Diskrete Strukturen

SS 2003

Dozent: **Prof. Dr. E. Triesch**

Autor der Mitschrift: Markus Goffart
Email: mac.goofy@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

- Im folgenden habe ich das Script der Vorlesung „**Diskrete Strukturen**“ vom **Prof. Dr. E. Triesch** von der RWTH Aachen aus dem SS 03 digitalisiert!
- Ich erhebe hiermit keinen Anspruch auf die Vollständigkeit und die Korrektheit des Scripts!
- Das Script darf frei verwendet werden, allerdings nicht für kommerzielle Zwecke!
- Veränderungen am Inhalt sind nur mit ausdrücklicher Genehmigung des Autors zu gewährleisten
- Für Beschädigungen o.ä., die durch dieses Script hervorgerufen werden, kann ich selbstverständlich keine Haftung übernehmen

Literaturvorstellung des Professors

- M. Aigner- Diskrete Mathematik, Vieweg 1993 (ähnlich der Gliederung der Vorlesung/Deutschsprachig)

- Graham,Knuth, Patarhnik – Concret Mathematics, Add-Verlag 1990 (Englischsprachig)

- Lovasz, Pelikan, Verztergombi – Discrete Mathematics, Springer 2003 (Englischsprachig)

- Steger – Diskrete Strukturen Bd. 1, Springer 2001 (Deutschsprachig)

- Volkmann – Diskrete Strukturen, ABM (Deutschsprachig)

Teil I:
Abzählung

Typisches Problem:

Geg. sei eine Familie von endlichen Mengen $(S_i \mid i \in I)$
Bestimme die Funktion
$f: I \rightarrow N_0 = \{0,2,3,4,...\}$
$f(i) := |S_i|$
Schwammig formuliert
Was heißt "bestimmen"?
Ideal wäre eine sogenannte „geschlossene Formel",
aber die Existenz einer solchen „Formel" ist eher die Ausnahme.

Bsp:

Wie viele Permutationen von n Symbolen gibt es?

1 2 3,
1 3 2,
2 1 3,
2 3 1,
3 1 2,
3 2 1

6 Permutationen von 3 Symbolen

1. \+ n-1 weitere Symbole ...
2. \+ n-1 weitere Symbole ...

...
n. + n-1 weitere Symbole ...

$\rightarrow f(n) = n \cdot f(n-1) = n(n-1) - 2 \cdot 1 = n!$

Bsp.:

Wie viele Permutationen von n Symbolen 1, 2, 3, ..., n gibt es, bei denen keine Zahl an ihrem ursprünglichen Platz steht?

1, 2, 3, ..., n Dn (=Derangement numbers)

„Formel“: $D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

$$\frac{Dn}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \frac{1}{e} \approx \frac{1}{2{,}718}$$

Rekursionen

z.B. für Dn

$Dn = (n-1)(Dn-1+Dn-2) \qquad ,n \geq 3$

$D1 = 0, D2 = 1$

Asymptotik

$$Dn \approx \frac{1}{e} \bullet n!$$

Primzahlsatz

$\pi(n) =$ (Anzahl der Primzahlen $\leq n$)

$$\approx \frac{n}{\ln n}$$

Elementäre Zählprinzipien

Einige Regeln „bewusstmachen“, die immer wieder bei Abzählmethoden angewandt werden:

Gleichheitsregel:

|S| = |T| g.d.w.[1] eine Bijektion zwischen S und T existiert

Summenregel:

Ist S = $\bigcup_{i=1}^{t} Si$ eine disjunkte Zerlegung, so ist die Anzahl der Elemente in $|S| = \sum_{i=1}^{t} |Si|$

Produktregel:

Ist S = S1 x S2 x S3 x ... x St einkartesisches Produkt, d.h.

$S = \{(a_1,...,a_t) : a_i \in S_i, 1 \leq i \leq t\}$, so gilt: $|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$

Bsp.:

$\binom{n}{k}$ sei die Anzahl der k-Elementigen Teilmengen einer n-Elementigen Menge

S |S| = n,

[1] g.d.w. = genau dann wenn

$$\binom{n}{k} = \underbrace{\left|\left\{x \subseteq S \middle\| x\right| = k\right\}\right|}_{\binom{s}{k}}$$

Es sei nun x∈S

$$M := \left\{ x \in \binom{s}{k} \middle\| x \in X \right\}$$

$$N := \left\{ x \in \binom{s}{k} \middle\| x \notin X \right\}$$

$$\binom{s}{k} = M \cup N$$

$$\xrightarrow{Summenregel} \binom{n}{k} = |M| + |N|$$

Die Abbildung $X \to X\big|_{\{x\}}$ vermittelt eine Bijektion zwischen M und $\binom{S|_{\{x\}}}{k-1}$, also

$$|M| = \left|\binom{S|_{\{x\}}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1}$$

Ebenso ist $N = \binom{S|_{\{x\}}}{k}$, also $|N| = \binom{n-1}{k}$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Bsp.:

Was ist die Anzahl der Abbildungen $f : N \to R \qquad R^N := \{ f : N \to R \}$

Behauptung $\left|R^N\right| = |R|^{|N|}$

Es sei $N = \{x_1, ..., x_n\}, n = |N|$

$R^N \ni f \to \left(f(x_1),...,f(x_n)\right)$ ist offenbar eine Bijektion zwischen R^N und $\underbrace{RxRx...xR}_{n-mal}$

Bemerkung : 2^N bezeichne die Potenzmenge von N, d.h. $2^N = \{X : X \subseteq N\}$

$2^N \ni x \to 1_x, 1_x : N \to \{1,0\}$

$$1_x(x) = \begin{cases} 1, x \in X \\ 0, sonst \end{cases}$$

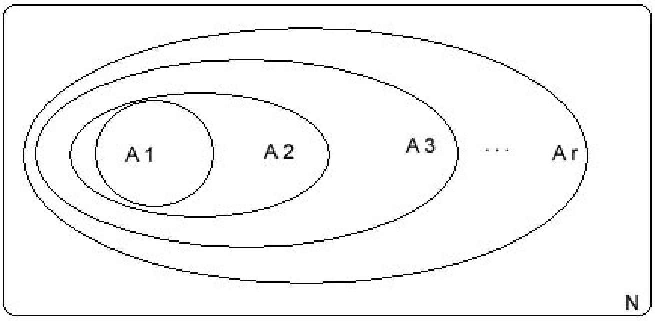
Also $\left|2^N\right| = \left|\{0,1\}^N\right| = 2^{|N|}$

Bsp.:

Was ist die Anzahl der „Ketten" $A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_r \subseteq N$ der Länge r in N

Lösung: $(r+1)^n$, $n = |N|$

Bijektion: $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_r) \to f \in \{1,...,r+1\}^N$, wobei $A_i = \{x \in N \mid f(x) \leq i\}$



Sehr hilfreich ist auch die Regel vom zweifachen Abzählen

Es sei $M = (m_{ij})$ eine Matrix von Zahlen, dann ist $\sum_i \left(\sum_j m_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i m_{ij} \right)$

Summe der Zeilensumme = Summe der Spaltensumme

Bsp.:

