Lösungen für Diskrete Strukturen

Anonymous

Weihnachten

1. Handelt es sich um eine mathematische Aussage?
   (a) Alle eingeschriebenen Studenten erschienen zur ersten Vorlesung.

   Solution: Ja

   (b) Es ist neblig.

   Solution: Nein

2. Handelt es sich um eine Verneinung von 'Das Glas ist voll'?
   (a) Es gilt nicht, dass das Glas voll ist.

   Solution: Ja

   (b) Das Glas ist nicht voll.

   Solution: Ja

   (c) Es gilt nicht, dass das Glas nicht voll ist.

   Solution: Nein

   (d) Es gilt nicht, dass das Glas nicht leer ist.

   Solution: Nein

   (e) Es gilt nicht, dass das Glas leer ist.

   Solution: Nein

   (f) Das Glas ist leer.

   Solution: Nein

3. Ergänzen Sie die folgende Wahrheitstabelle. Einzugeben ist für jede Zeile der Tabelle eine Zeichenkette aus f's und w's ohne Leerzeichen (z.B. fwf).

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge \neg B$	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$(A \vee \neg A) \Rightarrow B$	$B \Rightarrow (A \vee \neg A)$
w	w	f		f	w	w		
w	f	f	w	w	f		f	w
f	w	w	f		w		w	w
f	f	w	w	f		w	f	

(a) 3. Zeile

Solution: ff

(b) 1. Zeile

Solution: fww

(c) 2. Zeile

Solution: w

(d) 4. Zeile

Solution: ww

4. Hängt der Wahrheitswert der folgenden Aussageformen von der Belegung der Variablen ab?

(a) 'Das Glas x ist voll' $\vee$ 'Das Glas x ist leer'

Solution: Ja

(b) 'Das Glas x ist voll' $\vee$ 'Das Glas x ist nicht voll'

Solution: Nein

5. Handelt es sich bei den folgenden logischen Formeln um Tautologien? (w steht für wahr)

(a) $(\mathrm{f} \oplus A) \Leftrightarrow A$

Solution: Ja

(b) $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$

Solution: Ja

(c) $(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A)$

Solution: Ja

(d) $(\mathrm{f} \vee A) \Leftrightarrow \neg A$

Solution: Nein

6. Sind die Mengen gleich?
   (a) $\mathbb{N}$ und $z \in \mathbb{Z} z > 0$

   Solution: Ja

   (b) $1, 2, 3, 4$ und $4, 4, 3, 2, 4, 2, 1$

   Solution: Ja

   (c) $\frac{a}{b} a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$ und $\frac{a}{b} a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}$

   Solution: Ja

   (d) $\{$Teller, Tasse, Glas, Tee$\}$ und $\{$Teetasse, Teller, Glas$\}$

   Solution: Nein

   (e) $1, 2, 2, 1$ und $2 \cdot 1, 2 \cdot 2$

   Solution: Nein

   (f) $\frac{a}{b} a, b \in \mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$

   Solution: Nein

7. Ist die Aussage eine Verneinung von 'Jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.'?
   (a) 'Es gibt eine reelle Zahl, die nicht das Quadrat einer reellen Zahl ist.'

   Solution: Ja

   (b) 'Nicht jede reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.'

   Solution: Ja

   (c) 'Jede reelle Zahl ist nicht das Quadrat einer reellen Zahl.'

   Solution: Nein

(d) ‘Jede reelle Zahl ist das Quadrat einer nicht-reellen Zahl.’

> **Solution:** Nein

(e) ‘Es gibt eine reelle Zahl, die das Quadrat einer reellen Zahl ist.’

> **Solution:** Nein

(f) ‘Keine reelle Zahl ist ein Quadrat einer reellen Zahl.’

> **Solution:** Nein

8. Ist die Aussage eine Verneinung von ‘Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.’?

(a) ‘Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.’

> **Solution:** Ja

(b) ‘Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.’

> **Solution:** Ja

(c) ‘Für alle reellen Zahlen gilt, dass ihr Quadrat gleich ihrem Doppelten ist.’

> **Solution:** Nein

(d) ‘Es gibt eine reelle Zahl, deren Quadrat ungleich ihrem Doppelten ist.’

> **Solution:** Nein

9. Versuchen Sie zu beweisen, dass die Zusammenfassung aller Mengen, die sich selbst enthalten, keine Menge im Sinne unserer Definition aus Abschnitt (2.1) ist. Hinweis: Leiten Sie einen Widerspruch ab.

10. Wie lautet die Mächtigkeit der folgenden Mengen? Einzugeben ist eine natürliche Zahl oder 0.

(a) $\mathbb{Z} \backslash \mathbb{Q}$

> **Solution:** 0

(b) $(\emptyset)$

Solution: 1

(c) $n \in \mathbb{N} n \leq 1000$

Solution: 1000

(d) (0)

Solution: 2

(e) $(0, 1)$

Solution: 4

(f) $0, 1 \times \underline{3}$

Solution: 6

(g) $0, 1^3$

Solution: 8

(h) $n \in \mathbb{N} n < 1000$

Solution: 999

11. Wie lautet der Wahrheitswert der folgenden Aussagen? Kreuzen Sie das Fragezeichen an, wenn der Wahrheitswert von der Aussageform $A(x)$ anhängt.

(a) Es gibt ein $x \in \emptyset$ mit $A(x)$.

Solution: f

(b) Für alle $x \in \emptyset$ gilt $A(x)$.

Solution: w

12. Wie lautet der Wahrheitswert der folgenden Aussagen? Kreuzen Sie das Fragezeichen an, wenn der Wahrheitswert von der Aussageform $A(x)$ anhängt.

(a) $n \in \mathbb{N} n$ gerade, $n \in \mathbb{N} n$ ungerade, $-nn \in \mathbb{N}, n$ gerade, $-nn \in \mathbb{N}, n$ ungerade ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

(b) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{<0}, \mathbb{Q}$ ist eine Partition von $\mathbb{R}$.

Solution: Nein

(c) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}_{<0}$ ist eine Partition von $\mathbb{Q}$.

Solution: Nein

(d) Für je zwei beliebige Mengen A, B gilt $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Solution: Nein

(e) $n \in \mathbb{N}n$ gerade, $n \in \mathbb{N}n$ ungerade ist eine Partition von $\mathbb{Z}$.

Solution: Nein

13. Handelt es sich um einen direkten Beweis, einen Beweis durch Kontraposition oder um einen Beweis durch Widerspruch?

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aussage: n gerade $\Rightarrow n^2$ gerade. Beweis: Angenommen n ist gerade, d.h. $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann folgt $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, also ist n^2 gerade.

Solution: Direkt

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aussage: n^2 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade. Beweis: Wir nehmen an n ist gerade. Dann ist (nach vorherigem Teil) n^2 gerade und die Behauptung folgt.

Solution: Kontraposition

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Aussage: n^2 ungerade $\Rightarrow n$ ungerade. Beweis: Angenommen n^2 ist ungerade, aber n gerade. Weil n gerade ist, folgt (nach vorherigem Teil) dass n^2 gerade ist, womit die Behauptung gezeigt wäre.

Solution: Widerspruch

14. Geben Sie die korrekte Anzahl ein.

(a) Wieviele verschiedene Partitionen besitzt a, b, c? Beachten Sie, dass die Teile einer Partition nicht leer sein dürfen (vgl. Skript).

Solution: 5

(b) Wieviele verschiedene 2-elementige Teilmengen besitzt a, b, c, d?

Solution: 6

15. Wir betrachten die folgende Aussage:

$$\text{A: ‘Alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.’} \tag{1}$$

Geben Sie an, wie sich A und die jeweils unten angegebene Aussage B zueinander verhalten. Kreuzen Sie Neg an wenn B die Verneinung von A ist, Äq wenn A und B äquivalent sind, und keins wenn keines der beiden zutrifft. Annahmen: Der Hörsaal ist nicht leer und jede Person darin besitzt genau ein Handy, dessen Zustand entweder an oder aus ist.

Hinweis: Es ist gemeint, ob A und B allgemein, d.h. in jeder möglichen im Hörsaal herrschenden Situation, äquivalent zueinander bzw. Negationen voneinander sind. Etwas präziser kann man A und B als Aussageformen A(S) und B(S) auffassen, deren Wahrheitswert von der Situation S im Hörsaal abhängen. In diesem Sinne ist dann anzukreuzen: Äq wenn ‘A(S) $\Leftrightarrow$ B(S)’ für jede Situation S gilt, Neg wenn ‘A(S) $\Leftrightarrow \neg$ B(S)’ für jede Situation S gilt, und keins anderenfalls.

(a) B: ‘Wenn alle Personen im Hörsaal ihr Handy aus haben, folgt daß der Hörsaal leer ist.’

Solution: Neg

(b) B: ‘Nicht alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy aus.’

Solution: Neg

(c) B: ‘Es gibt mindestens eine Person im Hörsaal, die ihr Handy an hat.’

Solution: Neg

(d) B: ‘Es gibt eine Person im Hörsaal, die ihr Handy nicht an hat.’

Solution: keins

(e) B: ‘Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy aus.’

Solution: keins

(f) B: ‘Es gibt eine Person im Hörsaal, die ihr Handy aus hat.’

Solution: keins

(g) B: ‘Alle Personen im Hörsaal haben ihr Handy an.’

Solution: keins

(h) B: 'Wenn eine Person ihr Handy an hat, ist sie nicht im Hörsaal.'

Solution: Äq

(i) B: 'Keine Person im Hörsaal hat ihr Handy an. '

Solution: Äq

16. Handelt es sich um Tautologien?

(a) $(A \oplus B) \vee \neg(A \wedge \neg B)$

Solution: Ja

(b) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$

Solution: Ja

(c) $(A \Rightarrow B) \vee (B \Rightarrow A)$

Solution: Ja

(d) $((\neg A \wedge B) \vee \neg(A \vee B)) \Rightarrow \neg A$

Solution: Ja

(e) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

Solution: Ja

(f) $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B)$

Solution: Nein

(g) $(A \Leftrightarrow B) \vee ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

Solution: Nein

(h) $(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Solution: Nein

(i) $((\neg A \wedge B) \vee \neg(A \wedge B)) \Rightarrow \neg A$

Solution: Nein

(j) $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

Solution: Nein

(k) $(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee C)$

Solution: Nein

17. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

(a) Die Menge $\text{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 8 Elemente.

