{1, 2, 4, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 4

Aufgabe 3

Es sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph: (Die Gesamtheit des Clubs der Denker hat sich noch nicht die Mühe gemacht Grafiken einzubinden. Sorry! Bezeichnung des Bildes: "G2a")

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 67?

Solution: 1

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 46?

Solution: 0

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 12?

Solution: 0

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 23?

Solution: 1

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 24?

Solution: 0

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 18?

Solution: 0

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 45?

Solution: 1

- Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 68?

Solution: 0

Aufgabe 4

Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $e = uv \in E$. Ist die Aussage äquivalent dazu, dass $e = uv$ keine Brücke ist?

- Es existiert ein Kantenzug von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

- $(V, E \setminus \{e\})$ hat weniger Komponenten als (V, E).

Solution: Nein

- Es existiert ein Kreis, der u und v durchläuft.

Solution: Ja

- Es existiert ein Pfad von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

- $\deg u > 1$

Solution: Nein

Aufgabe 1

Stimmt die Aussage?

- Jede Eulertour ist ein Kreis.

Solution: Nein

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ungerade.

Solution: Nein

- Jeder Kreis ist eine Tour.

Solution: Ja

- Es gibt Graphen, die eine Eulertour aber keinen Hamiltonkreis besitzen.

Solution: Ja

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat gleich viele oder mehr Komponenten als G.

Solution: Nein

- Jeder Knoten vom Grad 1 ist zu einer Brücke inzident.

Solution: Ja

- Jeder Teilgraph eines Graphen G hat weniger oder gleich viele Komponenten wie G.

Solution: Nein

- Jede Brücke ist zu einem Knoten vom Grad 1 inzident.

Solution: Nein

- Jeder Hamiltonkreis ist eine Eulertour.

Solution: Nein

- In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

Solution: Ja

Aufgabe 1

Gelten die folgenden Aussagen?

- Jede Gruppe besitzt mindestens ein neutrales Element.

Solution: Ja

- S_n ist eine abelsche Gruppe.

Solution: Nein

- In einer Gruppe hat jede Gleichung $ax = b$ (mit a, b gegeben) höchstens eine Lösung.

Solution: Ja

- $\{\pi \in S_n\}\pi(1) = 1$ ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

Solution: Ja

- Jede Untergruppe ist selbst eine Gruppe.

Solution: Ja

- In einer Gruppe besitzt jedes Element genau ein Inverses.

Solution: Ja

- Die leere Menge bildet eine Gruppe.

Solution: Nein

Aufgabe 2

Kreuzen Sie alle Gruppenaxiome an, die in der angegebenen Struktur gelten.

- $(\mathbb{N}_0, +)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\{\text{w,f}\}, \wedge)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\{f : \underline{n} \to \underline{n}\} f \text{ surjektiv}, \circ)$

Solution: G1,G2,G3

- $(\mathbb{N}_0, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\{\text{w,f}\}, \vee)$

Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{N}, +)$

Solution: G1,G4

- $(\{f : \underline{n} \to \underline{n}\} f \text{ injektiv}, \circ)$

  Solution: G1,G2,G3

- $(\mathbb{R}, \cdot)$

  Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$

  Solution: G1,G2,G4

- $(\mathbb{N}, \cdot)$

  Solution: G1,G2,G4

Aufgabe 3

Gelten die folgenden Aussagen?

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a \cdot x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Nein

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a + x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

  Solution: Ja

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $\cdot$ ein Inverses.

  Solution: Nein

- In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $+$ ein Inverses.

  Solution: Ja

- Jeder Körper ist ein kommutativer Ring.

  Solution: Ja

- Jeder Ring ist ein Körper.

  Solution: Nein

Aufgabe 4

Gelten die folgenden Rechengesetze in jedem kommutativen Ring?

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = a \cdot c \cdot e + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

  Solution: Ja

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c)$

  Solution: Ja

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

  Solution: Nein

- $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c) \cdot a$

  Solution: Nein

- $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b + c$

  Solution: Nein

- $ab - ba = 0$

  Solution: Ja

Aufgabe 1

Ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen Weisen, auf die sich eine korrekte Aussage ergibt.

- Die Teilbarkeitsrelation in jedem kommutativen Ring ist …

  Solution: reflexiv,transitiv

- Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für jedes $a \in R$ gilt: a Einheit … $ax = b$ ist für jedes $b \in R$ eindeutig lösbar. $\Longleftrightarrow$

  Solution: A,B

Aufgabe 2

Gelten die folgenden Aussagen?

- Jeder Ring ist eine Gruppe bezüglich der Addition des Rings.