Die Teilerfunktion $t : \mathrm{N} \to \mathrm{N}$

$t(j) =$ Anzahl der Teiler von j

verläuft höchst unregelmäßig $\begin{pmatrix} t(p) = 2, falls\ p\ \mathrm{Pr}imzahl \\ t(2^n) = n+1 \end{pmatrix}$

$$t(p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\ldots(\alpha_r + 1)$$

Es sei $E(n) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} t(j)$

Basteln eine Matrix wie folgt:

$M = (m_{ij}) \in \{0,1\}^{nxn}$ $\quad$ $m_{ij} \in \{0,1\}$

$1 \le i \le n, 1 \le j \le n$

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, i \; teilt \; j \; (i \mid j) \\ 0 \; sonst \end{cases}$$

$$\rightarrow \; t(j) = \sum_{i=i|j} 1 = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t(j) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} m_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left|\{j|i|j\}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Definition: „$\lfloor \alpha \rfloor$“ = größte ganze Zahl $\in \alpha$

$$\rightarrow \; t(n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} =: H_n$$ → n-te harmonische Zahl

$$\ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n}{i} - 1\right) = H_n - 1$$

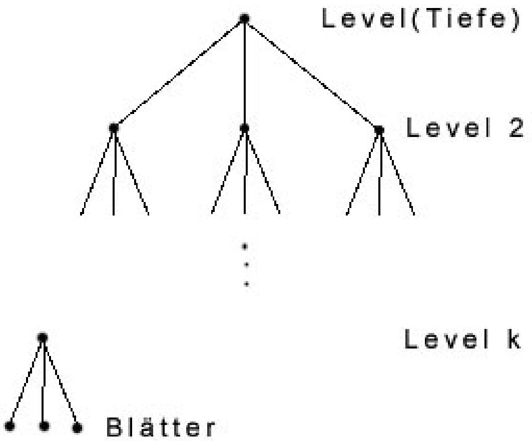
Schubfachprinzip

Verteilt man n Bälle auf r Fächer, so existiert im Falle $n > r$ stets ein Fach, das mehr als einen Ball enthält.

Verallgemeinerung in der Sprache der Abbildungen $f : N \rightarrow R$ mit $|N| = n > r = |R|$, so existiert ein $a \in R$ mit $\left|f^{-1}(b)\right| \ge |R| \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor + 1$

$$n = \sum_{b \in R}\left|f^{-1}(b)\right| \le |R| \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor \le n-1$$

Baum



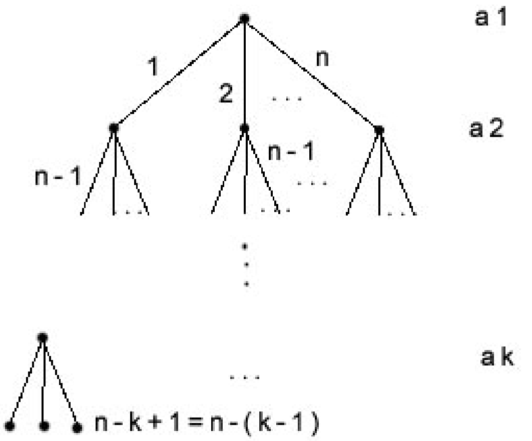
Jeder Punkt des Levels i hat genau m Söhne
dann ist die Anzahl der Blätter $m_0, m_1, m_2, \ldots, m_k$

Bsp.:

Abzählungen von k-Permutationen einer Menge N,

$|N| = n$

$$\left\{ (a_1, \dots, a_n) \in \underbrace{NxNx\dots xN}_{n-mal} \,\middle|\, alle\ a_i\ verschieden \right\}$$

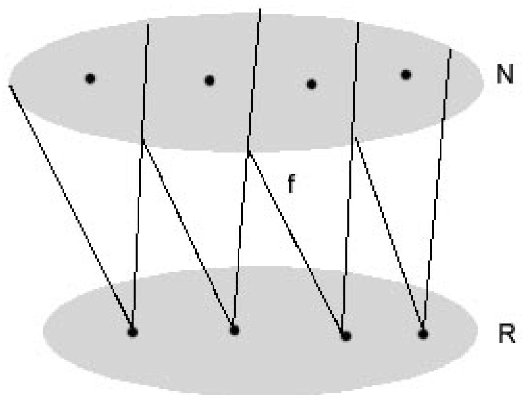


Anzahl $\qquad n(n-1)(n-2)...(n-k+1) =: n^{\underline{k}}$

$\qquad\qquad n(n+1)(n+2)...(n+k-1) =: n^{\overline{k}}$

$f : N \to R \quad |N| = n > r = |R|$

Es existiert ein $a \in R$ mit $\left| f^{-1}(a) \right| = \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor + 1$



Bsp.:

Wir betrachten (nxn)-Matrizen

$M = (m_{ij})$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\quad m_{ij} \in \mathrm{N}$

(ii) $\quad$ Falls ein $m_{ij} = m$, so existiert genau ein Paar $(k,l) \neq (i,j)$ mit $m_{kl} = m_{ij} = m$.

Bsp.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \\ 7 & 8 & 6 & 5 \\ 3 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{2\ 4\ 3\ 1}$$

Die Anzahl n^2 der Matrixelemente muss eine gerade Zahl sein, also n gerade

Transversale

Permutationen von $\{1,\ldots,n\}$ können definiert werden als bijektive Abbildungen von $\{1,\ldots,n\}$ auf sich.

Die Menge aller Permutationen auf N nennen wir die symmetrische Gruppe auf N

Bez.: S_N, $S_{\{1,\ldots,n\}} =: S_n$

$\pi \in S_n$ Betrachte alle Paare

$$(i, \pi(i)), \quad 1 \le i \le n$$

Diese Menge von Paaren heißt die zu π gehörige Transversale (in einer nxn Matrix)

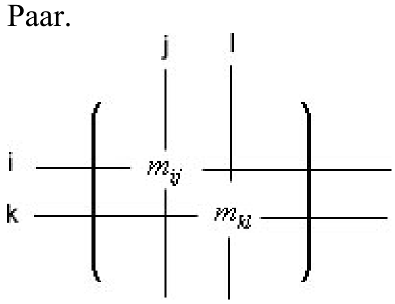
Transversale heißt zulässig, wenn sie keine doppelten Elemente enthält.

Frage: Enthält jede Matrix M mit (i), (ii) eine zulässige Transversale?

Antwort: NEIN, aber für gerade $n \ge 4$ gibt es stets eine zulässige Transversale

Beispiel: Die Matrix M sei gegeben.

Wir nennen ein Paar $\{(i,j),(k,l)\}$ mit $i \ne k,\ j \ne l$ und $m_{ij} = m_{kl}$ ein singuläres Paar.



Eine Transversale ist zulässig g.d.w. sie kein singuläres Paar enthält!