Solution: Ja

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^2 + y^2 = 0\} \subseteq \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\}$

Solution: Ja

(c) Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist ungerade}\}$ hat genau 2 Elemente.

Solution: Ja

(d) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 6 teilbar}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\}$

Solution: Ja

(e) $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist gerade}\} \subseteq \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ ist durch 3 teilbar}\}$

Solution: Nein

(f) Die Menge $\{(x,y) \in \{1,2,3\} \times \{2,3\} \mid x \cdot y \text{ ist gerade}\}$ hat genau 3 Elemente.

Solution: Nein

(g) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Solution: Nein

(h) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Solution: Nein

(i) Die Menge $\text{Pot}(\{1, \{2,3\}, 3\})$ hat 16 Elemente.

Solution: Nein

(j) $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x + y = 0\} \subseteq \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x \cdot y = 0\}$

Solution: Nein

18. Es seien A, B und C beliebige Mengen. Kreuzen Sie jeweils "Ja" an, wenn die Aussage stimmt oder "Nein", wenn sie nicht stimmt!

Hier ist $M \setminus N$ die **Differenzmenge** zweier Mengen M und N, also gleich $\{m \in M \mid m \notin N\}$.

(a) Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cap A \subseteq C \cap B$.

Solution: Ja

(b) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

Solution: Ja

(c) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Solution: Ja

(d) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Solution: Ja

(e) Wenn $A \cup B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

Solution: Ja

(f) Ist $A \subseteq B$, dann ist $C \cup A \subseteq C \cup B$.

Solution: Ja

(g) $(A \cap B) \cup C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Solution: Nein

(h) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Solution: Nein

(i) Wenn $A \cap B \subseteq C$ gilt, dann gilt sowohl $A \subseteq C$ als auch $B \subseteq C$.

Solution: Nein

(j) $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$

Solution: Nein

(k) $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$

Solution: Nein

19. Wir beweisen mittels vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

'Ist in einer Menge von n Panthern ein Panther pink, so sind alle Panther der Menge pink.'

1. Induktionsanfang: Wir wollen die Aussage zuerst für $n = 1$ beweisen. Für diesen Fall ist die Aussage aber klar, da die Menge nur aus einem Panther besteht und wenn dieser Panther pink ist, gilt dies schon für die ganze Menge.

2. Induktionsvoraussetzung: Es gibt also eine natürliche Zahl n_0 so, daß für alle natürlichen Zahlen $n \leq n_0$ die obige Aussage gilt.

3. Induktionsschritt: Wir zeigen nun, dass dann auch für alle $n \leq n_0 + 1$ die obige Aussage gilt. Mittels vollständiger Induktion folgt sie dann für alle $n \in \mathbb{N}$.

4. Sei also M eine Menge von $n_0 + 1$ Panthern. Von diesen $n_0 + 1$ Panthern ist nach Voraussetzung mindestens einer pink - sagen wir der Panther heißt Paulchen.

5. Wir betrachten nun eine Teilmenge $M' \subset M$ der Größe n_0, in der Paulchen enthalten ist.

6. Da Paulchen pink ist, sind nach Induktionsvoraussetzung alle Panther dieser Teilmenge M' pink.

7. Zu beweisen ist nur noch, dass der eine Panther, der in M, aber nicht in M' enthalten ist, auch pink ist - lassen Sie uns diesen Panther Jerry nennen.

8. Um zu beweisen, dass Jerry pink ist, betrachten wir die Menge, die nur aus Paulchen und Jerry besteht.

9. Da Paulchen pink ist, ist nach Induktionsvoraussetzung Jerry auch pink.

10. Somit haben wir bewiesen, dass alle $n_0 + 1$ Panther aus M pink sind.

(a) In welchem Schritt ist der Fehler? (Bitte nur eine Zahl zwischen 1 und 10 eingeben.)

Solution: 9

20. (a) Finden Sie geschlossene Formeln für die Summen $f(n) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ und $g(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$ und beweisen Sie diese mit vollständiger Induktion.

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl mit $x > -1$ und $x \neq 0$. Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ gilt: $(1 + x)^n > 1 + nx$.

21. Sind die folgenden Elemente paarweise verschieden?

    (a) 1,2,4,1

    Solution: Nein

22. Handelt es sich um eine Permutation oder ein Tupel? Falls beide Auffassungen möglich sind, sind zwei Kreuze zu machen.

    (a) $(1, 2, \frac{1}{2})$

    Solution: Permutation,Tupel

    (b) $(0, 0, 7)$

    Solution: Tupel

23. Wieviele verschiedene k-Permutationen lassen sich durch Anordnung aus der angegebenen k-Kombination gewinnen?

    (a) 0

    Solution: 1

24. Schreiben Sie die angegebene Teilmenge von $\underline{5}$ als ein Tupel über $0, 1$ wie in Beispiel III(1.3a). Geben Sie das Tupel als Zeichenfolge von Nullen und Einsen ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein (z.B. $011\ldots$).

    (a)

    Solution: 00000

    (b) $2, 4, 5$

    Solution: 01011

    (c) $\underline{5}$

    Solution: 11111

25. Geben sie zu folgenden k-Kombinationen, k-Tupeln, k-Multimengen, bzw. k-Permutationen das k an!

    (a) $\{1, 3, 4, 2, 1\}$

    Solution: 4

(b) $(1, 2, 4, 5, 6)$

Solution: 5

(c) $(\cos(-\frac{\pi}{2}), \cos(0), \cos(-\pi), \cos(0), \cos(0))$

Solution: 5

(d) $\{*999, 432, 975, 875, 975, 432, 924, 37*\}$

Solution: 8

26. Sind die angegebenen Objekte gleich?

(a) Die k-Kombinationen $1, 2, 4$ und $4, 2, 1$.

Solution: Ja

(b) Die k-Multimengen $\{*1, 3, 4, 2, 1*\}$ und $\{*3, 2, 4, 1*\}$.

Solution: Nein

(c) Die k-Tupel $(1, 2, 3, 4, 4, 4, 1, 5)$ und $(1, 2, 4, 3, 4, 1, 4, 5)$.

Solution: Nein

(d) Die k-Permutationen $(1, 2, 4)$ und $(4, 2, \sin\frac{\pi}{2})$.

Solution: Nein

27. Ein Wurf mit 5 Würfeln gleichzeitig ergibt 3,3,2,6,3. Wir fassen diesen Wurf wie in Beispiel III(1.3) als eine k-Multimenge M auf und schreiben diese anschliessend als ein l-Tupel T.

(a) Wir kodieren das Tupel T als ein Wort über $\{0, 1\}$ wie im Beweis von Satz III(1.3). Geben Sie das Wort ein.

Solution: 0101110001

(b) Wie lautet das Tupel T? Geben Sie das Tupel als Zeichenkette ohne Komma oder Leerzeichen und ohne umschliessende Klammern ein.

Solution: 013001

(c) Wie lautet k?

Solution: 5

(d) Wie lautet l?

Solution: 6

(e) M ist eine k-Multimenge über

i. $\underline{5}$
ii. $\underline{6}$
iii. $\mathbb{N}$
iv. $\mathbb{N}_0$

Solution: B

(f) T ist ein k-Tupel über

i. $\underline{5}$
ii. $\underline{6}$
iii. $\mathbb{N}$
iv. $\mathbb{N}_0$
v. $\{1,2,3,4,5,6\}$

Solution: D

28. Berechne die folgenden Anzahlen

(a) Die Anzahl der 5-Kombinationen aus $\underline{5}$

Solution: 1

(b) Die Anzahl der Permutationen aus $\underline{5}$

Solution: 120

(c) Die Anzahl der 5-Multimengen aus $\underline{5}$

Solution: 126

(d) Die Anzahl der 4-Multimengen aus $\underline{6}$

Solution: 126

(e) Die Anzahl der 4-Tupel aus $\underline{6}$

Solution: 1296

(f) Die Anzahl der 4-Kombinationen aus $\underline{6}$

Solution: 15

(g) Die Anzahl der 3-Permutationen aus $\underline{7}$

Solution: 210

(h) Die Anzahl der 5-Tupel aus $\underline{5}$

Solution: 3125

(i) Die Anzahl der 3-Tupel aus $\underline{7}$

Solution: 343

(j) Die Anzahl der 3-Kombinationen aus $\underline{7}$

Solution: 35

(k) Die Anzahl der 4-Permutationen aus $\underline{6}$

Solution: 360

(l) Die Anzahl der 3-Multimengen aus $\underline{7}$

Solution: 84

29. Gelten die folgenden Gleichungen für alle n und k? Es wird angenommen, dass n und k in einem Bereich liegen, dass alle auftretenden Binomialkoeffizienten definiert sind (also von der Form $\binom{a}{b}$ mit $0 \leq b \leq a$).

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k}$

Solution: Nein

(b) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{n} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

(c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}$

Solution: Nein

(d) $\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k+1} + 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$

Solution: Nein

30. Wir ziehen aus einem Vorrat an eindeutig nummerierten Kugeln (z.B. Lottokugeln) nach dem angegebenen Modus. Durch welche mathematische Struktur wird das Ergebnis dieses Vorgangs beschrieben?

    (a) Ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Kombination

    (b) Abweichend von der bisherigen Aufgabenstellung sind die Kugeln nun nicht mehr eindeutig nummeriert, sondern sind in einer von endlich vielen möglichen Farben gefärbt. Es wird angenommen, dass der Vorrat an Kugeln in jeder Farbe gross ist im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen. Wir ziehen ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Multimenge

    (c) Ziehen mit Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Multimenge

    (d) Ziehen ohne Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Permutation

    (e) Abweichend von der bisherigen Aufgabenstellung sind die Kugeln nun nicht mehr eindeutig nummeriert, sondern sind in einer von endlich vielen möglichen Farben gefärbt. Es wird angenommen, dass der Vorrat an Kugeln in jeder Farbe gross ist im Vergleich zur Anzahl der Ziehungen. Wir ziehen mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Tupel

    (f) Ziehen mit Zurücklegen unter Beachtung der Reihenfolge.

    Solution: Tupel

31. Mehr oder weniger? Es sei A eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen.

    (a) Gibt es mehr k-Multimengen aus A als k-Kombinationen, oder weniger?

    Solution: mehr

    (b) Gibt es mehr k-Permutationen aus A als k-Kombinationen, oder weniger?

Solution: mehr

(c) Gibt es mehr k-Permutationen aus A als k-Tupel, oder weniger?

Solution: weniger

(d) Gibt es mehr k-Multimengen aus A als k-Tupel, oder weniger?

