Aufgabenblatt (Gesamtpunktzahl: 50) 06.02.2010 (1. Termin)

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ________________ **Matrikelnummer:** ________________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 3 & 5 & 8 & 7 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(2,5)(4,6) \circ \sigma \circ (3,5)(7,8) = \pi$ gilt. (3 P.)
Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi = \boxed{(1,4)(2,6,5,3)(7,8)}$ $\quad \mathrm{sgn}(\pi) = \boxed{-1}$ $\quad \sigma = \boxed{(1,6,2,4)}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(784, 602)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 784 + \mu \cdot 602 = d$. (3 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{784}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{602} = \overline{308}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{30}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

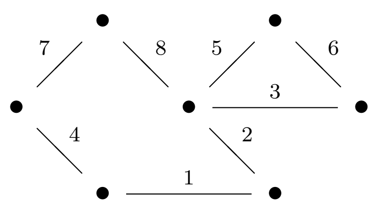
$d = \boxed{14}$ $\quad \lambda = \boxed{10}$ $\quad \mu = \boxed{-13}$ $\quad x = \boxed{\overline{498}}$

$x \in R^*$	1	7	11	13	17	19	23	29
x^{-1}	1	13	11	7	23	19	17	29

alle x : $[498, 554, 610, 666, 722, 778, 50, 106, 162, 218, 274, 330, 386, 442]$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachtet wird folgender Graph mit nummerierten Kanten:



a) Vervollständigen Sie $4, 7, \ldots$ zu einer Eulertour. (2 P.)

b) Auf wieviele Weisen ist dies möglich? (1 P.)

c) Wieviele Brücken enthält der Graph, wenn man die Kanten 7 und 8 entfernt? (2 P.)

d) Fassen Sie die Nummern als Gewichte auf und bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum. Tragen Sie unten die Kanten des Spannbaums in aufsteigender Nummerierung ein. (3 P.)

e) Wie lautet die maximale Komponentenzahl, die man durch Entfernen von zwei Kanten erreichen kann? (2 P.)

a)	4	7	8	3	6	5	2	1
d)	1	2	3	4	5	7	—	—

b) $\boxed{2}$ $\quad$ c) $\boxed{3}$ $\quad$ e) $\boxed{2}$

— bitte wenden —

☐

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben seien die Relationen

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$C = \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$D = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$E = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(2,5)\} \text{ auf } \underline{5},$$
$$F = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \text{ auf } \underline{5}.$$

a) Ordnen Sie die Relationen gemäß ihrer Eigenschaften so in die untenstehende Tabelle ein, dass jede Relation genau ein Mal vorkommt. Eine *Quasiordnung* ist eine Relation, die transitiv und reflexiv ist, aber nicht notwendigerweise antisymmetrisch. (5 P.)

b) Bestimen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation. (1 P.)

c) Bestimen Sie alle Elemente, die bzgl. der partiellen Ordnung ein Minimum sind. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

d) Bestimen Sie alle minimalen Elemente der Quasiordnung. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

	A–F	
Totalordnung	A	—
partielle Ordnung	E	Minimum sind: —
Quasiordnung	B	minimal sind: 4
Äquivalenzrelation	F	Anzahl Klassen: 3
ungerichteter Graph ohne Schleifen	C	—
keins davon	D	—

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele 6-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen keine zwei gleiche Ziffern hintereinander vorkommen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Typen von Perlenketten lassen sich bilden, wenn man 6 paarweise verschieden gefärbte Perlen auf eine Schnur aufzieht? (3 P.)

c) Wieviele Wörter der Länge 7 lassen sich aus dem Buchstabenvorrat `BBBBLAAA` bilden? (3 P.)

a) $\boxed{9^6}$ b) $\boxed{60}$ c) $\boxed{280}$

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Geben eine geschlossene Formel für $S_{n,2}$ an, wobei $S_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl zweiter Art bezeichnet. Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen.

$S_{n,2}$ ist die Anzahl der Partitionen von $\underline{n}$ mit zwei Teilen. Für jeden Teil der Partition gibt es $2^n - 2$ Möglichkeiten (jede Teilmenge von $\underline{n}$ ausser $\emptyset$ und $\underline{n}$). Durch einen Teil der Partition ist der andere aber schon eindeutig definiert. Da die Teile einer Partition nicht nummeriert sind, wurde auf diese Weise jede Permutation genau zwei Mal gezählt. Also: $S_{n,2} = 1/2(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$.

Aufgabenblatt (Gesamtpunktzahl: 50) 06.02.2010 (1. Termin)

Klausur zu “Diskrete Strukturen”, WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur

Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(2,7)(3,4) \circ \sigma \circ (1,8)(4,6) = \pi$ gilt. (3 P.)

Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi = \boxed{(1,8)(2,4,6,3)(5,7)}$ $\quad \mathrm{sgn}(\pi) = \boxed{-1}$ $\quad \sigma = \boxed{(2,3,7,5)}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(496, 152)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 496 + \mu \cdot 152 = d$. (3 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{496}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{152} = \overline{192}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{30}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

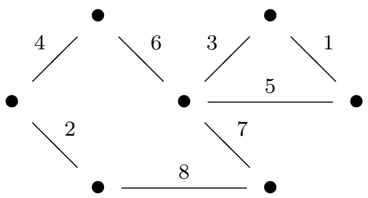
$d = \boxed{8}$ $\quad \lambda = \boxed{4}$ $\quad \mu = \boxed{-13}$ $\quad x = \boxed{\overline{184}}$

$x \in R^*$	1	7	11	13	17	19	23	29
x^{-1}	1	13	11	7	23	19	17	29

alle x : $[184, 246, 308, 370, 432, 494, 60, 122]$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachtet wird folgender Graph mit nummerierten Kanten:



a) Vervollständigen Sie $2, 4, \ldots$ zu einer Eulertour. (2 P.)

b) Auf wieviele Weisen ist dies möglich? (1 P.)

c) Wieviele Brücken enthält der Graph, wenn man die Kanten 4 und 6 entfernt? (2 P.)

d) Fassen Sie die Nummern als Gewichte auf und bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum. Tragen Sie unten die Kanten des Spannbaums in aufsteigender Nummerierung ein. (3 P.)

e) Wie lautet die maximale Komponentenzahl, die man durch Entfernen von zwei Kanten erreichen kann? (2 P.)

a)	2	4	6	5	1	3	7	8
d)	1	2	3	4	6	7	—	—

b) $\boxed{2}$ $\quad$ c) $\boxed{3}$ $\quad$ e) $\boxed{2}$

$\diamondsuit$

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
B &= \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
C &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(2,5)\} \text{ auf } \underline{5},\\
D &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \text{ auf } \underline{4},\\
E &= \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
F &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \text{ auf } \underline{5}.
\end{aligned}$$

a) Ordnen Sie die Relationen gemäß ihrer Eigenschaften so in die untenstehende Tabelle ein, dass jede Relation genau ein Mal vorkommt. Eine *Quasiordnung* ist eine Relation, die transitiv und reflexiv ist, aber nicht notwendigerweise antisymmetrisch. (5 P.)

b) Bestimen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation. (1 P.)

c) Bestimen Sie alle Elemente, die bzgl. der partiellen Ordnung ein Minimum sind. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

d) Bestimen Sie alle minimalen Elemente der Quasiordnung. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

	A–F	
Totalordnung	D	—
partielle Ordnung	C	Minimum sind: —
Quasiordnung	A	minimal sind: 4
Äquivalenzrelation	F	Anzahl Klassen: 3
ungerichteter Graph ohne Schleifen	E	—
keins davon	B	—

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele 7-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen keine zwei gleiche Ziffern hintereinander vorkommen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Typen von Perlenketten lassen sich bilden, wenn man 7 paarweise verschieden gefärbte Perlen auf eine Schnur aufzieht? (3 P.)

c) Wieviele Wörter der Länge 7 lassen sich aus dem Buchstabenvorrat `BBBLLAAA` bilden? (3 P.)

a) $\boxed{9^7}$ b) $\boxed{360}$ c) $\boxed{560}$

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Geben eine geschlossene Formel für $S_{n,2}$ an, wobei $S_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl zweiter Art bezeichnet. Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen.

$S_{n,2}$ ist die Anzahl der Partitionen von $\underline{n}$ mit zwei Teilen. Für jeden Teil der Partition gibt es $2^n - 2$ Möglichkeiten (jede Teilmenge von $\underline{n}$ ausser $\emptyset$ und $\underline{n}$). Durch einen Teil der Partition ist der andere aber schon eindeutig definiert. Da die Teile einer Partition nicht nummeriert sind, wurde auf diese Weise jede Permutation genau zwei Mal gezählt. Also: $S_{n,2} = 1/2(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$.

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(1,5)(3,7) \circ \sigma \circ (2,4)(3,6) = \pi$ gilt. (3 P.)

Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi = \boxed{(1,3,6,7)(2,4)(5,8)}$ $\quad \operatorname{sgn}(\pi) = \boxed{-1}$ $\quad \sigma = \boxed{(1,7,5,8)}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $d = \operatorname{ggT}(435, 180)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 435 + \mu \cdot 180 = d$. (3 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{435}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{180} = \overline{390}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{30}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

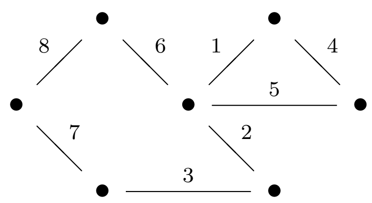
$d = \boxed{15}$ $\quad \lambda = \boxed{5}$ $\quad \mu = \boxed{-12}$ $\quad x = \boxed{\overline{123}}$

$x \in R^*$	1	7	11	13	17	19	23	29
x^{-1}	1	13	11	7	23	19	17	29

alle x : $[123, 152, 181, 210, 239, 268, 297, 326, 355, 384, 413, 7, 36, 65, 94]$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachtet wird folgender Graph mit nummerierten Kanten:



a) Vervollständigen Sie $7, 8, \ldots$ zu einer Eulertour. (2 P.)

b) Auf wieviele Weisen ist dies möglich? (1 P.)

c) Wieviele Brücken enthält der Graph, wenn man die Kanten 8 und 6 entfernt? (2 P.)

d) Fassen Sie die Nummern als Gewichte auf und bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum. Tragen Sie unten die Kanten des Spannbaums in aufsteigender Nummerierung ein. (3 P.)

e) Wie lautet die maximale Komponentenzahl, die man durch Entfernen von zwei Kanten erreichen kann? (2 P.)

a)	7	8	6	5	4	1	2	3
d)	1	2	3	4	6	7	—	—

b) $\boxed{2}$ $\quad$ c) $\boxed{3}$ $\quad$ e) $\boxed{2}$

△

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben seien die Relationen

$$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(2,5)\} \text{ auf } \underline{5},$$
$$B = \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$D = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$E = \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},$$
$$F = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \text{ auf } \underline{5}.$$

a) Ordnen Sie die Relationen gemäß ihrer Eigenschaften so in die untenstehende Tabelle ein, dass jede Relation genau ein Mal vorkommt. Eine *Quasiordnung* ist eine Relation, die transitiv und reflexiv ist, aber nicht notwendigerweise antisymmetrisch. (5 P.)

b) Bestimen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation. (1 P.)

c) Bestimen Sie alle Elemente, die bzgl. der partiellen Ordnung ein Minimum sind. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

d) Bestimen Sie alle minimalen Elemente der Quasiordnung. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

	A–F	
Totalordnung	C	—
partielle Ordnung	A	Minimum sind: —
Quasiordnung	D	minimal sind: 4
Äquivalenzrelation	F	Anzahl Klassen: 3
ungerichteter Graph ohne Schleifen	E	—
keins davon	B	—

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele 8-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen keine zwei gleiche Ziffern hintereinander vorkommen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Typen von Perlenketten lassen sich bilden, wenn man 6 paarweise verschieden gefärbte Perlen auf eine Schnur aufzieht? (3 P.)

c) Wieviele Wörter der Länge 7 lassen sich aus dem Buchstabenvorrat `BBBBLLAA` bilden? (3 P.)

a) $\boxed{9^8}$ b) $\boxed{60}$ c) $\boxed{420}$

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Geben eine geschlossene Formel für $S_{n,2}$ an, wobei $S_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl zweiter Art bezeichnet. Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen.

$S_{n,2}$ ist die Anzahl der Partitionen von $\underline{n}$ mit zwei Teilen. Für jeden Teil der Partition gibt es $2^n - 2$ Möglichkeiten (jede Teilmenge von $\underline{n}$ ausser $\emptyset$ und $\underline{n}$). Durch einen Teil der Partition ist der andere aber schon eindeutig definiert. Da die Teile einer Partition nicht nummeriert sind, wurde auf diese Weise jede Permutation genau zwei Mal gezählt. Also: $S_{n,2} = 1/2(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$.

Aufgabenblatt (Gesamtpunktzahl: 50) 06.02.2010 (1. Termin)

Klausur zu “Diskrete Strukturen”, WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(1,4)(7,8) \circ \sigma \circ (2,7)(3,5) = \pi$ gilt. (3 P.)
Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi = \boxed{(1,6)(2,8,4,7)(3,5)}$ $\quad \mathrm{sgn}(\pi) = \boxed{-1}$ $\quad \sigma = \boxed{(1,6,4,8)}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(729, 153)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 729 + \mu \cdot 153 = d$. (3 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{729}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{153} = \overline{612}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{30}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

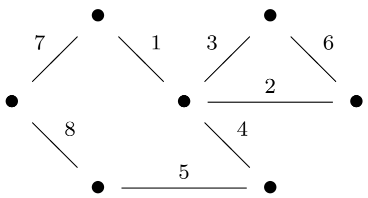
$d = \boxed{9}$ $\quad \lambda = \boxed{4}$ $\quad \mu = \boxed{-19}$ $\quad x = \boxed{\overline{166}}$

$x \in R^*$	1	7	11	13	17	19	23	29
x^{-1}	1	13	11	7	23	19	17	29

alle x : $[166, 247, 328, 409, 490, 571, 652, 4, 85]$

Aufgabe 3. (10 Punkte)