Es sei T die Menge aller singulären Paare $\left(0 \le |T| \le \dfrac{n^2}{2}\right)$

$N = (n_{\pi,t})_{\pi \in S_n, t \in T}$ sei die folgende Matrix:

$$n_{\pi,t:} = \begin{cases} 1, & \text{falls die durch } \pi \text{ bestimmte Transversale das singuläre Paar } t \text{ enthält} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{\sum_{\pi} \underbrace{\left(\sum_{t} n_{\pi,t} \right)}_{ZeSu}}_{n!\ Summanden} = \sum_{t} \underbrace{\left(\sum_{\pi} n_{\pi,t} \right)}_{\text{Anzahl der Perm. Die das sing. Paar t enthalten} = (n-2)!} \qquad \text{(Zeilensumme=ZeSu)}$$

$$= |T| \cdot (n-2)!$$

„Schubfachprinzip“: Es existiert mindestens ein Summand π_0 in der ersten Summe mit

$$\sum_t n_{\pi_0,t} \leq \left\lfloor \frac{1}{n!} \cdot |T| \cdot (n-2)! \right\rfloor = \left\lfloor \frac{|T|}{n \cdot (n-1)} \right\rfloor$$

Aber $|T| \leq \frac{n^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{|T|}{n(n-1)} \leq \frac{n^2}{2n(n-1)} = \frac{n}{2(n-1)} < 1 \quad , n \geq 4$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{|T|}{n(n-1)} \right\rfloor = 0$$

$$\Rightarrow \sum_t n_{\pi_0,t} = 0 \qquad \text{, also } \pi_0 \text{ zulässig}$$

Bsp.: *Zeige:* Unter $n^2 + 1$ verschiedenen reellen Zahlen gibt es stets n+1, die eine monotone Folge bilden (steigend o. fallend)

Beweis: Die Zahlen seien $a_1, a_2, ..., a_{n^2+1}$

Jedem a_i ordnen wir die Länge t_i der längsten Folge

$$ai = a_{j_1} < a_{j_2} < ... < a_{j_{ti}}$$

zu, die mit a_i beginnt.

Falls für ein i $t_i \geq n+1$ ist, so sind wir fertig.

Falls nicht, so existiert $t \in \{1,...,n\}$, so dass $t_i = t$ für mindestens

$$\left\lfloor \frac{(n^2+1)-1}{n} \right\rfloor + 1 = n + 1$$

Indizes, etwa $i_1 < i_2 < ... < i_{n+1}$

$(t_{i_1} = t_{i_2} = ... = t_{i_{n+1}} = t)$

$... a_{i_1} ... a_{i_2} ... a_{i_n} ... a_{i_{n+1}} ...$

Angenommen, für ein l wäre ein $a_{i_l} < a_{i_{l+1}}$, dann könnte man eine t-elementige monoton steigende Folge, die nei $a_{i_{l+1}}$ beginnt, zu einer (t+1)-elementigen verlängern, die bei a_{i_l} beginnt, also $t_{i_l} \geq t+1$, Widerspruch zu $t_i = t$

$\Rightarrow a_{i_l} > a_{i_{l+1}}$ also

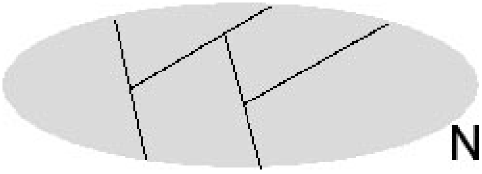
$a_{i_1} > a_{i_2} > ... > a_{i_n} > a_{i_{n+1}}$ und wir haben eine fallende Folge der Länge $n+1$

Die fundamentalen Zählkoeffizienten

$\binom{n}{k}$: zählt die k-Untermengen einer n-elementigen Menge → Binomenialkoeffizient

$S_{n,k:}$: Anzahl der Mengenpartitionen von N $(|N| = n)$ in k nichtleere Blöcke

Stirlingzahlen 2.Art



Bsp.: Bestimme $S_{n,2}$

Es sei $A \subseteq N, \quad 0 < |A| < |N|$

Jedes solche A kann ein Block einer der gesuchten Äquivalenzrelationen (Partitionen) sein; Anzahl der A's: $2^n - 2$

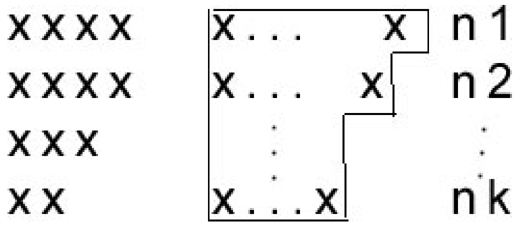
$S_{n,2} = 2^{n-1} - 1$

$P_{n,k}$: Anzahl der Zahlpartitionen von n in k Summanden

$n = n_1 + ... + n_k \quad (n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1)$

Darstellung von Zahl-Partitionen durch sogenannte Ferrers-Graphs

z.B.: $13 = 4 + 4 + 3 + 2$



Es handelt sich hier im ungeordnete Partitionen, ebenso bei $S_{n,k}$

Erinnerung: $n^{\underline{k}} = n(n-1)...(n-k+1)$

Anzahl der k-Permutationen von N

Wir erhalten diese andererseits, wenn wir zuerst eine k-Untermenge aus N auswählen und deren Elemente dann irgendwie anordnen

$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} k!$, also

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

Anzahl der geordneten k-Mengenpartitionen wird durch k! $S_{n,k}$ abgezählt.

Nicht so bei den geordneten Zahlpartitionen von n in k Summanden

Lösung: $\binom{n-1}{k-1}$

$S_{n,k} = \left|\{\{a_1,...,a_k\} \mid A_1 \cup \ldots \cup A_k = N,\ A_i \neq 0,\ 1 \le i \le k\}\right|$

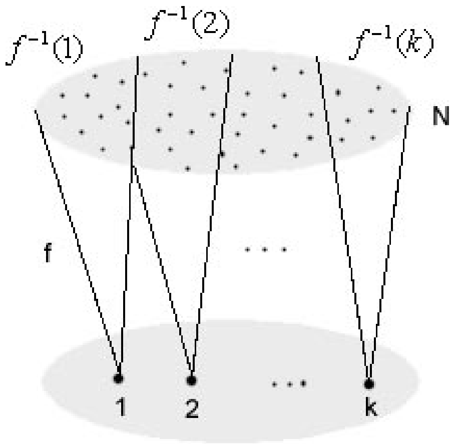
Bsp.: Was ist die Anzahl der Bijektiven Abbildungen von N in $\{1,\cdots k\}$? $(k \le n)$

Behauptung:

Diese Anzahl ist $k!\,S_{n,k}$

$S_{n,k} = \left|\{\{a_1,...,a_k\} \mid A_1 \cup \ldots \cup A_k = N,\ A_i \neq 0,\ 1 \le i \le k\}\right|$

Surjektive Abbildungen von N in $\{1,\cdots k\}$ können wir beschreiben als k-Tupel $\left(f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k)\right)$



Zahlpartitionen

$5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$

p(n)

$P_{n,k}$ Anzahl der Partitionen von n in k Summanden, unabhängig von der Reihenfolge der Summanden

z.B.: $P_{5,2} = 2$ PS

Was ist die Anzahl der geordneten Partitionen von n in k Summanden?

$$\left|\{(n_1,\ldots,n_k) \mid n_i \in \mathrm{N}, 1 \in N, 1 \le i \le k, \cdots n_1 + n_2 + \ldots n_k = n\}\right| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \left|\binom{1,...,n-1}{k-1}\right|$$

Zum Beweis konstruieren wir eine Bijektion:

$f : (n_1,\ldots,n_k) \to \{n_1, n_1+n_1, n_1+n_2+n_3, ..., n_1,+n_2+...+n_{k-1}\}$

$Bild\ f \subseteq \binom{\{1,...,n-1\}}{k-1}$

Was ist die inverse Abbildung von f? (g)

$g(\{a_1 < a_2 < ... < a_{k-1}\}) = (a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, ..., a_k - a_{k-1}, ..., n - a_{n-1})$

Bsp.: Multimengen $\{1,2\} = \{1,1,2\}$

Ein Paar (M,v), wobei M eine Menge und $r : M \to N$ heißt Multimenge

Idee: $m \in M$ kommt in der Multimenge r(m)-mal vor.