Solution: weniger

32. Mehr oder weniger? Es sei A eine endliche Menge mit mindestens zwei Elementen.

(a) Wieviele 8-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

Solution: 1632960

(b) Wieviele Wörter lassen sich aus den vier Buchstaben `R,W,T,H` bilden? (Jeder der aufgelisteten Buchstaben soll genau einmal im Wort vorkommen.)

Solution: 24

(c) Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 5 Würfeln?

Solution: 252

(d) Wieviele Passwörter der Länge 5 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden?

Solution: 380204032

(e) (Übung.) Bei einer Tagung sollen 10 verschiedene Leute jeweils einmal vortragen. Wieviele mögliche Vortragsprogramme gibt es noch, wenn der erste und letzte Vortrag bereits fest besetzt sind?

Solution: 40320

(f) Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 6 Würfeln?

Solution: 462

(g) Wieviele 7-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen jede Ziffer höchstens einmal vorkommt?

Solution: 544320

(h) Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 95 druckbaren ASCII-Zeichen bilden?

Solution: 81450625

33. Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

(a) Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 5 Würfeln, in denen eine 6 vorkommt?

Solution: 126

(b) Wieviele Bitfolgen der Länge 24 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?

Solution: 16777214

(c) Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen keine ein beschädigtes Ei enthält?

Solution: 2432332329570

(d) Von 90 Packungen Eiern enthalten 7 ein beschädigtes Ei. Wieviele Stichproben von 10 Packungen gibt es, von denen mindestens eine ein beschädigtes Ei enthält?

Solution: 3288313152333

(e) Wieviele mögliche Ergebnisse gibt es beim gleichzeitigen Wurf von 6 Würfeln, in denen eine 1 oder eine 2 vorkommt?

Solution: 378

(f) Wieviele Bitfolgen der Länge 32 gibt es, bei denen irgendwo ein Bit zweimal hintereinander vorkommt?

Solution: 4294967294

(g) Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden, die ein X und kein Zeichen doppelt enthalten?

Solution: 499800

(h) Wieviele Passwörter der Länge 4 lassen sich aus den 52 Gross- und Kleinbuchstaben bilden, die ein A und kein Zeichen doppelt enthalten?

Solution: 499800

(i) (Übung.) Wieviele Dezimalzahlen mit bis zu zehn Ziffern enthalten die Ziffer 3?

Solution: 6513215599

34. Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfiehlt sich, einen Taschenrechner zu benutzen.

(a) Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `E,X,Z,E,L,L,E,N,Z` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 9 haben.)

Solution: 15120

(b) Wieviele Wörter lassen sich durch Anordnung der Buchstaben `K,L,A,U,S,U,R` bilden? (Es ist gemeint, dass die Buchstaben genau in der angegebenen Häufigkeit verwendet werden, die Wörter somit insbesondere die Länge 7 haben.)

Solution: 2520

(c) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 30 Studierende 3 Tutoren zuzuordnen, wenn die Tutoren gleichviele Studierende betreuen sollen?

Solution: 5550996791340

(d) Bei einem Seminar sollen 6 Studierende jeweils zwei Vorträge halten. Wieviele Möglichkeiten gibt es für die Reihenfolge der Vortragenden?

Solution: 7484400

35. Gelten die folgenden Gleichungen für alle n, m und k? Es wird angenommen, dass n, m, k in einem Bereich liegen, dass alle auftretenden Binomialkoeffizienten definiert sind (also von der Form $\binom{a}{b}$ mit $0 \leq b \leq a$).

(a) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{n-k} + \binom{n-1}{k}$

Solution: Ja

(b) $\sum_{i=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{i} = \binom{m+n}{n}$

Solution: Ja

(c) $\sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{i} = \binom{m\cdot n}{k^2}$

Solution: Nein

36. a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, k Personen so auf eine Reihe von n Stühlen zu setzen, dass keine zwei nebeneinanderstehenden Stühle besetzt sind? Beweisen Sie Ihre Behauptung.

    b) Beweisen Sie kombinatorisch (ohne Induktion) die Gleichung

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

    für alle $n \in \mathbb{N}$.

37. a) Zeigen Sie für alle $1 \leq k < n$ die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

    durch direktes Einsetzen der Definition und Umformen (ohne Induktion).

    b) Beweisen Sie die Vandermonde-Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

    mittels vollständiger Induktion.
    Hinweis: Verwenden Sie die Identität aus a). Entscheiden Sie, ob Sie die Induktion nach n, m oder k führen.

38. a) Zeigen Sie für alle $1 \leq k < n$ die Identität

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

    durch direktes Einsetzen der Definition und Umformen (ohne Induktion).

    b) Beweisen Sie die Vandermonde-Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}$$

    mittels vollständiger Induktion.
    Hinweis: Verwenden Sie die Identität aus a). Entscheiden Sie, ob Sie die Induktion nach n, m oder k führen.

(a) Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \mathbb{N} \to \dots, \quad n \mapsto \frac{1}{2}n$$

i. $\mathbb{R}$
ii. $\mathbb{N}$
iii. $\mathbb{N}_0$
iv. $\mathbb{Z}$

Solution: A

(b) Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \mathbb{N} \to \dots, \quad n \mapsto 2n$$

i. $\mathbb{R}$
ii. $\mathbb{N}$
iii. $\mathbb{N}_0$
iv. $\mathbb{Z}$

Solution: A,B,C,D

(c) Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \dots \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto |\sqrt{x}|$$

i. $\mathbb{R}_{\geq 0}$
ii. $\mathbb{R}$
iii. $\mathbb{N}$
iv. $\mathbb{Z}$

Solution: A,C

(d) Kreuzen Sie alle Möglichkeiten an, für die sich eine Abbildung ergibt.

$$f : \dots \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto |-x|$$

i. $\mathbb{R}_{\geq 0}$
ii. $\mathbb{N}$
iii. $\mathbb{N}_0$
iv. $\mathbb{Z}$

Solution: B

(e) Sind die Abbildungen $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto (x-1)(x+1)$ und $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto x^2 - 1$ gleich?

Solution: Ja

(f) Lässt sich jede Folge (in einer beliebigen Menge) als eine Abbildung auffassen?

Solution: Ja

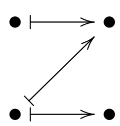
(g) Lässt sich jedes Tupel (über einer beliebigen Menge) als eine Abbildung auffassen?

Solution: Ja

(h) Mit M^N bezeichnet man die Menge aller Abbildungen von

Solution: N nach M

(i) Beschreibt folgendes Pfeildiagram eine Abbildung?



Solution: Nein

(j) Eine Abbildung ordnet jedem Element des Definitionsbereiches ... ein Element des Zielbereiches zu.

Solution: genau

39. Beantworten Sie die Fragen.

(a) Welche Ungleichungen gelten für alle Abbildungen $f : N \to M$? (alle ankreuzen!)

i. $|f(N)| \leq |N|$
ii. $|f(N)| \geq |N|$
iii. $|f(N)| \leq |M|$
iv. $|f(N)| \geq |M|$

Solution: A,C

(b) Sei $f : N \to M$ eine Abbildung. Die Menge $f(x)x \in N$ heisst ... von f.

Solution: Bild

(c) Können Fasern leer sein?

Solution: Ja

(d) Das Bild einer Abbildung $f : N \to M$ ist eine Teilmenge von ...

Solution: M

(e) Die Fasern einer Abbildung $f : N \to M$ sind Teilmengen von ...

Solution: N

40. Es seien f, g, h Abbildungen. Ja oder Nein?

(a) Es gilt stets $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Solution: Ja

(b) Zu zwei beliebigen Abbildungen f und g existiert stets eine der Kompositionen $f \circ g$ oder $g \circ f$.

Solution: Nein

(c) Es gilt stets $f \circ g = g \circ f$ falls beide Seiten der Gleichung definiert sind.

Solution: Nein

41. Es seien f, g, h Abbildungen. Ja oder Nein?

(a) Gibt es Abbildungen die injektiv und surjektiv sind?

Solution: Ja

(b) Gibt es Abbildungen die weder injektiv noch surjektiv sind?

Solution: Ja

(c) Ist jede Abbildung injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

(d) Ist jede Abbildung entweder injektiv oder surjektiv?

Solution: Nein

(e) Eine Abbildung ist genau dann injektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: höchstens

(f) Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z}, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv

(g) Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: injektiv,surjektiv

(h) Eine Abbildung ist genau dann surjektiv, wenn jedes Element des Zielbereiches ... ein Urbild hat.

Solution: mindestens

(i) Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Abbildung hat.

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto |x|$$

Solution: surjektiv

42. Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

(a) Hat jede Abbildung eine links- oder rechtsseitige Umkehrabbildung?

Solution: Nein

(b) Wenn f injektiv ist, so existiert stets eine ...-seitige Umkehrabbildung.

Solution: links

(c) Gilt $g \circ f = \mathrm{id}$, so heisst g eine ...-seitige Umkehrabbildung von f.

Solution: links

(d) Gilt $f \circ g = \mathrm{id}$, so heisst g eine ...-seitige Umkehrabbildung von f.

Solution: rechts

(e) Wenn f surjektiv ist, so existiert stets eine ...-seitige Umkehrabbildung.

Solution: rechts

43. Beantworten Sie die Fragen bzw. vervollständigen Sie die mit ... gekennzeichnete Lücke.

(a) Für alle surjektiven Abbildungen $f : N \to M$ gilt ....
$|f(N)| \leq |N|$
$|f(N)| \geq |N|$
$|f(N)| \leq |M|$
$|f(N)| \geq |M|$

Solution: A,C,D

(b) f surjektiv ... $|N| \geq |M|$
i. $\Leftarrow$
ii. $\Rightarrow$

Solution: B

(c) f injektiv ... $|N| \leq |M|$
i. $\Leftarrow$
ii. $\Rightarrow$

Solution: B

(d) Wenn f eine links-seitige und eine rechts-seitige Umkehrabbildung besitzt, besitzt f dann auch eine beidseitige Umkehrabbildung?

Solution: JA

(e) Wenn f und g bijektive Abbildungen sind und $g \circ f$ definiert ist, gilt dann $(g \circ f)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$?

Solution: NEIN

(f) Wenn eine Abbildung eine ...-seitige Umkehrabbildung besitzt, so ist diese eindeutig.

Solution: beid

(g) Jede Abbildung lässt sich durch Einschränkung des Definitionsbereiches ... machen.

Solution: injektiv

(h) Sollte decrypt eine links- oder rechts-seitige Umkehrabbildung von crypt sein?