Betrachtet wird folgender Graph mit nummerierten Kanten:



a) Vervollständigen Sie $8, 7, \ldots$ zu einer Eulertour. (2 P.)

b) Auf wieviele Weisen ist dies möglich? (1 P.)

c) Wieviele Brücken enthält der Graph, wenn man die Kanten 7 und 1 entfernt? (2 P.)

d) Fassen Sie die Nummern als Gewichte auf und bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum. Tragen Sie unten die Kanten des Spannbaums in aufsteigender Nummerierung ein. (3 P.)

e) Wie lautet die maximale Komponentenzahl, die man durch Entfernen von zwei Kanten erreichen kann? (2 P.)

a)	8	7	1	2	6	3	4	5
d)	1	2	3	4	5	7	—	—

b) $\boxed{2}$ $\quad$ c) $\boxed{3}$ $\quad$ e) $\boxed{2}$

— bitte wenden —

♡

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben seien die Relationen

$$\begin{aligned}
A &= \{(1,3),(1,4),(2,4),(3,1),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
B &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\} \text{ auf } \underline{4},\\
C &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(1,5),(2,5)\} \text{ auf } \underline{5},\\
D &= \{(1,3),(1,4),(2,1),(2,4),(3,1),(3,4),(4,2),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4},\\
E &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,3),(3,1),(2,4),(4,2)\} \text{ auf } \underline{5},\\
F &= \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(1,3),(2,3),(4,3)\} \text{ auf } \underline{4}.
\end{aligned}$$

a) Ordnen Sie die Relationen gemäß ihrer Eigenschaften so in die untenstehende Tabelle ein, dass jede Relation genau ein Mal vorkommt. Eine *Quasiordnung* ist eine Relation, die transitiv und reflexiv ist, aber nicht notwendigerweise antisymmetrisch. (5 P.)

b) Bestimen Sie die Anzahl der Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation. (1 P.)

c) Bestimen Sie alle Elemente, die bzgl. der partiellen Ordnung ein Minimum sind. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

d) Bestimen Sie alle minimalen Elemente der Quasiordnung. Tragen Sie '—' ein, falls es keine gibt. (1 P.)

	A–F	
Totalordnung	B	—
partielle Ordnung	C	Minimum sind: —
Quasiordnung	F	minimal sind: 4
Äquivalenzrelation	E	Anzahl Klassen: 3
ungerichteter Graph ohne Schleifen	A	—
keins davon	D	—

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele 9-stellige Dezimalzahlen gibt es, in denen keine zwei gleiche Ziffern hintereinander vorkommen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Typen von Perlenketten lassen sich bilden, wenn man 7 paarweise verschieden gefärbte Perlen auf eine Schnur aufzieht? (3 P.)

c) Wieviele Wörter der Länge 6 lassen sich aus dem Buchstabenvorrat `BBLLLAA` bilden? (3 P.)

a) 9^9 b) 360 c) 210

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Geben eine geschlossene Formel für $S_{n,2}$ an, wobei $S_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl zweiter Art bezeichnet. Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen.

$S_{n,2}$ ist die Anzahl der Partitionen von $\underline{n}$ mit zwei Teilen. Für jeden Teil der Partition gibt es $2^n - 2$ Möglichkeiten (jede Teilmenge von $\underline{n}$ ausser $\emptyset$ und $\underline{n}$). Durch einen Teil der Partition ist der andere aber schon eindeutig definiert. Da die Teile einer Partition nicht nummeriert sind, wurde auf diese Weise jede Permutation genau zwei Mal gezählt. Also: $S_{n,2} = 1/2(2^n - 2) = 2^{n-1} - 1$.

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 09/10

B.Sc-Modulprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

Aufgabe 1. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 6 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(1,3)(7,8) \circ \sigma \circ (1,5)(4,6) = \pi$ gilt. (3 P.)

Probehinweis: Die Lösung σ lässt sich als einzelner Zykel schreiben.

$\pi = \boxed{(1,5,3,8)(2,7)(4,6)}$ $\quad \operatorname{sgn}(\pi) = \boxed{-1}$ $\quad \sigma = \boxed{(2,8,3,7)}$

Aufgabe 2. (9 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Einheiten des Ringes $R = \mathbb{Z}_{16}$ und geben Sie zu jeder Einheit das inverse Element an. (4 P.)

b) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(825, 682)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\lambda \cdot 825 + \mu \cdot 682 = d$. (3 P.)

c) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{825}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{682} = \overline{616}$ an. (2 P.)