Anzahl der Elemente von $(\mathrm{M,v}) : \sum_{m \in M} \mathrm{v(m)}$

Schreibweise: Mit normalen Mengenklammern oder $\{\ \}$

Frage: Was ist die Anzahl der k-Multimenge von $N = \{1,...,n\}$

$$\left|\left\{(M,v) : M \subseteq N, \sum_{m \in M} v(m) = k\right\}\right| = \binom{n+k-1}{k}$$

Bijektion auf $\binom{1,...,n+k-1}{k}$

Schreiben die Multimengen als k-Tupel $(a_1, a_2,..., a_k)$ mit

$1 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_k \le n$

$f(a_1, a_2,..., a_k) = \{a_1, a_2 + 1, a_3 + 2,..., a_k + (k-1)\}$

$Bild\ f \subseteq \binom{\{1,...,n+k-1\}}{k}$

$g - f^{-1} : g(\{b_1 < b_2 < ... < b_k\}) = (b_1, b_2 - 1, b_3 - 2,..., b_k - (k-1))$

Die bisherigen Ergebnis erlauben es uns, folgende Probleme zu lösen:
Verteilung von Bällen auf Urnen:

N: Menge aller Bälle
R: Menge aller Urnen

	Beliebige Verteilung	$n \le r$ **injektiv**	**surjektiv**	n = r **bijektiv**
N **R**	$r^n = \lvert R\rvert^{\lvert N\rvert}$	$r^{\underline{n}} = r(r-1)(r-n+1)$	$r! S_{n,r}$	$r! = n!$
N(Nicht unterscheidbar) **R**	$\binom{r+n-1}{n}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N **R**(Nicht unterscheidbar)	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1	$S_{n,k}$	1
N(Nicht unterscheidbar) **R**(Nicht unterscheidbar)	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1	$P_{n,k}$	1

Permutationen

Permutationen von N Bijektionen SN $N = \{1,...,n\}$

$a_1, a_2,..., a_n$

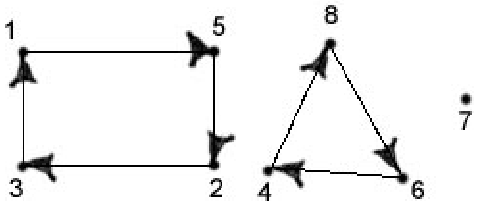
Permutationen können auf verschiedene Weisen dargestellt werden! Z.B.:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ \pi(1) & \pi(2) & ... & \pi(n) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 1 \to 3 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 2 \\ 4 \to 1 \end{array}$$

Es genügt deshalb durch ein „Wort“ $\pi(1)\pi(2)\pi(3)...\pi(n)$ zu schreiben
Aus der Algebra kennen wir ferner die Zyklendarstellung von π,

z.B.: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$



(1 5 2 3) = (2 3 1 5) = (5 2 3 1) = (3 1 5 2)
$\pi = (1523)(486)(7) = (1523)(486)$
$S_{n,k} = \left|\{\pi \in S_N \mid \pi \text{ hat genau } k \text{ Zyklen}\}\right|$
Die $S_{n,k}$ heißen die Stierlingzahlen erster Art.

Bsp.:

- $S_{n,1} = \frac{n}{n!} = (n-1)!$
- $S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$
- $\sum_{k=1}^{n} S_{n,k} = n! \quad (n \geq 1)$

Es sei nun $a_1...a_n$ eine Permutation der Zahlen 1, 2, ..., n
Ist $i < j$ und $a_i < a_j$, so heißt das Paar (a_i, a_j) eine Inversion von $a_1,...,a_n$

Bsp.:

2 4 1 3 Inversionen (2,1), (4,1), (4,3)
Inversionstafel $b_1 b_2 ... b_n$ von $a_1 a_2 ... a_n$
$b_j =$ Anzahl der Elemente links von j, die größer als j sind (= Anzahl der Inversionen mit 2.Komponente j)

Bsp.:

$$\begin{array}{cccccccccl} 5 & 9 & 1 & 8 & 2 & 6 & 4 & 7 & 3 & a_1,...,a_9 \\ 2 & 3 & 6 & 4 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & b_1,...,b_9 \end{array}$$

klar: $0 \leq b_1 \leq n-1,\ 0 \leq b_2 \leq n-1,\ ...,\ 0 \leq b_{n-1} \leq n-1,\ b_n = 0$

Satz: Die Permutation $a_1,...,a_n$ ist durch die Inversionstafel eindeutig bestimmt!

Man erhält $a_1,...,a_n$ aus $b_1,...,b_n$, indem man sukzessive die relative Position der Elemente $n, n-1, n-2,...,2,1$ (in dieser Reihenfolge) bestimmt.

Illustration am Beispiel:

	9								
$b_8 = 1$	9	8							
$b_7 = 2$	9	8	7						
$b_6 = 2$	9	8	6	7					
$b_5 = 0$	5	9	8	6	7				
$b_4 = 4$	5	9	8	6	4	7			
$b_3 = 6$	5	9	8	6	4	7	3		
$b_2 = 3$	5	9	8	2	6	4	7	3	
$b_1 = 2$	5	9	1	8	2	6	4	7	3

Bsp.: Bubblesort

Gegeben:

Ein Feld $a[1...n]$ mit n (verschiedenen) Zahlen

Gesucht:

Verfahren zur Sortierung des Feldes
d.h. nach Anwendung des Verfahrens gilt $a[1] < a[2] < ... < a[n]$
Bei Bubblesort wird das Feld mehrere male von links nach rechts durchlaufen

1. *Durchlauf von Bubblesort (BS):*
   $1 \le i \le n-1$: Falls $a[i] > a[i+1]$, so vertauschen wir $\mathrm{a[i]}$ und $\mathrm{a[i+1]}$, sonst ändern wir nichts
2. *Durchlauf von BS*
   Analog, nur für $1 \le i \le n-2$

   usw $\vdots$

Höchstens n-1 Durchläufe sind nötig
Wir brechen das Verfahren ab, falls bei einem Durchlauf keine Elemente mehr vertauscht werden

Bsp.:

(i) $n(n-1)(n-2)...2\ 1$
$(n-1)(n-2)...2\ 1\ n$
Anzahl der Durchläufe (n-1)
Anzahl der Vergleiche: $(n-1)+(n-2)+...+2+1 = \frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$

(ii)