Solution: links

(i) Jede Abbildung lässt sich durch Einschränkung des Zielbereiches ... machen.

Solution: surjektiv

44. Es sei A eine Menge. Ordnen Sie den folgenden Abbildungen die jeweilige Struktur über A zu, die sie beschreiben.

(a) $A \to \{0,1\}$

Solution: Kombination

(b) $A \to \mathbb{N}_0$

Solution: Multimenge

(c) $\underline{k} \to A$ injektiv

Solution: Permutation

(d) $\underline{k} \to A$

Solution: Tupel

45. Seien π, ψ beliebige Elemente aus S_n. Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

(a) An $sign(\pi)$ lässt sich die Anzahl der ... von π erkennen.

i. Inversionen

ii. Transpositionen
iii. disjunkten Zykel

Solution:

(b) Falls π ein k-Zykel ist und k gerade, so ist $sign(\pi) = \ldots$.

Solution: -1

(c) Falls π ein k-Zykel ist und k ungerade, so ist $sign(\pi) = \ldots$.

Solution: 1

(d) π lässt sich als Produkt von ... schreiben.
   i. Zykeln
   ii. disjunkten Zykeln
   iii. Transpositionen

Solution: A,B,C

(e) Es sei $k \in \mathbb{N}$. Welche Abbildungen sind definiert und liegen in S_n?
π^{-1}
π^k
π^{-k}
π^0
$\psi \circ \pi$
$\pi \circ \psi$

Solution: A,B,C,D,E,F

(f) Welche Aussagen gelten allgemein?
π ist injektiv
π ist surjektiv
$\pi \circ \psi = \psi \circ \pi$
$T_\pi \subseteq S_n$

Solution: A,B,D

(g) $sign(\pi \circ \psi) = sign(\pi) \ldots sign(\psi)$
   i. $+$
   ii. $\cdot$
   iii. $-$

Solution: B

(h) π lässt sich eindeutig (bis auf Reihenfolge und bis auf Erwähnung von 1-Zykeln) als Produkt von ... schreiben.

i. Zykeln
ii. disjunkten Zykeln
iii. Transpositionen

Solution: B

(i) Gilt $\sigma^{-k} = id$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$?

Solution: JA

(j) Gilt $\sigma^{-l} = \sigma^{k-l}$ für jeden k-Zykel $\sigma \in S_n$ und alle $l \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq l \leq k-1$?

Solution: JA

46. Bitte tragen Sie ganze Zahlen als Ergebnisse ein. Es empfielt sich, einen Taschenrechner zu benutzen. Bei allen Passwortaufgaben werden die Passwörter aus den 95 druckbaren ASCII-Zeichen gebildet. Wir teilen diese ASCII-Zeichen auf in 26 Grossbuchstaben, 26 Kleinbuchstaben, 10 arabische Ziffern und 33 Sonderzeichen.

(a) Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Zuschauerin und zwei Zuschauer auszusuchen?

Solution: 1130381

(b) Wieviele Passwörter der Länge 5, die ein Sonderzeichen und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?

Solution: 1206416640

(c) Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Groß- und ein Kleinbuchstabe, sowie mindestens eine Ziffer und ein Sonderzeichen vorkommen, sind möglich?

Solution: 1271556000

(d) Bei einer Quizshow dürfen 3 Personen mitspielen. Sie werden aus 161 Zuschauerinnen und 119 Zuschauern ausgesucht. Wieviele Möglichkeiten gibt es, zwei Zuschauerinnen und einen Zuschauer auszusuchen?

Solution: 1532720

(e) Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Grossbuchstabe und eine Ziffer vorkommt, sind möglich?

Solution: 2451649200

(f) (Übung.) Wieviele Passwörter mit höchstens 5 Zeichen aus paarweise verschiedenen Buchstaben sind möglich?

Solution: 318507905

(g) Wieviele Passwörter der Länge 5, die eine Ziffer und ansonsten nur Buchstaben enthalten, sind möglich?

Solution: 365580800

(h) Wieviele Teilmengen mit höchstens 5 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid \ 1 \leq i \leq 9\}$?

Solution: 382

(i) Wieviele Teilmengen mit höchstens 4 Elementen hat die Menge $\{i \in \mathbb{N} \mid \ 1 \leq i \leq 10\}$?

Solution: 386

(j) Wieviele Passwörter der Länge 5, in denen mindestens ein Kleinbuchstabe und ein Sonderzeichen vorkommt, sind möglich?

Solution: 5318111370

47. Es seien die folgenden Mengen gegeben: $A := \{n \in \mathbb{Z} \mid \ 0 \leq n \leq 10\}$ und $C := \{5, 6, 7, 8\}$. Außerdem seien die folgenden Abbildungen gegeben:

$i : A \to \mathbb{Z}$, $n \mapsto n$;

$f : C \to A$, $n \mapsto n/2$ falls n gerade ist und $n \mapsto (n-1)/2$ falls n ungerade ist;

$g : \mathbb{Z} \to A$, $z \mapsto r$, wobei $z = 11q + r$ mit $q, r \in \mathbb{Z}$ und $0 \leq r < 11$.

Bei den Fragen nach Anzahlen geben Sie entweder eine Zahl oder das Wort `unendlich` ein.

(a) Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{1\})$

Solution: 0

(b) Wieviele nicht-leere Fasern hat g?

Solution: 11

(c) Wieviele Elemente hat das Bild von $i \circ g$?

Solution: 11

(d) Wieviele Elemente hat das Bild von $g \circ i$?

Solution: 11

(e) Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 5\}$ unter f?

Solution: 2

(f) Sei $h = g \circ i \circ f$. Wieviele Elemente hat die Faser $h^{-1}(\{3\})$

Solution: 2

(g) Wieviele nicht-leere Fasern hat f?

Solution: 3

(h) Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{2, 3\}$ unter f?

Solution: 3

(i) Wieviele Elemente hat das Urbild von $\{3, 4\}$ unter f?

Solution: 3

(j) Welche Kompositionen sind definiert? (Alle ankreuzen!)

i. $i \circ f$
ii. $f \circ i$
iii. $i \circ g$
iv. $g \circ i$
v. $f \circ g$
vi. $g \circ f$

Solution: A,C,D,F

48. Kreuzen Sie alle Eigenschaften der gegebenen Abbildung an.

(a) $f : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, x - y)$.

Solution:

(b) (Übung.) $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}, (x, y) \mapsto (x - y, x + y)$.

> **Solution:** injektiv

(c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x, x^3)$.

> **Solution:** injektiv

(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x^2, x^3)$.

> **Solution:** injektiv

(e) (Übung.) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - y$.

> **Solution:** surjektiv

(f) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 - 2y$.

> **Solution:** surjektiv

(g) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, (x, y) \mapsto x^2 + 2y$.

> **Solution:** surjektiv

(h) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto \frac{a}{b}$.

> **Solution:** surjektiv

49. Es seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ beliebige Abbildungen zwischen den Mengen A, B und C. Sind die folgenden Aussagen für alle solchen Abbildungen richtig?

(a) (Übung.) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

> **Solution:** Ja

(b) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

> **Solution:** Ja

(c) Sind f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

> **Solution:** Ja

(d) Sind f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Solution: Ja

(e) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist f surjektiv.

Solution: Nein

(f) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist g injektiv.

Solution: Nein

50. Bestimmen Sie die Anzahlen.

(a) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{10} \to \underline{2}$.

Solution: 1022

(b) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{5} \to \underline{5}$.

Solution: 120

(c) Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{5} \to \underline{5}$.

Solution: 120

(d) Anzahl der injektiven Abbildungen $\underline{4} \to \underline{5}$.

Solution: 120

(e) Anzahl der Abbildungen $\underline{4} \to \underline{6}$.

Solution: 1296

(f) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{11} \to \underline{2}$.

Solution: 2046

(g) Anzahl der injektiven Abbildungen $\underline{3} \to \underline{7}$.

Solution: 210

(h) Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{4} \to \underline{4}$.

Solution: 24

(i) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{4} \to \underline{4}$.

Solution: 24

(j) Anzahl der Abbildungen $\underline{5} \to \underline{5}$.

Solution: 3125

(k) Anzahl der injektiven Abbildungen $\underline{4} \to \underline{6}$.

Solution: 360

(l) Anzahl der Abbildungen $\underline{6} \to \underline{4}$.

Solution: 4096

(m) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{9} \to \underline{2}$.

Solution: 510

(n) Anzahl der bijektiven Abbildungen $\underline{6} \to \underline{6}$.

Solution: 720

(o) Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{6} \to \underline{6}$.

Solution: 720

51. Berechnen Sie das Signum der folgenden Permutationen aus S_{12}.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 11 & 8 & 5 & 12 & 3 & 6 & 1 & 7 & 9 & 10 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: +1

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 6 & 3 & 11 & 9 & 1 & 10 & 8 & 2 & 12 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: +1

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 10 & 11 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 & 3 & 12 & 6 \end{pmatrix}$

Solution: +1

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 7 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 8 & 6 & 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}$

Solution: -1

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 2 & 10 & 3 & 12 & 1 & 5 & 8 & 7 & 9 & 6 & 11 \end{pmatrix}$

Solution: -1

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 11 & 6 & 10 & 3 & 12 & 4 & 5 & 2 & 9 & 1 & 8 & 7 \end{pmatrix}$

Solution: -1

(g) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 2 & 10 & 6 & 11 & 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 12 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: -1

(h) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 9 & 10 & 7 & 5 & 11 & 1 & 8 & 12 & 6 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Solution: -1

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 6 & 11 & 10 & 8 & 9 & 1 & 7 & 12 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Solution: -1

52. Beweisen Sie kombinatorisch (ohne Induktion) die Vandermond'sche Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

Hinweis: Verallgemeinern Sie die Beweisidee von Satz III(2.2)(ii). Verwenden Sie die Summen- und Produktregel.

53. a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, \quad (a,b) \mapsto a+b$$

surjektiv ist und berechnen Sie eine rechtsseitige Umkehrabbildung.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad x \mapsto 3x+2$$

injektiv ist und berechnen Sie eine linksseitige Umkehrabbildung.

54. Beantworten Sie die folgenden Fragen bzw. ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen (korrekten) Weisen.

(a) Werden bei der Zykelzahl die 1-Zykeln mitgezählt?

Solution: Ja

(b) Die Binomialkoeffizienten zählen bestimmte ….

Solution: Kombinationen

(c) Die Stirling-Zahlen zweiter Art zählen bestimmte ….