  Solution: Ja

- Jeder kommutative Ring ist nullteilerfrei.

  Solution: Nein

Aufgabe 3

Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Gelten die folgenden Aussagen?

- Jedes von 0 verschiedene Element aus $\mathbb{Z}$ ist Einheit.

  Solution: Nein

- 12 und 14 sind teilerfremd.

  Solution: Nein

- Der ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert, eindeutig und > 0.

Solution: Nein

- Sind $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann bricht der Eukldische Algorithmus (durchgeführt für a, b) ab.

Solution: Ja

- $\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei.

Solution: Ja

- Für alle $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ so, dass $(a, b) = \lambda a + \mu b$.

Solution: Nein

- Zur Berechnung von (a, b) ist die Primfaktorzerlegung von a und b nötig.

Solution: Nein

- 12 und 13 sind teilerfremd.

Solution: Ja

Aufgabe 4

Gelten die folgenden Aussagen?

- $\overline{6} \in \mathbb{Z}_5$

Solution: Ja

- $a \equiv b \pmod{n}$ genau dann, wenn a bei Division durch n den Rest b lässt.

Solution: Nein

- $37 \equiv -1 \pmod{6}$

Solution: Nein

- Die Relation *kongruent modulo n* ist eine Äquivalenzrelation.

Solution: Ja

- $\mathbb{Z}_n$ hat genau $n + 1$ Elemente.

Solution: Nein

- $4321 \equiv 1 \pmod{3}$

Solution: Ja

- Jedes $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ hat genau n Elemente.

Solution: Nein

Aufgabe 5

Gelten die folgenden Aussagen?

- $\mathbb{Z}_1$ ist ein kommutativer Ring.

Solution: Ja

- $(\{\text{w,f}\}, xor, \wedge)$ ist ein Körper.

Solution: Ja

- $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn a und n teilerfremd sind.

Solution: Ja

- $\mathbb{Z}_{10}$ hat genau 4 Einheiten.

Solution: Ja

- $\overline{2}^{1000} = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_7$.

Solution: Ja

- Wie lautet der kleinste nicht-negative Repräsentant von $\overline{35}$ in $\mathbb{Z}_9$?

Solution: 8

- Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist kommutativ und nullteilerfrei.

Solution: Nein

- Die Gleichung $\overline{a} \cdot x = \overline{b}$ in $\mathbb{Z}_n$ (mit $\overline{a}, \overline{b}$ gegeben) ist genau dann lösbar, wenn $n|(a,b)$.

Solution: Nein

- $\mathbb{Z}_8$ ist ein Körper.

Solution: Nein

- $(\overline{16})^{-1} = \overline{16}$ in $\mathbb{Z}_{51}$.

Solution: Ja

Aufgabe 1

Wir rechnen in $\mathbb{Z}_9$.

- Für welches $a \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ gilt $4^{24242} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{2}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 6

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{4}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 3

- Für welches $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt $7^{12121} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{5}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 6

- Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{7}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 3

Aufgabe 2

Berechnen Sie jeweils mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten, gemeinsamen Teiler der beiden gegebenen Polynome. Der ggT zweier Polynome sei stets ein normiertes Polynom. Geben Sie als Antwort nur die Koeffizienten des Polynoms in absteigender Reihenfolge und durch Komma getrennt ein. Beispiel: für $X^4 + 2X^3 - X^2 + 3$ ist '1,2,-1,0,3' einzugeben. Hinweis: alle Koeffizienten in den Lösungen sind ganzzahlig.

- Wie lautet der ggT von $X^4 + 8X^3 + 6X^2 - 6X + 7$ und $X^3 + 7X^2$?

Solution: 1,7

- Wie lautet der ggT von $2X^3 - X^2 - 2X + 1$ und $X^4 + X^3 - X - 1$?

Solution: 1,0,-1

- Wie lautet der ggT von $X^5 - X^4 + X^3 - X - 2$ und $2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$?

Solution: 1,-1,2

Aufgabe 3

Sei $f = X^5 + 2X^4 + X^2 + X - 2$ und $g = X^4 + 2X^3$. Berechnen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten, gemeinsamen Teiler d der Polynome f und g. Berechnen Sie weiterhin Polynome λ und μ mit $d = \lambda f + \mu g$. Geben Sie Polynome ein, wie oben angegeben. Hinweis: alle Koeffizienten in den Lösungen sind ganzzahlig.

- Wie lautet μ?

Solution: 1,1,1,1

- Wie lautet der ggT d von f und g?

Solution: 1,2

- Wie lautet λ?

Solution: -1,-1,-1