1	**3**	**3**	**2**	**1**	**0**	**2**	**1**	**0**	
6	1	5	4	2	3	9	8	7	
0	**2**	**2**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	
1	5	4	2	3	6	8	7	9	1.*Durchlauf*
0	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
1	4	2	3	5	6	7	8	9	2.*Durchlauf*
0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	3.*Durchlauf*

Es gilt:

Satz $a_1'...a_n'$ mit Inversionstafel $b_1'..b_n'$ aus $a_1...a_n$ (mit Inversionstafel $b_1...b_n$) durch einen Durchlauf von Bubblesort entstanden, so gilt:

$$b_i' = \begin{cases} b_i - 1, \ falls\ b_i > 0 \\ 0, \ falls\ b_i = 0 \end{cases}$$

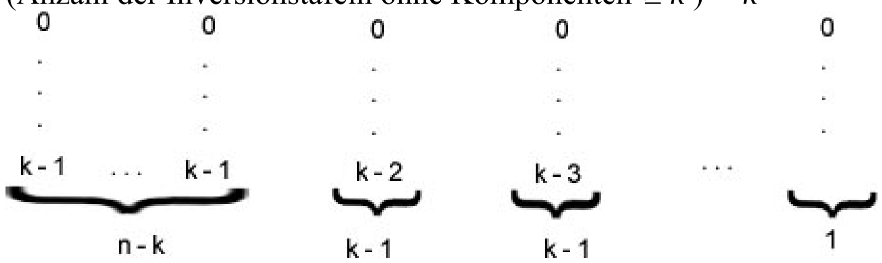
Beweis: Ist links von a_i ein größeres Element, so wird bei einem Durchlauf von Bubblesort $\max\limits_{j<i} a_j$ aus a_i vorbeigezogen, d.h. $b_{a_i}' = b_{a_i} - 1$.

Ist dies der nicht Fall, so ist $b_{a_i}' = b_{a_i} = 0$

Wie viele Permutationen gibt es, die höchstens k Durchläufe benötigen?

Antwort:

(Anzahl der Inversionstafeln ohne Komponenten $\geq k$) $= k^{n-k}$



genau k Durchläufe: $\left(\underbrace{k^{n-k} k!}_{a_k} - (k-1)^{n-(k-1)}(k-1)!\right) = A_k$

Durchschnittliche Anzahl von Durchläufen:

$$\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} A_k k =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k-1})k =$$

$$= \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n-1} k a_k - \sum_{k=1}^{n-1} k a_{k-1} =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k a_k - \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)a_k\right) =$$

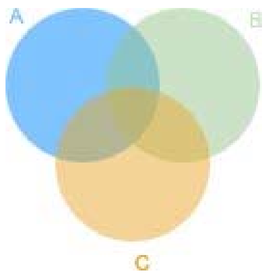
$$\underset{a_o=0}{=} \frac{1}{n!}\left((n-1)a_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-2} a_k\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(n a_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) =$$

$$= \frac{1}{n!}\left(n(n-1)(n-1)! - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right) =$$

$$= n-1- \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^{n-k}k!}{n!}}_{wig\ roß?\quad \sim\sqrt{\frac{\pi\cdot n}{2}}}$$

Prinzip von Inklusion und Exklusion



$$|A\cup B\cup C| =$$
$$|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

Satz: Es seien $A_1,\dots,A_n$ endliche Mengen, dann gilt:

$$|A_1\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}(A_i\cap A_j) + \sum_{1\le i<j\le n}(A_i\cap A_j\cap A_k) - + \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cup\ldots\cup A_n|$$

Beweis:

(i) Binomischer Lehrsatz:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$$

$$x=y=1:\quad 2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$$

$$x=1, y=-1:\quad 0=(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$$

(ii) Angenommen: $a\in\bigcup_{i=1}^{n}A_i$, ist genau k der Mengen $A_1,\dots,A_n$ enthalten.

Wie oft wird es links und rechts gezählt?

Links: Einmal

Rechts: In $\sum_i |A_i|$ k-mal

In $\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|\binom{k}{2}$

In $\sum_{1\le i<j<l\le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_l\right| \binom{k}{3}$

Insgesamt: $k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - + ... + (-1)^t \binom{k}{k}$

Wobei $t = \begin{cases} 1, k \text{ ungerade} \\ 0, k \text{ gerade} \end{cases}$

$$= 1 - \underbrace{\left(1 - k + \binom{k}{2} - \binom{k}{3} + - ... + (-1)^{t+1}\binom{k}{k}\right)}_{\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(-1)^j = (1-1)^k = 0}$$

$= 1$

Also wird a auch rechts einmal gezählt!

Bsp.: Derangement-Zahlen D_n

$D_n = \left|\{\pi \in S_n : \pi(i) = i + i \text{ für } 1 \le i \le n\}\right|$

$Ai = \{\pi \in S_n : \pi(i) = i\}, \quad 1 \le i \le n$

Es gilt:

$$n! - D_n = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

$$\left|\bigcap_{j\in J} A_j\right| = (n - |J|)!$$

$$\Rightarrow |A_1 \cup ... \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{n}{j}(n-j)!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + - ... + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}\right)$$

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + - ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

$$\frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e} \quad , e = 2{,}71.....$$

Inversion

Stierling-Zahlen erster $(S_{n,k})$ und zweiter Art $(S_{n,k})$

Es gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}} \qquad (S_{n,k} = 0 \text{ für } k > n)$$

$$(\mathrm{S}_{0,0} = 1,\ \mathrm{S}_{0,\mathrm{k}}\ (\mathrm{k} > 0), \mathrm{S}_{\mathrm{n},0} = 0 \text{ für } \mathrm{n} > 0)$$

$x \in \mathbf{N}$

Interpretiere die linke Seite als Anzahl der Funktionen von $N = \{1,...,n\}$ in $\{1,...,x\}$.

Löse nun folgendes Hilfsproblem:

Was ist die Anzahl der Abbildungen von N in $\{1,...,x\}$ mit $|Bild(f)| = k$?

Wir wissen bereits: Anzahl der surjektiven Abbildungen von N in $\{1,...,k\}$ ist $S_{n,k}\cdot k!$

Also: Wir können auf $\binom{x}{k}$ Weisen eine k-elementige Menge $B\subseteq\{1,...,x\}$ auswählen.

Dann gibt es $S_{n,k}\cdot k!$ Abbildungen von N in $\{1,...,x\}$ mit $Bild(f)=B$.

$\Rightarrow$ Anzahl der Abbildungen $f:N\to\{1,...,x\}$ mit

$$|Bild(f)|=k=\binom{y}{k}S_{n,k}k!=S_{n,k}\frac{x(x-1)(x-k+1)}{k!}k!=S_{n,k}x^{\underline{k}}$$

$$\Rightarrow \quad x^n=\sum_{k=0}^{n}S_{n,k}x^{\underline{k}}$$

Interpretieren beide Seiten als Polynome (festes n). Die Polynome auf der linken und rechten Seite der Gleichung stimmen an unendlich vielen Stellen überein (für jedes $x\in\mathbf{N}$). Dann müssen die Polynome aber sogar koeffizientenweise übereinstimmen.

Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen

$\mathrm{p(x)}\quad \mathrm{p}(\alpha)=0\quad \mathrm{p(x)}=(\mathrm{x}-\alpha)\mathrm{q(x)}+r(x)$

Für die Stierlingzahlen 2.Art gilt folgende Rekursion:

$\Rightarrow S_{n,k}=S_{n-1,k-1}+k\cdot S_{n-1,k}$ (n,k>0)

Bew*eis:* (Summenregel)

$N=\{1,...,n\},\ a\in N$ Klassifizieren die k-Zerlegung von N wie folgt:

-1.- {a} ist ein Block der Zerlegung

-2.- a ist in einem Block mit mindestens 2 Elementen enthalten

Entferne nun a. Was passiert?

Im Fall **–1.-**: Eine (k-1)-Zerlegung von $N|_{\{a\}}$ entsteht

Im Fall **–2.-**: Eine k-Zerlegung von $N|_{\{a\}}$ entsteht

Im Fall **–1.-** ist die entsprechende Abbildung eine Bijektion, d.h. jede (k-1)-Zerlegung von $N|_{\{a\}}$ entsteht genau einmal auf diese Weise (Anzahl: $S_{n-1,k-1}$).

Im Fall **–2.-** ist die entsprechende Abbildung „k zu 1“, d.h. jede k-Partition von $N|_{\{a\}}$ entsteht auf k verschiedenen k-Partitionen von N, also gibt es für den Fall –2.- $k\cdot S_{n-1,k}$ k-Zerlegungen von N.

$\Rightarrow S_{n,k}=S_{n-1,k-1}+k\cdot S_{n-1,k}$

Bsp.:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$\cdots$
$n=0$	1				
$n=1$	0	1			
$n=2$	0	1	1		
$n=3$	0	1	3	1	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

Entsprechend finden wir eine Rekursion für die Stierlingzahlen 1.Art:

$S_{0,0}=1,\ S_{0,k}=0\ (k>0),\ S_{n,0}=0\ (n>0)$

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + (n-1)\, S_{n-1,k} \quad (n,k > 0)$$

Beweis:

Es seien N und a wie oben.

Klassifizieren Permutationen mit genau k-Zyklen

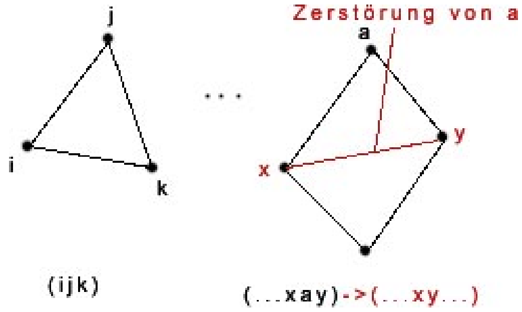
-1.- a ist ein Fixpunkt (Anzahl A_1)

-2.- a ist kein Fixpunkt (Anzahl A_2)

zerstöre a (!)

zu **–1.-** klar, dass $A_1 = S_{n,k}, k = 1$

zu –2.-



Wir erhalten eine Permutation von $N|_{\{a\}}$ mit k Zyklen

Wie oft kommt eine Permutation von $N|_{\{a\}}$ auf diese Weise zustande? Auf n-1 Weisen, da als Bild von a jedes Element von $N|_{\{a\}}$ in Frage kommt.

$$\Rightarrow A_2 = (n-1)\cdot S_{n-1,k}$$

$$S_{n,k} = \underbrace{S_{n-1,k-1}}_{A_1} + \underbrace{(n-1)S_{n-1,k}}_{A_2}$$

Bsp.: $S_{n,1} = (n-1)!,\ S_{n,n-1} = \binom{n}{2},\ S_{n,n} = 1$

$$\frac{S_{n,2}}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!}(S_{n-1,1} + (n-1)\cdot S_{n-1,2}) =$$

$$= \frac{(n-2)!}{(n-1)!} + \frac{S_{n-1,2}}{(n-2)!} = \frac{S_{n-1,2}}{(n-2)!} + \frac{1}{n-1} =$$

$$= \frac{S_{n-2,2}}{(n-3)!} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{n-1} = \cdots = \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1$$

$$\Rightarrow S_{n,2} = (n-1)!\cdot\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \cdots + \frac{1}{2} + 1\right) = (n-1)!\cdot \underbrace{H_{n-1}}_{(n-1)te harmonische Zahl}$$

Zeige nun: Für $x \in \mathbf{N}$ gilt:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot S_{n.k} \cdot x^k$$

Beweis:

$n = 0: \quad 1 = 1$ richtig, ebenfalls für n=1

Induktionsschluss: $n-1 \to n$

$$x^{\underline{n}} = x^{\underline{n-1}}(x-n+1) \underset{Ind.An.}{=} \left(\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \cdot S_{n-1.k} \cdot x^k\right)(x-n+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-1-k} \cdot S_{n-1,k} \cdot x^{k+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \cdot (n-1) \cdot S_{n-1,k} \cdot x^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} x^k \left\{ S_{n-1,k-1} + (n-1) S_{n-1,k} \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} x^k S_{n,k}$$

$\blacksquare$

Def.: Eine Basisfolge $(p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)...)$ ist eine Folge von Polynomen p_n mit $\mathrm{Grad}\,(\mathrm{p_n}) = \mathrm{n}$ für alle n (Insbesondere ist p_0 eine Konstante $\neq 0$)

z.B.: $p_n(x) = x^n$, $\mathrm{n} = 0,1,2,3,\dots$

$p_n(x) = x^{\underline{n}}$, $\mathrm{n} = 0,1,2,3,\dots$

$\Rightarrow 1, x, x(x-1), x(x-2), ...$

Die Polynome $p_0(x), p_1(x), ..., p_n(x)$ bilden eine Basis im Vektorraum $(Poly(n))$ aller Polynome vom Grad $\leq \mathrm{n}$.

Sind $(p_0(x), p_1(x), ...)$ und $(q_0(x), q_1(x), ...)$ Basisfolgen, so existieren Zahlen $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ mit

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k(x)$$

bzw. $p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} q_k(x)$

Wir nennen $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ die Zusammenhangskoeffizienten der Basisfolgen.

Sie bilden zwei (unendliche) untere Dreiecksmatrizen $(a_{n,k} = b_{n,k} = 0 \quad \textit{für } k > n)$.

Es sei $A = (aij)_{0 \leq i,j \leq n}$ und $B = (bij)_{0 \leq i,j \leq n}$ die entsprechenden $(\mathrm{n}+1)\mathrm{x}(\mathrm{n}+1)$-Matrizen.

Dann sind A und B invers zueinander, denn A beschreibt die identische Abbildung auf $poly(n)$ bezüglich der Basen $(q_0, q_1, q_2, ..., q_n)$ und $(p_0, p_1, p_2, ..., p_n)$ (bei Zeilenkonvention!) und B ebenfalls die Identität bezüglich $(p_0, p_1, p_2, ..., p_n)$ und $(q_0, q_1, q_2, ..., q_n)$.