$x \in R^*$	1	3	5	7	9	11	13	15
x^{-1}	1	11	13	7	9	3	5	15

$d = \boxed{11}$ $\quad \lambda = \boxed{-19}$ $\quad \mu = \boxed{23}$ $\quad x = \boxed{\overline{463}}$

alle x : $[463, 538, 613, 688, 763, 13, 88, 163, 238, 313, 388]$

Aufgabe 3. (6 Punkte)

Ordnen Sie jedem Ausdruck auf der linken Seite der Tabelle genau einen Ausdruck auf der rechten Seite zu. Die Zuordnung ist durch Eintragung der Buchstaben A–F in der freien Spalte zu kennzeichnen. (Es bezeichnet $S_{n,k}$ die Stirling-Zahl 2. Art, und $s_{n,k}$ die Stirling-Zahl 1. Art.)

		A–F	
A	$S_{n,k+1}$	C	keins davon
B	$S_{n+1,k}$	F	2^n
C	$S_{n+1,n+1}$	D	$\binom{n}{2}$
D	$s_{n,n-1}$	E	$n!$
E	$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k}$	B	$S_{n-1,k-2} + (2k-1)S_{n-1,k-1} + k^2 S_{n-1,k}$
F	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$	A	$S_{n-1,k} + kS_{n-1,k+1} + S_{n-1,k+1}$

☐

Aufgabe 4. (12 Punkte)

a) Skizzieren Sie (für sich) den Graphen $G = (V, E)$ mit $V = \underline{9}$ und (5 P.)

$$E = \{\{1,3\},\{1,4\},\{1,9\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,9\},\{5,7\},\{5,8\},\{6,8\}\}.$$

Die Anzahl der Brücken in G beträgt $\boxed{2}$; die Komponentenzahl beträgt $\boxed{2}$.

Der Graph G hat folgende Eigenschaften (alle ankreuzen):

☐ Baum ☐ Wald ☐ kreisfrei ☐ zusammenhängend ☒ keine davon

b) Gesucht sind zwei Graphen G und H derart, dass die Knotengrade in G genau $2,2,3,3,3,4,4,4,4$ lauten, und in H genau $2,2,2,3,3,4,4,4,4$. Welcher der beiden Graphen existiert? Skizzieren Sie diesen und begründen Sie, warum der andere nicht existiert. (7 P.)

Graph $\boxed{G}$ existiert nicht, weil $\boxed{\text{2+2+3+3+3+4+4+4+4 ungerade}}$.

Skizze des existierenden Graphen:

Aufgabe 5. (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 3 schwarze und 3 gelbe Trikots an 6 Spieler zu verteilen? (3 P.)

b) Wieviele verschiedene Passwörter der Länge 4 über einem Alphabet mit 5 Zeichen gibt es, in denen mindestens ein Buchstabe doppelt vorkommt? (3 P.)

c) Wieviele Äquivalenzrelationen R gibt es auf einer 7-elementigen Menge, so dass R genau drei Äquivalenzklassen von der Mächtigkeit 2, 2 und 3 hat? (3 P.)

a) $\boxed{20}$ b) $\boxed{505}$ c) $\boxed{105}$

Aufgabe 6. (schriftlich, 6 Punkte)

Es seien p und q zwei beliebige Primzahlen. Gesucht ist die Anzahl $A(p,q)$ der natürlichen Zahlen n mit $1 \le n \le pq$, die weder durch p noch durch q teilbar sind.

a) Geben Sie eine möglichst einfache geschlossene Formel für $A(p,q)$ an. (1 P.)

b) Beweisen Sie Ihre Formel aus a) bzw. leiten Sie ihre Formel mittels aus der Vorlesung bekannter kombinatorischer Prinzipien her. (4 P.)

c) Zeigen Sie, dass $A(p,q)$ durch $p-1$ teilbar ist. (1 P.)

Falls $p \neq q$, dann $A(p,q) = p^2 - pq + 1$ (Beweis mittels Inklusions-Exklusions-Prinzip). Ausklammern ergibt $A(p,q) = (p-1)(q-1)$, also $p-1 | A(p,q)$. Falls $p = q$, so zählt man direkt ab $A(p,p) = p(p-1)$ (Produktregel).

Viel Erfolg!

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 08/09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ____________________ **Matrikelnummer:** ____________________

Aufgabe 1. (4 Punkte)

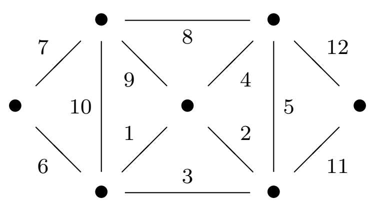
Geben Sie zwei verschiedene Definitionen des Begriffs „Baum" an:

1.

2.