Solution: Partitionen

(d) Die Stirling-Zahlen erster Art zählen bestimmte ….

Solution: Permutationen

(e) Bei $s_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ….

Solution: Zykeln

(f) Bei $S_{n,k}$ steht das k für eine Anzahl von ….

Solution: keins davon

55. Welche Art von Zählkoeffizient erfüllt die angegebene Rekursionsgleichung?

(a) $c_{n,k} = c_{n-1,k} + c_{n-1,k-1}$

Solution: Binomial

(b) $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-1)c_{n-1,k-1}$

Solution: keins davon

(c) $c_{n,k} = c_{n-1,k} + (n-k)c_{n-1,k-1}$

Solution: keins davon

(d) $c_{n,k} = c_{n-1,k} + kc_{n-1,k-1}$

Solution: keins davon

56. Geben Sie die Stirling-Zahlen ein. Hier steht $S_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen zweiter Art und $s_{n,k}$ für die Stirling-Zahlen erster Art.

(a) $S_{5,1}$

Solution: 1

(b) $s_{4,2}$

> **Solution:** 11

(c) $S_{6,5}$

> **Solution:** 15

(d) $s_{6,5}$

> **Solution:** 15

(e) $s_{5,1}$

> **Solution:** 24

(f) $S_{4,2}$

> **Solution:** 7

57. Kreuzen Sie alle Eigenschaften an, die die Relation R auf N erfüllt. Es steht (R) für reflexiv, (S) für symmetrisch, (A) für antisymmetrisch, (T) für transitiv.

 (a) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3), (3, 4), (4, 4), (5, 5)\}$.

 > **Solution:** A,R

 (b) Jede partielle Ordnung R auf N.

 > **Solution:** A,R,T

 (c) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$.

 > **Solution:** A,T

 (d) Jede Äquivalenzrelation R auf N.

 > **Solution:** R,S,T

 (e) $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und
 $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$.

 > **Solution:** S,T

58. Wir betrachten die Teilbarkeitsrelation $|$ auf $\mathbb{Z}$. Kreuzen Sie alle maximalen Elemente der Menge an.

(a) $\{2, 3, 4, 6, 12\}$

Solution: 12

(b) $\{2, 3, 5\}$

Solution: 2,3,5

(c) $\{2, 3, 4, 6\}$

Solution: 4,6

(d) $\{2, 4, 6\}$

Solution: 4,6

59. Ist R eine Äquivalenzrelation auf N? Falls ja geben Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen ein, falls nein schreiben Sie -.

(a) $N = \{x, y, z\}$ und
$R = \{(x, x), (x, y), (x, z), (y, y), (y, x), (y, z), (z, x), (z, y), (z, z)\}$.

Solution: 1

(b) $N = \{x, y, z\}$ und $R = \{(x, x), (x, y), (y, y), (y, x), (z, z)\}$.

Solution: 2

60. Ergänzen Sie die Lücke mit allen Wörtern, so dass sich eine korrekte Aussage ergibt.

(a) Zur Bestimmung eines kürzesten Kantenzuges zwischen zwei Knoten kann die ... benutzt werden.

Solution: Breitensuche

(b) Zur Bestimmung der Zusammenhangskomponente eines Knotens kann die ... benutzt werden.

Solution: Breitensuche,Tiefensuche

(c) Jeder ungerichtete Graph ohne Schlingen kann als eine Relation auf der Knotenmenge mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

Solution: antireflexiv,symmetrisch

(d) Jede Relation auf der endlichen Menge V kann als Graph mit folgenden Eigenschaften aufgefasst werden: ...

Solution: gerichtet,mit Schlingen

61. Ergänzen Sie die Lücke mit allen Wörtern, so dass sich eine korrekte Aussage ergibt.

(a) Ist $(1, 9, 8, 6, 9, 2)$ ein Kantenzug? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

Solution: -

(b) Ist $(2, 3, 4, 2, 1, 9, 2)$ ein Kreis? Wenn ja, geben Sie die Länge ein, sonst '-' (Minus).

Solution: -

(c) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat G?

Solution: 1

(d) Wieviele Elemente hat E?

Solution: 14

(e) Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{6, 8\}$ inzident?

Solution: 2

(f) Zu wievielen Knoten ist die Kante $\{4, 6\}$ inzident?

Solution: 2

(g) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $1, 2, 3, 5, 6, 7, 9$ induzierte Teilgraph?

Solution: 2

(h) Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 1?

Solution: 28

(i) Was ist die Summe der Grade aller Knoten?

Solution: 28

(j) Wieviele Nachbarn hat der Knoten 1?

Solution: 3

(k) Wieviele kürzeste Kantenzüge von 7 nach 2 gibt es?

Solution: 3

(l) Wieviele Knoten sind adjazent zu 9?

Solution: 3

(m) Was ist die Distanz von 5 zu 9?

Solution: 3

(n) Was ist der Grad des Knotens 6?

Solution: 4

(o) Wieviele Kanten hat der auf $\{1, 2, 4, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 4

(p) Wieviele Kanten hat der auf $\{6, 7, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 4

(q) Was ist der Grad des Knotens 4?

Solution: 4

(r) Wieviele Einträge der Adjazenzmatrix von G sind gleich 0?

Solution: 53

(s) Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{6, 8\}$ inzident?

Solution: 6,7

(t) Zu wievielen Kanten ist die Kante $\{4, 6\}$ inzident?

Solution: 6,7

(u) Wieviele Spalten hat die Adjazenzmatrix von G?

Solution: 9

(v) Wieviele Zeilen hat die Adjazenzmatrix von G?

Solution: 9

(w) Welche Länge hat die Adjazenzliste von G?

Solution: 9

(x) Wieviele Elemente hat V?

Solution: 9

62. Es sei $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 9 & 4 & 1 & 2 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in S_9$.

Tragen Sie in das Antwortfeld die Ziffer ein, die man für i einsetzen muss, damit die angegebene Gleichung von Abbildungen gilt.

(a) $(2\ i)\ \circ (3\ 7)\ \circ (2\ 5)\ \circ (1\ 6)\ \circ (1\ 7)\ \circ (3\ 9)\ \circ (8\ 9) = \sigma$

Solution: 1

(b) $(1\ i)\ \circ (1\ 3)\ \circ (2\ 5)\ \circ (9\ 8)\ \circ (8\ 7)\ \circ (7\ 6)\ \circ (3\ 6) = \sigma$

Solution: 2

(c) $(4\ 5)\ \circ (1\ 5)\ \circ (9\ 8)\ \circ (3\ 8)\ \circ (i\ 2)\ \circ (8\ 7)\ \circ (2\ 4)\ \circ (7\ 4)\ \circ (1\ 4) = \sigma$

Solution: 6

(d) $(9\ 8)\ \circ (2\ 5)\ \circ (3\ 8)\ \circ (1\ 8)\ \circ (8\ 7)\ \circ (5\ 7)\ \circ (6\ i) = \sigma$

Solution: 7

(e) $(1\ 3)\ \circ (9\ 3)\ \circ (9\ 8)\ \circ (5\ 8)\ \circ (8\ 2)\ \circ (6\ 8)\ \circ (7\ i) = \sigma$

Solution: 8

(f) (Übung.) $(1\ 2)\ \circ (2\ 5)\ \circ (3\ 9)\ \circ (i\ 6)\ \circ (7\ 8)\ \circ (9\ 6)\ \circ (1\ 6) = \sigma$

Solution: 8

63. Berechnen Sie die gefragten Anzahlen.

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 5 Studenten auf 4 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen?

Solution: 10

(b) Wieviele Permutationen auf 5 Elementen haben genau 4 Zykel?

Solution: 10

(c) Es teilen sich 4 Philosophen in 2 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es??

Solution: 11

(d) Wieviele Permutationen auf 6 Elementen haben genau einen Zykel?

Solution: 120

(e) Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von $\underline{6}$ nach $\{w, x, y, z\}$?

Solution: 1560

(f) Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von $\underline{6}$ nach $\{u, w, x, y, z\}$?

Solution: 1800

(g) Es teilen sich 6 Philosophen in 3 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es?

Solution: 225

(h) Wieviele Permutationen auf 5 Elementen haben genau einen Zykel?

Solution: 24

(i) Wieviele surjektive Abbildungen gibt es von $\underline{5}$ nach $\{w, x, y, z\}$?

Solution: 240

(j) Es teilen sich 5 Philosophen in 2 Diskussionsgruppen auf, und jede Gruppe setzt sich jeweils im Kreis hin (Gruppen mit nur einer Person sind möglich). Wieviele mögliche Sitzordnungen gibt es??

Solution: 50

(k) Wieviele Permutationen auf 4 Elementen haben genau 3 Zykel?

Solution: 6

(l) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 4 Studenten auf 2 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen?

Solution: 7

(m) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 6 Studenten auf 3 (nicht-leere) Tutoriengruppen aufzuteilen?

Solution: 90

64. Entscheiden Sie, ob die angegebenen Gleichungen/Aussagen richtig sind.

(a) Gilt $S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + kS_{n-1,k-1} + k^2 S_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: ja

(b) Gilt $s_{n+1,k} = s_{n,k-1} + ns_{n-1,k-1} + n(n-1)s_{n-1,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: ja

(c) Es gibt mehr Permutationen von <u>100</u> mit genau 97 disjunkten Zykeln als es Partitionen von <u>100</u> in genau 97 Teile gibt.

Solution: ja

(d) Gilt $S_{n+1,k} = S_{n-1,k-2} + kS_{n-1,k-1} + kS_{n,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: nein

(e) Gilt $s_{n+1,k} = s_{n-1,k-2} + ns_{n-1,k-1} + ns_{n,k}$ für $2 \leq k \leq n-1$?

Solution: nein

(f) Es gibt mehr Partitionen von <u>100</u> in genau 97 Teile als es Permutationen von <u>100</u> mit genau 97 disjunkten Zykeln gibt.

Solution: nein

65. Welche der folgenden Aussagen über Relationen sind wahr?

(a) Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 64 verschiedene symmetrische Relationen.

Solution: Ja

(b) Es gibt genau 1024 verschiedene Graphen mit Knotenmenge $\underline{5}$.

Solution: Ja

(c) Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 512 verschiedene Relationen.

Solution: Ja

(d) Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 5 verschiedene Äquivalenzrelationen.

Solution: Ja

(e) Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 2^{12} verschiedene reflexive Relationen.

Solution: Ja

(f) Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 64 verschiedene symmetrische Relationen.