Stierlingzahlen erster und zweiter Art sind also im wesentlichen die Zusammenhangskoeffizienten bzgl. der Basisfolgen $(1, x, x^2, x^3, ..., x^n, ...)$ und $(1, x, x(x-1)x(x-2), ..., x^{\underline{n}}, ...)$.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} S_{n,k} x^k$$

Satz: Sind (p_n) und (q_n) zwei Basisfolgen mit Zusammenhangskoeffizienten $a_{n,k}$ bzw. $b_{n,k}$, dann gilt für 2.Folgen $(u_0, u_1, u_2, .., u_n, ...)$, $(v_0, v_1, v_2, .., v_n, ...)$ von Zahlen.

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} u_k \text{ f.a.n (für alle n)} \Leftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} v_k \text{ f.a.n}$$

Beweis: A und B sind invers zueinander $\left(A\cdot(a_{ij})_{0\le i,j\le n},\quad B\cdot(b_{ij})_{0\le i,j\le n}\right)$, also gilt mit

$$u=\begin{pmatrix}u_0\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}v_0\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}:$$

$$v=Au \quad\Leftrightarrow\quad u=Bv$$

■

sogenannte Inversionsformel

Bsp: Binomial- Inversion

Binomischer Lehrsatz $(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Setzen ein: $a=(x-1),\quad b=1$

$$x^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x-1)^k$$

Basisfolgen: $1,x,x^2,\ldots$ und $1(x-1),(x-1)^2,\ldots$

$$(x-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(-1)^{n-k}$$

Satz: $v_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k$ f.a.n $\Leftrightarrow\quad u_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}v_k(-1)^{n-k}$

Ersetzen wir u_n durch $(-1)^n u_n$, so ergibt sich:

$$v_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k u_k \quad\Leftrightarrow\quad u_n(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k$$

$$\Leftrightarrow u_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}v_k$$

(symmetrische Form der Binomialinversion)

Bsp: Derangement-Zahlen D_n

$d(n,k)$: Anzahl der Permutationen mit genau k Fixpunkten (in S_n)

$d(n,0)$: D_n, $\quad d(n,k)=\binom{n}{k}D_{n-k}$

also $n!=\sum_{k=0}^{n}d(n,k)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_{n-k}\underset{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}{=}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}D_k$

Binomialinversion mit $u_n=D_n,\quad v_n=n!$ liefert

$$D_n=\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}k!\underset{\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}}{=}\sum_{K=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\frac{1}{(n-k)!}$$

$$\underset{k\ statt\ n-k}{=}n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$$

Rekursionen

Bsp.: Die Fibonacci-Folge: $f_0, f_1, f_2, \ldots$

$f_0 = 0,\ f_1 = 1, n \geq 2: f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55, ...

Euklidischer Algorithmus:

$154 = 2 \cdot 56 + 42$

$56 = 1 \cdot 42 + 14$

$42 = 3 \cdot 14 + 0$

1844 zeigte Gabriel Lamé:

Anzahl der Divisionen ≤ 5 (Anzahl der Ziffern der kleineren der beiden Zahlen)

Angenommen, wir brauchen n Divisionen für die Zahlen (a_{n+1}, a_n), d.h.

$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= m_n a_n + a_{n-1} \quad (a < a_{n-1} < a_n) \\
a_n &= m_{n-1} a_{n-1} + a_{n-2} \quad (a < a_{n-2} < a_{n-1}) \\
&\vdots \\
a_4 &= m_3 a_3 + a_2 \quad (a < a_2 < a_3) \\
a_3 &= m_2 a_2 + a_1 \quad (a < a_1 < a_2) \\
a_2 &= m_1 a_1
\end{aligned}
$$

$a_1 \geq \mathbf{1}, \quad a_2 \geq 2 \cdot 1 = \mathbf{2}, \quad a_3 \geq 1 \cdot 2 + 1 = \mathbf{3}, \quad a_4 \geq \mathbf{5},$ ... hier entsteht die Fibonacci-Folge

Benutzen wir nun mehrfach die Fibonacci-Rekursion

$$
\begin{aligned}
f_{n+5} &= f_{n+4} + f_{n+3} = 2 \cdot f_{n+3} + f_{n+2} = 3 \cdot f_{n+2} + 2 \cdot f_{n+1} = 5 \cdot f_{n+1} + 3 \cdot f_n \\
&= 8 \cdot f_n + 5 \cdot f_{n-1} = 13 \cdot f_{n-1} + 8 \cdot f_{n-2} = 21 \cdot f_{n-2} + 13 \cdot f_{n-3} > 20 \cdot f_{n-2} + 10 \cdot f_{n-3} \\
&= 10 \cdot (2 \cdot f_{n-2} + f_{n-3}) = 10 \cdot (f_{n-1} + f_{n-2}) = 10 \cdot f_n
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow f_{n+5}$ hat mindestens eine Ziffer mehr im Dezimalsystem

$0 < n \leq 5 \quad f_n$ hat nur eine Ziffer

$5 < n \leq 2 \cdot 5: \quad f_n$ hat ≥ 2 Ziffern

$2 \cdot 5 < n \leq 3 \cdot 5: \quad f_n$ hat ≥ 3 Ziffern

$\vdots$

$k \cdot 5 < n \leq (k+1) \cdot 5: \quad f_n$ hat $\geq (k+1)$ Ziffern

Betrachte beliebiges n: Dann gibt es ein k mit $k \cdot 5 < n \leq (k+1) \cdot 5$

$\Rightarrow f_n \geq (k+1)$ Ziffern

$a_n \geq f_n$: also hat a_n ebenfalls mindestens $(k+1)$ Ziffern

$5 \cdot$ (Anzahl der Ziffern von $a_n) \geq 5(k+1) \geq n$

Erzeugende Funktionen

Idee: Suche eine Folge $a_0, a_1, a_2, \ldots$. Fassen sie auf als Koeffizienten einer Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

Bsp.: $1 = a_0 = a_1 = a_2 = \ldots$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n + \ldots$$

$$1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$$

$$(1 - z)(1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n) = 1 + z^2 + z^3 + \ldots + z^n - (z + z^2 - 1 \cdot 2^n + 2^{n-1}) = 1 - z^{n+1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \text{ geometrische Reihe}$$

$$\begin{array}{l} (1 - z)(1 + z + z^2 + \ldots) = \\ \quad (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots) \\ \underline{-(\quad z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots)} \\ \quad 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + \ldots \end{array}$$

Bsp.: Fibonacci-Zahlen

$\mathrm{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}} \quad (\mathrm{n} \geq 2)$

$f_1 = 1,\ f_0 = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n = z + z^2 + 2 \cdot z^3 + 3 \cdot z^4 + \ldots$$

Drücke die Rekursion in einer Formel aus:

$f_n = 0$ für $n < 0$

Abkürzung: A sei eine Aussage

$$[\mathrm{A}] := \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ wahr} \\ 0, & \text{falls } A \text{ falsch} \end{cases}$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1] \quad (n \in \mathbf{Z})$$

Was sagt uns das über die Funktion $F(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} f_n z^n$?