Aufgabe 2. (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des folgenden gewichteten Graphen. In die sechs Lösungsfelder sind die Längen der Kanten des Spannbaumes in aufsteigender Reihenfolge einzutragen. (4 P.)



b) Ist Kruskal's Algorithmus ein Greedy-Algorithmus? ☐ Ja ☐ Nein (1 P.)

c) Besitzt der Graph eine Eulertour? ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele Äquivalenzrelationen, deren Äquivalenzklassen alle gleichmächtig sind, gibt es einer vierelementigen Menge? (3 P.)

b) Wieviele Wörter lassen sich aus den Buchstaben B, B, B, L, L, A, A bilden? (3 P.)

c) Wieviele 6-stellige Telefonummern gibt es, die nicht mit einer Null beginnen und in denen keine Ziffer zweimal direkt hintereinander vorkommt? (3 P.)

d) Drei Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wieviele Augenkombinationen gibt es, in denen weder 1 noch 2 vorkommt? (3 P.)

a) ☐ b) ☐ c) ☐ d) ☐

— bitte wenden —

♡

Aufgabe 4. (9 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 8 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie σ als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von σ. (2 P.)

c) Geben Sie τ so an, dass $(1\,7\,6\,3\,8) \circ (4\,2\,5) \circ \tau = \sigma$ gilt. (2 P.)
Probehinweis: Die Lösung τ ist eine Transposition.

d) Geben Sie das kleinste $k \in \mathbb{N}$ an, für das $\sigma^k = \mathrm{id}$ gilt. (2 P.)

$\sigma = \boxed{}$ $\quad \mathrm{sgn}(\sigma) = \boxed{}$ $\quad \tau = \boxed{}$ $\quad k = \boxed{}$

Aufgabe 5. (8 Punkte)

Seien $n = 246$ und $a = 276$.

a) Bestimmen Sie $\mathrm{ggT}(a, n)$ sowie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{ggT}(a, n) = \lambda a + \mu n$. (4 P.)

b) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_n$ eine Lösung von $\bar{a} \cdot x = \overline{30}$. (2 P.)

c) Wieviele Einheiten besitzt $\mathbb{Z}_n$? (2 P.)

$\mathrm{ggT}(a, n) = \boxed{}$ $\quad \lambda = \boxed{}$ $\quad \mu = \boxed{}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad |\mathbb{Z}_n^*| = \boxed{}$

Aufgabe 6. (9 Punkte)

Wir bezeichnen mit $s_{n,k}$ die Stirling'sche Zahl erster Art, also die Anzahl der Permutationen einer n-elementigen Menge mit k Zykeln.

a) Geben Sie eine geschlossene Formel für $s_{n,1}$ an, die für alle $n \in \mathbb{N}$ gültig ist. (3 P.)

$\boxed{}$

b) Leiten Sie Ihre Formel her bzw. begründen Sie sie ausführlich, **ohne** dabei die Rekursionsgleichung für die Stirling'schen Zahlen zu benutzen. (3 P.)

c) Leiten Sie eine geschlossene Formel für $s_{n,n-1}$ her. Dies kann wahlweise mit Verwendung der Rekursionsgleichung geschehen (Induktionsbeweis) oder ohne (kombinatorischer Beweis). (3 P.)

$\boxed{}$

Viel Erfolg!

Aufgabenblatt 20.03.2009 (2. Termin)

Klausur zu "Diskrete Strukturen", WS 08/09

B.Sc-Modulprüfung / Diplom-Vorprüfung / Scheinklausur
Dr. Timo Hanke, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Name: ______________________ **Matrikelnummer:** ______________

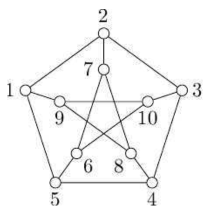
Aufgabe 1. (6 Punkte)

Ordnen Sie jedem graphentheoretischen Problem aus der Tabelle einen geeigneten Algorithmus zu. Folgende Antworten stehen zur Auswahl: (a) Kruskal, (b) Tiefensuche, (c) Euklid, (d) Fleury (Schneeräumen), (e) Breitensuche, (f) keiner der genannten. Tragen Sie bitte nur Buchstaben a–f in die leere Spalte ein.

Spannbaum (ungewichtet)		minimaler Spannbaum	
Distanzen		Hamiltonkreis	
Eulertour		Zusammenhangskomponenten	

Aufgabe 2. (3 Punkte)

Der Peterson-Graph besitzt weder einen Hamiltonkreis noch eine Eulertour. Ist es möglich eine einzelne Kante so hinzuzufügen, dass a) ein Hamiltonkreis und b) eine Eulertour entsteht? Wenn ja, dann tragen Sie die beiden Endknoten einer solchen Kante ein; wenn nein, dann tragen Sie '—' ein.