Solution: Nein

(g) Auf einer Menge mit vier Elementen gibt es genau 12^2 verschiedene reflexive Relationen.

Solution: Nein

(h) Es gibt genau 32768 verschiedene Graphen mit Knotenmenge $\underline{5}$.

Solution: Nein

(i) Auf einer dreielementigen Menge gibt es genau 81 verschiedene Relationen.

Solution: Nein

(j) Auf einer Menge mit drei Elementen gibt es genau 3 verschiedene Äquivalenzrelationen.

Solution: Nein

66. Diese Fragen beziehen sich auf die untenstehende schriftliche Aufgabe. Bestimmen Sie zuerst die Formeln aus der schriftlichen Aufgabe und berechnen Sie dann damit die geforderten Anzahlen.

(a) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{a, b, c, d, e\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

(b) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{t, u, v\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

(c) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\{x, y, w, z\}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1

(d) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{10}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 1024

(e) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{4}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 11664

(f) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 120

(g) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{6}$, die reflexiv und antisymmetrisch sind.

Solution: 14348907

(h) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 1889568

(i) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{11}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 2048

(j) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{4}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 24

(k) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{12}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind.

Solution: 4096

(l) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{5}$, die reflexiv und antisymmetrisch sind.

Solution: 59049

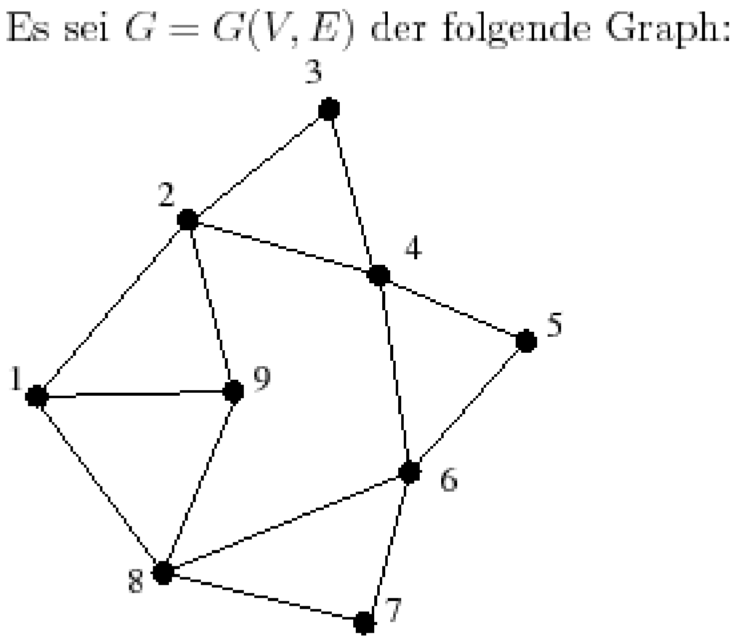
(m) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{6}$, die eine Totalordnung sind.

Solution: 720

(n) Die Anzahl verschiedener Relationen auf $\underline{6}$, die antisymmetrisch sind.

Solution: 918330048

67. Sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph:



(a) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 3, 5, 8, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 3

(b) Wieviele Zusammenhangskomponenten hat der auf $\{1, 3, 5, 6, 7, 9\}$ induzierte Teilgraph?

Solution: 3

(c) Wieviele Pfade der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?

Solution: 3

(d) Wieviele Kantenzüge der Länge 3 gibt es von 1 nach 4?

Solution: 3

(e) Was ist die größte Länge eines Kreises in G?

Solution: 9

68. a) (Übung.) Bestimmen Sie eine Formel für die Anzahl der surjektiven Abbildungen $\underline{n} \to \underline{k}$.

    b) Zeigen Sie: $\sum_{k=0}^{m} S_{n,k} \cdot \frac{m!}{(m-k)!} = m^n$.
    Tip: m^n ist die Anzahl aller Abbildungen $\underline{n} \to \underline{m}$.

69. Bestimmen Sie eine Formel für die Anzahl der verschiedenen

    Übung:

    1. Relationen auf $\underline{n}$,
    2. reflexiven Relationen auf $\underline{n}$,
    3. antireflexiven Relationen auf $\underline{n}$,
    4. symmetrischen Relationen auf $\underline{n}$,
    5. Relationen auf $\underline{n}$, die reflexiv und symmetrisch sind,
    6. Graphen mit Knotenmenge $\underline{n}$,
    7. Äquivalenzrelationen auf $\underline{n}$,

    Schriftlich:

    8. antisymmetrischen Relationen auf $\underline{n}$,
    9. Relationen auf $\underline{n}$, die reflexiv und antisymmetrisch sind,
    10. Totalordnungen auf $\underline{n}$,
    11. Relationen auf $\underline{n}$, die symmetrisch und antisymmetrisch sind,
    12. Relationen auf $\underline{n}$, die reflexiv, symmetrisch und antisymmetrisch sind.

70. Ergänzen Sie die Lücke auf die richtige Weise. (Falls mehrere Antworten richtig sind, ist die beste Schranke auszuwählen.)

(a) Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, der eine Eulertour besitzt, enthält mindestens ... Kanten. *Hinweis: das Wort zusammenhängend war in der Aufgabenstellung zunächst vergessen worden, deshalb keine Wertung dieser Aufgabe.*

i. n
ii. $n-1$
iii. $\binom{n}{2}$
iv. $\binom{n-1}{2}$

Solution: A

(b) Ein Graph mit n Knoten, der einen Hamiltonkreis besitzt, enthält mindestens ... Kanten.

i. n
ii. $n-1$
iii. $\binom{n}{2}$
iv. $\binom{n-1}{2}$

Solution: A

(c) Ein zusammenhängender Graph mit n Knoten enthält mindestens ... Kanten.

i. n
ii. $n-1$
iii. $\binom{n}{2}$
iv. $\binom{n-1}{2}$

Solution: B

(d) Ein Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten.

i. n
ii. $n-1$
iii. $\binom{n}{2}$
iv. $\binom{n-1}{2}$

Solution: C

(e) Ein unzusammenhängender Graph mit n Knoten enthält maximal ... Kanten.

i. n
ii. $n-1$
iii. $\binom{n}{2}$
iv. $\binom{n-1}{2}$

Solution: D

71. Stimmt die Aussage?

   (a) In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad gerade.

   Solution: Ja

   (b) Jeder Kreis ist eine Tour.

   Solution: Ja

   (c) Es gibt Graphen, die eine Eulertour aber keinen Hamiltonkreis besitzen.

   Solution: Ja

   (d) Jeder Knoten vom Grad 1 ist zu einer Brücke inzident.

   Solution: Ja

   (e) Jeder Teilgraph eines Graphen G hat gleich viele oder mehr Komponenten als G.

   Solution: Nein

   (f) Jede Brücke ist zu einem Knoten vom Grad 1 inzident.

   Solution: Nein

   (g) In jedem Graph ist die Anzahl der Knoten mit geradem Grad ungerade.

   Solution: Nein

   (h) Jeder Hamiltonkreis ist eine Eulertour.

   Solution: Nein

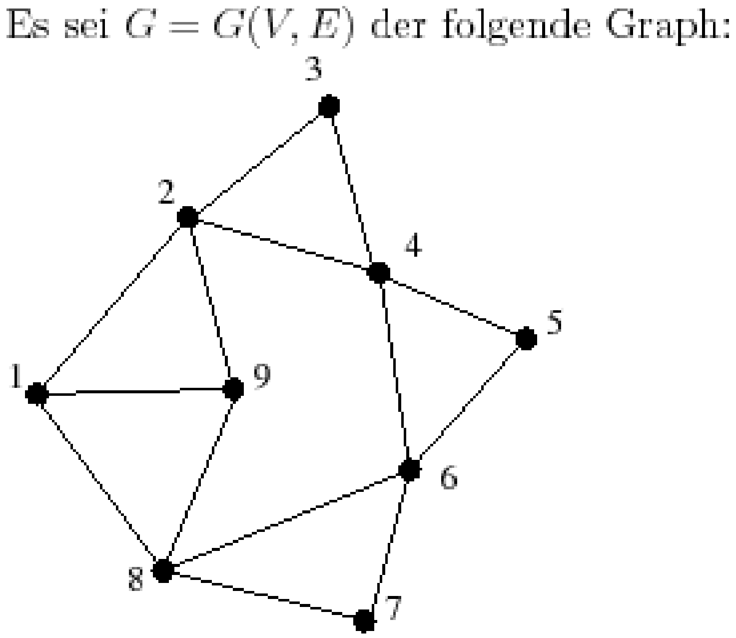
   (i) Jeder Teilgraph eines Graphen G hat weniger oder gleich viele Komponenten wie G.

   Solution: Nein

   (j) Jede Eulertour ist ein Kreis.

Solution: Nein

72. Es sei $G = G(V, E)$ der folgende Graph:



(a) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 46?

Solution: 0

(b) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 24?

Solution: 0

(c) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 18?

Solution: 0

(d) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 12?

Solution: 0

(e) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 68?

Solution: 0

(f) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 67?

Solution: 1

(g) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 45?

Solution: 1

(h) Wieviele Brücken entstehen durch Entfernung der Kante 23?

Solution: 1

73. Es seien $G = (V, E)$ ein Graph und $e = uv \in E$. Ist die Aussage äquivalent dazu, dass $e = uv$ keine Brücke ist?

(a) Es existiert ein Pfad von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

(b) Es existiert ein Kantenzug von u nach v, der e nicht durchläuft.

Solution: Ja

(c) Es existiert ein Kreis, der u und v durchläuft.

Solution: Ja

(d) $(V, E \setminus e)$ hat weniger Komponenten als (V, E).

Solution: Nein

(e) $\deg u > 1$

Solution: Nein

74. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen für beliebige Graphen $G = (V, E)$ richtig sind.

(a) Wenn G zusammenhängend ist und einen Kreis enthält, dann gibt es eine Kante $e \in E$, so dass auch $(V, E \setminus \{e\})$ zusammenhängend ist.

Solution: Ja

(b) Wenn G ein Baum ist, dann ist jede Kante von G eine Brücke.

Solution: Ja

(c) Wenn $|V| = n$ und $|E| > (n-1)(n-2)/2$ ist, dann ist (V, E) zusammenhängend.

Solution: Ja

(d) Ist die Komponentenzahl von G gleich $|V| - |E|$, so ist G kreisfrei.

> **Solution:** Ja

(e) Ist G kreisfrei, so ist die Komponentenzahl von G gleich $|V| - |E|$.