Hamiltonkreis: $\boxed{}$ Eulertour: $\boxed{}$

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist.

a) Wieviele injektive Abbildungen gibt es von $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_6$, die $\bar{0}$ auf $\bar{0}$ abbilden? (3 P.)

b) Wieviele Farbzusammenstellungen sind beim Kartenspiel in einer Hand von fünf Karten möglich? Mit Farben sind die vier Spielfarben gemeint. (3 P.)

c) In zehn Produkten sind vier fehlerhaft. Wieviele Stichproben, bestehend aus vier Produkten, enthalten weniger als zwei fehlerhafte Produkte? (3 P.)

d) Ein Student hat sechs Flaschen Bier von paarweise verschiedenen Sorten, die er an drei aufeinanderfolgenden Abenden trinken möchte. Wieviele Möglichkeiten hat er, die Sorten auf die Abende zu verteilen, wenn an jedem Abend mindestens eine Flasche geöffnet werden soll? (3 P.)

a) $\boxed{}$ b) $\boxed{}$ c) $\boxed{}$ d) $\boxed{}$

— bitte wenden —

♡

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Gegeben ist die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 5 & 2 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Schreiben Sie π als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

b) Berechnen Sie das Signum von π. (2 P.)

c) Geben Sie σ so an, dass $(4, 6, 7) \circ \sigma \circ (3, 5, 6) = \pi$ gilt. (3 P.)
Probehinweis: Die Lösung σ ist ein 3-Zykel.

$\pi = \boxed{}$ $\quad \operatorname{sgn}(\pi) = \boxed{}$ $\quad \sigma = \boxed{}$

Aufgabe 5. (7 Punkte)

Bestimmen Sie:

a) Berechnen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ so, dass $\lambda \cdot 192 + \mu \cdot 156 = \text{ggT}(192, 156)$ gilt. (2 P.)

b) Geben Sie in $\mathbb{Z}_{192}$ eine Lösung von $x \cdot \overline{156} = \overline{108}$ an. (2 P.)

c) Bestimmen Sie in $\mathbb{Z}_{69}$ das multiplikative Inverse von $c := \overline{31}$. (3 P.)

$\lambda = \boxed{}$ $\quad \mu = \boxed{}$ $\quad x = \boxed{}$ $\quad c^{-1} = \boxed{}$

Aufgabe 6. (6 Punkte)

Es seien zwei Abbildungen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ gegeben, deren Komposition surjektiv ist. Welche der folgenden Aussagen gelten allgemein?

a) g ist surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

b) g injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

c) f ist surjektiv ☐ Ja ☐ Nein (2 P.)

Aufgabe 7. (8 Punkte)

Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten und, mit ausführlicher Begründung, auf einem gesonderten Blatt abzugeben.

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, gilt: (3 P.)

$$a \cdot b = a \cdot c \Longrightarrow b = c. \tag{1}$$

b) Geben Sie $n \in \mathbb{N}$ sowie $a, b \in \mathbb{Z}_n, a \neq 0$, so an, dass (1) nicht gilt. (2 P.)

c) Es seien $a, c \in \mathbb{Z}$ teilerfremd. Zeigen Sie für alle $b \in \mathbb{Z}$ gilt: $a | (b \cdot c) \Rightarrow a | b$. (3 P.)
Hinweis: Schreiben Sie die Aussagen als Kongruenzen um.

Viel Erfolg!

Gruppe A
Dauer: 120 min. **Gesamtpunktzahl:** 50 **Mindestpunktzahl zum Bestehen:** 25

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden Relationen auf $\underline{6}$: (8 PUNKTE)

$$R_1 = \{(1,1),(1,3),(1,4),(2,2),(2,5),(3,1),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4),(5,2),(6,6)\}.$$
$$R_2 = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3),(4,3),(4,4),(5,3),(5,4),(5,5)(6,3),(6,4),(6,6)\}.$$

Bestimmen Sie:

(a) zwei Paare $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ in $\underline{6} \times \underline{6}$, so dass $S = R_1 \cup \{(a_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ eine Äquivalenzrelation ist. (2 P.)

(b) die Äquivalenzklassen von S. (2 P.)

(c) welche der Eigenschaften reflexiv (R), symmetrisch (S), transitiv (T) und antisymmetrisch (A) die Relation R_2 besitzt. (Tragen Sie die zutreffenden Abkürzungen in das Kästchen ein.) (2 P.)

(d) ob R_2 eine Totalordnung (T), partielle Ordnung (P) oder keine dieser Ordnungen (X) ist. Tragen Sie zusätzlich zu einer der obigen Abkürzungen noch die minimalen Elemente, falls R_2 eine partielle Ordnung ist, oder das Minimum, falls R_2 eine Totalordnung ist, in das Kästchen ein. (2 P.)

(a) (5,5)(4,3) ✓ (b) 3 (✓) (c) (R), (A) (T) ✓ (d) partielle Ordnung 1,5 (✓) 6

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die folgenden Anzahlen. Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit, wie es ohne Taschenrechner möglich ist. (12 PUNKTE)

(a) Wieviele verschiedene Worte kann man bilden, die nicht mit R beginnen und die genau aus den Buchstaben des Wortes TREPPE bestehen? (3 P.)