> **Solution:** Ja

(f) Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| \geq |V| - 1$.

> **Solution:** Ja

(g) Wenn jede Kante von G eine Brücke ist, dann ist G ein Baum.

> **Solution:** Nein

(h) Wenn G zusammenhängend ist, dann gilt $|E| > |V| - 1$.

> **Solution:** Nein

(i) Die Komponentenzahl von G ist stets $\leq |V| - |E|$.

> **Solution:** Nein

(j) Die Komponentenzahl von G ist stets gleich $|V| - |E|$.

> **Solution:** Nein

75. Zeichnen und untersuchen Sie den Graphen $G = (\underline{n}, E)$ mit n und E wie jeweils angegeben.

(a) $n = 11, E = \{(1,2),(1,3),(2,4),(3,5),(3,6),(4,7),(5,8),(5,9),(6,10),(7,11)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

> **Solution:** 1

(b) $n = 9, E = \{(1,2),(1,3),(2,5),(3,4),(7,8),(8,9)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

> **Solution:** 3

(c) $n = 5, E = \{(1,2),(3,4)\}$. Wieviele Komponenten enthält dieser Wald?

> **Solution:** 3

(d) $n = 5, E = \{(1,2),(2,3),(3,4),(3,5),(4,5)\}$. Wieviele verschiedene Spannbäume enthält dieser Graph?

Solution: 3

(e) $n = 11, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,5\},\{3,6\},\{4,7\},\{5,8\},\{5,9\},\{6,10\},\{7,11\}\}$.
Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 4

(f) $n = 5, E = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.
Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 5

(g) $n = 9, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,5\},\{3,4\},\{7,8\},\{8,9\}\}$. Wieviele Blätter gibt es?

Solution: 5

(h) $n = 13, E = \{\{1,2\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{3,9\},\{3,12\},\{4,12\},\{5,13\},\{7,11\},\{8,9\},\{9,10\},\{10,11\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Baum

(i) $n = 13, E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{2,6\},\{2,7\},\{3,9\},\{4,12\},\{5,13\},\{7,11\},\{8,9\},\{9,10\}\}$. Ist G ein Wald, Baum oder keins davon?

Solution: Wald

76. Es sei $G = (V, E)$ ein Baum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind. Definition: Wir nennen einen Pfad $(v_0, \ldots, v_l)$ *maximal*, wenn er nicht verlängerbar ist, d.h. wenn kein Pfad der Form $(w, v_0, \ldots, v_l)$ oder $(v_0, \ldots, v_l, w)$ in dem entsprechenden Graphen existiert.

(a) Ist $(v_0, \ldots, v_l)$ ein Pfad in G mit $\deg v_0 = \deg v_l = 1$, so ist er maximal.

Solution: Ja

(b) Ist $(v_0, \ldots, v_l)$ ein Pfad in G mit Blättern v_0 und v_l, so ist er maximal.

Solution: Ja

(c) Jeder Teilgraph von G ist ein Wald.

Solution: Ja

(d) Für jede Teilmenge $E' \subseteq E$ ist (V, E') ein Wald.

Solution: Ja

(e) Ist ein Pfad $(v_0, \dots, v_l)$ in G maximal, so sind v_0 und v_l Blätter.

Solution: Ja

(f) Ist ein Pfad $(v_0, \dots, v_l)$ in G maximal, so gilt $\deg v_0 = \deg v_l = 1$.

Solution: Ja

(g) Sei $V' \subseteq V$ eine Teilmenge von Knoten, so dass $V \setminus V'$ nur aus Blättern besteht. Dann ist der auf V' induzierte Teilgraph auch ein Baum.

Solution: Ja

77. Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten, m Kanten und r Zusammenhangskomponenten. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig sind.

(a) Fügt man m' neue Kanten zu G hinzu, so hat der entstandene Graph $\geq r - m'$ Komponenten.

Solution: Ja

(b) Fügt man m' neue Kanten zu G hinzu und der so entstandene Graph G' ist kreisfrei, so hat G' genau $r - m'$ Komponenten.

Solution: Ja

(c) Wenn G ein Baum ist, dann hat $(V, E \setminus \{e\})$ für jedes $e \in E$ zwei Komponenten hat.

Solution: Ja

(d) Wenn G ein Baum ist, dann hat der durch (V, E) auf $V \setminus \{v\}$ induzierte Graph für jedes $v \in V$ ein oder zwei Komponenten.

Solution: Nein

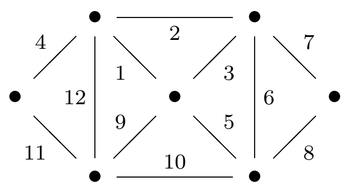
(e) Entfernt man m' Kanten aus G, so hat der entstandene Graph $\leq r - m'$ Komponenten.

Solution: Nein

(f) Ist G kreisfrei und man entfernt m' Kanten aus G, so hat der entstandene Graph genau $r - m'$ Komponenten.

Solution: Nein

78. Bestimmen Sie alle minimalen Spannbäume des folgenden gewichteten Graphen (die Kanten sind mit ihren Gewichten versehen):



(a) Wieviele verschiedene minimale Spannbäume gibt es?

Solution: 1

(b) Geben Sie einen minimalen Spannbaum an. Tragen Sie dazu die Längen der Kanten des Spannbaumes in aufsteigender Reihenfolge und direkt hintereinander (ohne Leerzeichen dazwischen) ein. Der Spannbaum mit den Kanten vom Gewicht 4,2,7,8,10,9 (er ist nicht minimal!) wird beispielsweise als die Zeichenkette '2478910' eingegeben.

Solution: 124579

(c) Welches Gewicht hat jeder minimale Spannbaum?

Solution: 28

(d) Ist hierfür ein Greedy-Algorithmus geeignet?

Solution: Ja

(e) Welchen Algorithmus kann man hier benutzen?

Solution: Kruskal

79. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, $n \geq 3$, in dem

$$\deg u + \deg v \geq n$$

für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $uv \notin E$.

a) Geben Sie einen solchen Graphen mit 6 Knoten und 9 Kanten an.

b) Was ist das kleinste ungerade n, für das es einen solchen Graphen gibt, der genau $\frac{n^2-1}{4}$ viele Kanten enthält? Geben Sie ein Beispiel an.

c) Man zeige, dass in einem solchen Graphen je zwei beliebige Knoten $v, w \in V$ eine Distanz ≥ 2 haben.

80. Es sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph mit n Knoten, $n \geq 3$, in dem

$$\deg u + \deg v \geq n$$

für alle $u, v \in V$ mit $u \neq v$ und $uv \notin E$.

a) Geben Sie einen solchen Graphen mit 6 Knoten und 9 Kanten an.

b) Was ist das kleinste ungerade n, für das es einen solchen Graphen gibt, der genau $\frac{n^2-1}{4}$ viele Kanten enthält? Geben Sie ein Beispiel an.

c) Man zeige, dass in einem solchen Graphen je zwei beliebige Knoten $v, w \in V$ eine Distanz ≥ 2 haben.

(a) Jede Gruppe besitzt mindestens ein neutrales Element.

Solution: Ja

(b) $\pi \in S_n \pi(1) = 1$ ist eine Untergruppe von $(S_n, \circ)$.

Solution: Ja

(c) Jede Untergruppe ist selbst eine Gruppe.

Solution: Ja

(d) In einer Gruppe besitzt jedes Element genau ein Inverses.

Solution: Ja

(e) Die leere Menge bildet eine Gruppe.

Solution: Nein

(f) S_n ist eine abelsche Gruppe.

Solution: Nein

81. Kreuzen Sie alle Gruppenaxiome an, die in der angegebenen Struktur gelten.

(a) $(f : \underline{n} \to \underline{n} f \text{ surjektiv}, \circ)$

Solution: G1,G2,G3

(b) $(f : \underline{n} \to \underline{n} f \text{ injektiv}, \circ)$

Solution: G1,G2,G3

(c) $(\mathbb{N}, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

(d) (w,f, $\wedge$)

Solution: G1,G2,G4

(e) $(\mathbb{N}_0, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

(f) (w,f, $\vee$)

Solution: G1,G2,G4

(g) $(\mathbb{Z} \setminus 0, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

(h) $(\mathbb{N}_0, +)$

Solution: G1,G2,G4

(i) $(\mathbb{R}, \cdot)$

Solution: G1,G2,G4

(j) $(\mathbb{N}, +)$

Solution: G1,G4

82. Kreuzen Sie alle Gruppenaxiome an, die in der angegebenen Struktur gelten.

(a) Jeder Körper ist ein nullteilerfreier Ring.

Solution: Ja

(b) Jeder Körper ist ein kommutativer Ring.

Solution: Ja

(c) In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a+x=b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

Solution: Ja

(d) In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $+$ ein Inverses.

Solution: Ja

(e) In einem Ring $(R, +, \cdot)$ hat jede Gleichung $a \cdot x = b$ (mit a, b gegeben) eine Lösung.

Solution: Nein

(f) Jeder Ring ist ein Körper.

Solution: Nein

(g) In einem Ring $(R, +, \cdot)$ besitzt jedes Element bzgl. $\cdot$ ein Inverses.

Solution: Nein

83. Gelten die folgenden Rechengesetze in jedem kommutativen Ring?

(a) $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = a \cdot c \cdot e + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

Solution: Ja

(b) $ab - ba = 0$

Solution: Ja

(c) $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c)$

Solution: Ja

(d) $a \cdot b + c \cdot a = a \cdot (b + c) \cdot a$

Solution: Nein

(e) $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b \cdot c$

Solution: Nein

(f) $c \cdot ((a + d) \cdot e + b) = c \cdot a + c \cdot d \cdot e + b + c$

Solution: Nein

84. Ergänzen Sie die Lücke auf alle möglichen Weisen, auf die sich eine korrekte Aussage ergibt.

(a) Es sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring. Für jedes $a \in R$ gilt: a Einheit $\ldots$ $ax = b$ ist für jedes $b \in R$ eindeutig lösbar.

i. $\Leftarrow$
ii. $\Rightarrow$

Solution: A,B

(b) Die Teilbarkeitsrelation in jedem kommutativen Ring ist ...

Solution: reflexiv,transitiv

85. Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Gelten die folgenden Aussagen?

(a) Sind $a, b \in \mathbb{Z}\backslash 0$, dann bricht der Eukldische Algorithmus (durchgeführt für a, b) ab.

Solution: Ja

(b) 12 und 13 sind teilerfremd.

Solution: Ja

(c) $\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei.

Solution: Ja

(d) Zur Berechnung von $ggT(a, b)$ ist die Primfaktorzerlegung von a und b nötig.

Solution: Nein

(e) Jedes von 0 verschiedene Element aus $\mathbb{Z}$ ist Einheit.

Solution: Nein

(f) Der ggT ist für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ definiert, eindeutig und > 0.

Solution: Nein

(g) 12 und 14 sind teilerfremd.

Solution: Nein

(h) Für alle $a, b \in \mathbb{Z} \setminus 0$, so gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{N}$ so, dass $ggT(a, b) = \lambda a + \mu b$.

Solution: Nein

86. Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Gelten die folgenden Aussagen?

(a) Die Relation kongruent modulo n ist eine Äquivalenzrelation.

Solution: Ja

(b) $4321 \equiv 1 \pmod 3$

Solution: Ja

(c) Jedes $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ hat genau n Elemente.

Solution: Nein

(d) $\mathbb{Z}_n$ hat genau $n+1$ Elemente.

Solution: Nein

(e) $37 \equiv -1 \pmod 6$

Solution: Nein

(f) $a \equiv b \pmod n$ genau dann, wenn a bei Division durch n den Rest b lässt.

Solution: Nein

87. Wir betrachten den Ring $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$. Gelten die folgenden Aussagen?

(a) $(\overline{16})^{-1} = \overline{16}$ in $\mathbb{Z}_{51}$.

Solution: Ja

(b) $\mathbb{Z}_{10}$ hat genau 4 Einheiten.

Solution: Ja

(c) $\mathbb{Z}_1$ ist ein kommutativer Ring.

Solution: Ja

(d) (w,f, $\oplus, \wedge$) ist ein Körper.

Solution: Ja

(e) $\overline{a} \in \mathbb{Z}_n$ ist genau dann eine Einheit, wenn a und n teilerfremd sind.

Solution: Ja

(f) $\overline{2}^{1000} = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_7$.

Solution: Ja

(g) Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ ist kommutativ und nullteilerfrei.

Solution: Nein

(h) $\mathbb{Z}_8$ ist ein Körper.

Solution: Nein

(i) Die Gleichung $\overline{a} \cdot x = \overline{b}$ in $\mathbb{Z}_n$ (mit $\overline{a}, \overline{b}$ gegeben) ist genau dann lösbar, wenn $n | ggT(a, b)$.

Solution: Nein

88. Gelten die folgenden Aussagen?

(a) (B, xor) ist eine Gruppe, wobei $B = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte ist.

Solution: Ja

(b) Die surjektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition.

Solution: Nein

(c) Die ungeraden ganzen Zahlen bilden bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring.

Solution: Nein

(d) Die geraden ganzen Zahlen bilden bzgl. der üblichen Addition und Multiplikation einen Ring.

Solution: Nein

(e) $(B, \vee)$ ist eine Gruppe, wobei $B = \{w, f\}$ die Menge der Wahrheitswerte ist.

Solution: Nein

(f) Die bijektiven Abbildungen einer fünfelementigen Menge in sich selbst bilden bzgl. der Komposition eine abelsche Gruppe.

Solution: Nein

(g) Die injektiven Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition.

Solution: Nein

89. Ist U eine Untergruppe von G?

(a) G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cap U_2$.

Solution: Ja

(b) $G = (S_n, \circ), U = \pi \in S_n sign \pi = 1$.

Solution: Ja

(c) $(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \mid \ x \in G\}$.

Solution: Ja

(d) $(G, \cdot)$ eine beliebige abelsche Gruppe, $U = \{x \cdot x \cdot x \mid \ x \in G\}$.

Solution: Ja

(e) $G = (\mathbb{Z}, +), U =$Menge der geraden ganzen Zahlen.

Solution: Ja

(f) $G = (\mathbb{Z}, +), U =$Menge der ungeraden ganzen Zahlen.

Solution: Nein

(g) G eine beliebige Gruppe, U_1 und U_2 beliebige Untergruppen von G und $U = U_1 \cup U_2$.

Solution: Nein

(h) $G = (S_n, \circ), U = \pi \in S_n sign \pi = -1$.

Solution: Nein

90. Berechnen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie ferner Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot a + \mu \cdot b = d$. Damit die Antwort eindeutig wird, sind λ, μ so zu finden, dass $0 \leq \lambda < \frac{b}{d}$ ist. Geben Sie dann die geforderten Werte ein.

(a) μ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

Solution: -160402

(b) μ für $a = 247$ und $b = 323$.

Solution: -3

(c) μ für $a = 987$ und $b = 610$.

Solution: -377

(d) μ für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.

Solution: -46741

(e) μ für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

Solution: -5003

(f) d für $a = 987$ und $b = 610$.

Solution: 1

(g) d für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

Solution: 123

(h) d für $a = 247$ und $b = 323$.

Solution: 19

(i) λ für $a = 987$ und $b = 610$.

Solution: 233

(j) d für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

Solution: 256

(k) d für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.

Solution: 300

(l) λ für $a = 247$ und $b = 323$.

Solution: 4

(m) λ für $a = 2561792$ und $b = 2562304$.

Solution: 5004

(n) λ für $a = 75789033$ und $b = 309264066$.

Solution: 654535

(o) λ für $a = 65432100$ und $b = 12345600$.

Solution: 8819

91. Beantworten Sie die Fragen. Falls nach einer Restklasse gefragt ist, so ist jeweils der kleinste nicht-negative Repräsentant dieser Klasse einzugeben (er ist eindeutig). Geben Sie '-' ein, falls es keine Restklasse so wie gesucht gibt (z.B. falls keine Lösung oder kein Inverses existiert).

(a) Sei $n = 65432100$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{12345600} \cdot x = \overline{30}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: -

(b) Sei $n = 323$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{247} \cdot x = \overline{38}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 110,127,144,161,178,195,212,229,246,25,263,280,297,314,42,59,76,8,93

(c) Sei $n = 247$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{323} \cdot x = \overline{38}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 111,124,137,150,163,176,189,20,202,215,228,241,33,46,59,7,72,85,98

(d) Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-72}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 19

(e) Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-18}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 2

(f) Sei $n = 987$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{610} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 233

(g) Sei $n = 99$. Wie lautet das Inverse von $\overline{17}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 35

(h) Sei $n = 37$. Wie lautet das Inverse von $\overline{-75}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 36

(i) Sei $n = 610$. Wie lautet eine Lösung der Gleichung $\overline{987} \cdot x = \overline{2}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 466

(j) Sei $n = 99$. Wie lautet das Inverse von $\overline{23}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 56

(k) Sei $n = 99$. Wie lautet das Inverse von $\overline{19}$ in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: 73

(l) Sei $n = 91$. Ist $\overline{90}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Ja

(m) Sei $n = 91$. Ist $\overline{13}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Nein

(n) Sei $n = 12345$. Ist $\overline{9}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Nein

(o) Sei $n = 234567$. Ist $\overline{15}$ invertierbar in $\mathbb{Z}_n$?

Solution: Nein

92. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) In jedem Ring R gilt:

1. $-a = (-1) \cdot a$,
2. $a = (-1) \cdot (-a)$,
3. $a \in R^* \Rightarrow (a^{-1})^{-1} = a$,

b) Jeder Ring mit $1 = 0$ ist der triviale Ring.

c) Jeder Körper ist nullteilerfrei.

d) In jedem kommutativen, nullteilerfreien Ring gilt die Kürzungsregel: $a \cdot b = a' \cdot b \Rightarrow a = a'$.

e) In jedem kommutativen, nullteilerfreien Ring gilt: $a|b$ und $b|a \Rightarrow b = wa$ für eine Einheit w.

93. a) In der Definition $ggT(a, b) := \max d \in \mathbb{N}d|a, d|b$ ist das Maximum der Menge $d \in \mathbb{N}d|a \wedge d|b$ bzgl. der Ordnung $\leq$ gemeint. Besitzt diese Menge auch ein Maximum bzgl. der partiellen Ordnung $|$?

b) Es seien $a, b \in \mathbb{N}$. Die Koeffizienten λ, μ in der Darstellung $ggT(a, b) = \lambda a + \mu b$ sind nicht eindeutig. Geben Sie ein Beispiel an. Zeigen Sie weiter, dass λ, μ unter der Zusatzbedingung $|\lambda| < \frac{b}{d}$ und $|\mu| < \frac{a}{d}$ mit $\lambda \leq 0$ und $\mu \geq 0$ eindeutig werden.
Hinweis: Die Aufgabenstellung wurde dahingehend korrigiert, dass die Vorzeichen von λ und μ festgelegt sind. Verwenden Sie c).

c) Zeigen Sie, dass für teilerfremde $a, b \in \mathbb{Z}$ stets gilt: $a|bc \Rightarrow a|c$.
Hinweis: a, b teilerfremd bedeutet $ggT(a, b) = 1$. Man rechne in $\mathbb{Z}_a$.

94. Wir rechnen in $\mathbb{Z}_9$.
(a) Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{4}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 3

(b) Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{7}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 3

(c) Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{5}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 6

(d) Wie lautet das kleinste $k \in \mathbb{N}$ für das $\overline{2}^k = \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_9$ gilt?

Solution: 6

(e) Für welches $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt $4^{24242} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

(f) Für welches $a \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ gilt $7^{12121} \equiv a \pmod 9$?

Solution: 7

95. Berechnen Sie jeweils mit dem Euklidischen Algorithmus für Polynome den größten, gemeinsamen Teiler der beiden gegebenen Polynome. Der ggT zweier Polynome ist, wie in der Vorlesung definiert, stets ein normiertes Polynom. Geben Sie als Antwort nur die Koeffizienten des Polynoms in absteigender Reihenfolge und durch Komma getrennt ein. Beispiel: für $X^4 + 2X^3 - X^2 + 3$ ist '1,2,-1,0,3' einzugeben. Hinweis: alle Koeffizienten in den Lösungen sind ganzzahlig.

(a) Wie lautet der ggT von $X^5 - X^4 + X^3 - X - 2$ und $2X^4 - 3X^3 + 5X^2 - 2X$?

Solution: 1,-1,2

(b) Wie lautet der ggT von $2X^3 - X^2 - 2X + 1$ und $X^4 + X^3 - X - 1$?

Solution: 1,0,-1

(c) Wie lautet der ggT von $X^4 + 8X^3 + 6X^2 - 6X + 7$ und $X^3 + 7X^2$?

Solution: 1,7