(b) Ein Autor hat 10 verschiedene Bücher geschrieben, davon sind 4 Kochbücher und 6 Krimis. Wieviele Möglichkeiten gibt es eine Leseprobe aus 3 Buchtiteln zusammenzustellen, wenn diese Probe mindestens zwei Krimis enthalten soll? (3 P.)

(c) Wieviele Farbzusammenstellungen gibt es um einen Blumenkasten mit 4 Blumen zu bepflanzen, wenn es rote, gelbe, pinke und blaue Blumen zur Auswahl gibt und der Kasten höchstens eine gelbe Blume enthalten soll? (Hierbei spielt die Reihenfolge, in der die Farben im Blumenkasten auftreten, keine Rolle.) (3 P.)

(d) Wieviele Möglichkeiten gibt es 5 Sträflinge auf 4 nummerierte Zellen zu verteilen, so dass keine der Zellen leer ist und Ede und Kalle sich keine Zelle teilen? (3 P.)

(a) 150 ✗ (b) 80 =130 ✗ (c) 25 ✓ (d) 216 ✗ 3

Aufgabe 3. Gegeben seien die Permutationen (7 PUNKTE)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \text{ und } \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir definieren $\psi = \sigma \circ \tau$.

(a) Schreiben Sie ψ als Produkt von disjunkten Zykeln. (3 P.)

(b) Berechnen Sie das Signum von ψ. (2 P.)

(c) Sei k_0 das kleinste $k \in \mathbb{N}$ mit $\tau^k = 1$. Berechnen Sie k_0. (2 P.)

$\psi =$ (152)(346) ✓ $\mathrm{sgn}(\psi) =$ 1 ✓ $k_0 =$ 4 ✗ 5

(7 PUNKTE)

Aufgabe 4.

(a) Berechnen Sie $d = \mathrm{ggT}(490, 155)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ mit $d = \lambda \cdot 490 + \mu \cdot 155$. (3 P.)

(b) Finden Sie die kleinste natürliche Zahl a mit $a \equiv 3 \cdot 5^4 \cdot 11 \cdot 13^3 \pmod 7$. (2 P.)

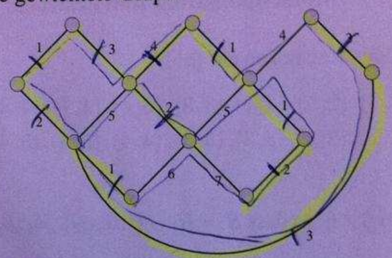
(c) Lösen Sie die Gleichung $x \cdot \overline{155} = \overline{10}$ in $\mathbb{Z}_{490}$. (2 P.)

$d =$ 5 $\lambda =$ -6 $\mu =$ 19 $a =$ 4 $x =$ 38

5

(5 PUNKTE)

Aufgabe 5. Gegeben sei der folgende gewichtete Graph:



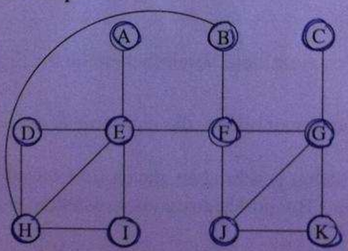
(a) Hat der Graph eine Eulertour? ☒ Ja ☐ Nein (2 P.)

(b) Bestimmen Sie einen minimalen Spannbaum des gewichteten Graphen. Tragen Sie die Längen der Kanten des Spannbaums in aufsteigender Reihenfolge in das nachfolgende Kästchen ein.

1 1 1 1 2 2 2 3 3 3 4 (insgesamt = 23) (3 P.)

5

Aufgabe 6. Betrachten Sie den folgenden Graphen: (5 PUNKTE)



(a) Angefangen vom Knoten I, werde der Graph mit der Breitensuche durchlaufen. Hierbei werden die Nachbarn eines gegebenen Knoten immer in alphabetischer Reihenfolge durchlaufen. Tragen Sie die Namen der Knoten in der besuchten Reihenfolge in das Kästchen ein. (3 P.)

I, E, H, A, B, D, F, G, J, C, K

5

(b) Geben Sie für jeden Knoten seinen Abstand von I in die Tabelle ein. (2 P.)

v	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
$d_I(v)$	2	2	4	2	1	2	3	1	0	3	4

Aufgabe 7. Diese Aufgabe ist schriftlich zu bearbeiten und, mit ausführlicher Begründung, auf einem gesonderten Blatt abzugeben. (6 PUNKTE)

(a) Für $a, b \in \mathbb{Z}$ sei $d = ggT(a, b)$. Seien weiter $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $a = dx$ und $b = yd$. Zeigen Sie, dass dann $ggT(x, y) = 1$ ist. (2 P.)

(b) Beweisen Sie, dass $n^3 \equiv n \pmod 6$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 P.)

(c) Seien $f : A \to B$ und $g : B \to C$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist auch f injektiv. (2 P.)

Viel Erfolg!