$$F(z) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \underbrace{f_n}_{(f_{n-1} + f_{n-2} + [n=1])} z^n$$

$$= \sum_n f_{n-1} z^n + \sum_n f_{n-2} z^n + \sum_n [n = 1] z^n$$

$$= zF(z) + z^2 f(z) + z$$

lösen nach F(z) auf

$$f(z)(1 - z - z^2) = z, \quad f(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$

$$\frac{1}{(1 - z - z^2)} \overset{!}{=} \frac{a}{1 - \alpha z} + \frac{b}{1 - \beta z} \quad \textit{Partialbruchzerlegung}$$

mit $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$

Ermittlung von α, β, a, b:

$$\text{q(z)} = 1 - \text{z} - \text{z}^2, \quad q^R(z) = z^2 - z - 1 = z^2 \cdot q^R\left(\frac{1}{2}\right)$$

α *und* β sind die Nullstellen von $q^R(z)$

Allgemeiner:

$$q(x) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + ... + q_d z^d$$

$$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + q_2 z^{d-2} + ... + q_d = q\left(\frac{1}{2}\right) z^d$$

Sind $\alpha_1,...,\alpha_d$ die Nullstellen von $q^R(z)$, so ist

$$q^R(z) = (z - \alpha_1)....(z - \alpha_d) = z^d \cdot q\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$q(z) = z^d q^R\left(\frac{1}{2}\right) = z^d \cdot \left(\frac{1}{z} - \alpha_1\right)\left(\frac{1}{z} - \alpha_2\right)...\left(\frac{1}{z} - \alpha_d\right) = (1 - \alpha_1 z)(1 - \alpha_2 z)...(1 - \alpha_d z)$$

Im Beispiel:

$$q(z) = 1 - z - z^2, \quad q^R(z) = z^2 - z - 1 = \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$q(z) = (1 - \phi\, z)(1 - \hat{\phi}\, z) \quad \frac{z}{(1-\phi\, z)(1-\hat{\phi}\, z)} = \frac{a}{1-\phi\, z} + \frac{b}{1-\hat{\phi}\, z}$$

Lösung:

$$fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

Ziel dabei:

Lösung von linearen Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten:

$$a_{n+d} = q_1 \cdot a_{n+d-1} + q_2 \cdot a_{n+d-2} + ... + q_d \cdot a_n$$

Nützliche Potenzreihenentwicklungen:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}(-1)^{n-1}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ... + z^n + ... + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}$$

$$\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1} = (1+(-z))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \frac{(-1)(-2)...(-n)}{n!}}_{=:1} z^n$$

$$\frac{1}{(1-z)^d} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-d}{n}(-1)^n z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-d)(-d-1)...(-d+n-1)}{n!}(-1)^n z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{d(d+1)...(d-+-1)}{n!}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+d-1}{n}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+d-1}{d-1}z^n$$

$$\frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{1-\phi\, z} + \frac{b}{1-\hat{\phi}\, z} \quad \Diamond \quad a,b \in \mathbf{R}$$
$$(z-\phi)(z-\hat{\phi}) = z^2 - z - 1, \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \hat{\phi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$
$$1 - z - z^2 = (1-\phi\, z)(1-\hat{\phi}\, z)$$

$$\Diamond \cdot (1-\hat{\phi}\, z)$$
$$\frac{z}{(1-\phi\, z)\cancel{(1-\hat{\phi}\, z)}}\cancel{(1-\hat{\phi}\, z)} = \frac{a}{(1-\phi\, z)}(1-\hat{\phi}\, z) + \frac{b}{\cancel{(1-\hat{\phi}\, z)}}\cancel{(1-\hat{\phi}\, z)}$$
$$z = \frac{1}{\hat{\phi}}: \quad \frac{\frac{1}{\hat{\phi}}}{1-\frac{\phi}{\hat{\phi}}} = 0 + b$$
$$b = \frac{1}{\hat{\phi}-\phi} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Diamond \cdot (1-\hat{\phi}\, z), \; z = \frac{1}{\phi}: \quad \frac{\frac{1}{\phi}}{1-\frac{\hat{\phi}}{\phi}} = a$$
$$a = \frac{1}{\phi-\hat{\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\phi\, z} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{1-\hat{\phi}\, z} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\phi\cdot z)^k - \sum_{k=0}^{\infty}(\hat{\phi}\cdot z)^k\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\phi^k - \hat{\phi}^k\right)}_{F(k)}z^k$$

Es gilt folgender Satz:
Es sei $q_1,...,q_n$ eine feste Folge von (komplexen) Zahlen, $d \geq 1, q_d \neq 0$
$q(z) = 1 + q_1 z + ... + q_d z^d = (1-\alpha_1 z)^{d_1}(1-\alpha_2 z)^{d_2}...(1-\alpha_k z)^{d_k}$
$\alpha_1,...,\alpha_k$ sind dabei die paarweise verschiedenen Nullstellen von
$q^R(z) = z^d + q_1 z^{d-1} + ... + q_d = z^d q\left(\frac{1}{2}\right)$ mit Vielfachheiten $d_i, 1 \leq i \leq k$
Für $f : \mathbf{N} \to \mathbf{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

(A1) (Rekursion)
Für $n \geq 0$

$f(n+d)+q_1 f(n+d-1)+...+q_d f(n)=0$

(A2) $F(z)=\sum_{n\geq 0} f(n)z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$, wobei p(z) Polynom vom $Grad \leq d-1$

(A3) (Partialbruchzerlegung)

$\sum_{n\geq 0} f(n)z^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-d_i z)^{d_i}}$, wobei $g_i(z)$ Polynom vom $Grad \leq d_i - 1, \quad 1 \leq i \leq k$

(A4) (Explizite Lösung)

$f(n)=\sum_{i=1}^{k} p_i(n)\alpha_i^{\ n}$ mit $p_i(n)$ Polynom in n vom $Grad \leq d_i - 1, \quad 1 \leq i \leq k$

Beweis:

$v_i = \{f : \mathbf{N} \to \mathbf{C} : f \ erfüllt \ (A_i)\}, \quad 1 \leq i \leq 4$.

Jedes v_i ist ein Vektorraum (über **C**)

z.B. für v_2:

$$\sum_n f(n)z^n = \frac{p(z)}{q(z)}; \sum_n g(n)z^n = \frac{h(z)}{q(z)}$$

$$\sum_n (f(n)+g(n))z^n == \frac{p(z)}{q(z)} + \frac{h(z)}{q(z)} = \frac{p(z)+h(z)}{q(z)}$$

$$\sum_n \alpha \ f(n)z^n = \frac{\alpha \ p(z)}{q(z)}$$

Außerdem: Jedes v_i hat die Dimension d.

$f(n+d) = -q_1 f(n+d-1) - ... - q_d f(n)$

f ist durch $f(0), f(1),..., f(d-1)$ festgelegt, $f(t),..., f(d-1)$ sind „frei wählbar".

Benutzen aus der linearen Algebra:

Ist $v_i \subseteq v_j$, *so ist* $v_i = v_j$

(gilt für endlichdimensionale Vektorräume v_i, v_j gleicher Dimension)

(a) $v_2 \subseteq v_1$: Es sei $f \in v_2$, d.h.

$\sum_n f(n)z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$, also $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n = p(z)$

$(1+q_1 z + q_2 z^2 + ... + q_d z^d)(f(0)+f(1)z+f(2)z^2+...+f(n)z^n+...) = p(z)$

Machen einen Koeffizientenvergleich für $z^{d+n} \quad (n \geq 0)$

$1 \cdot f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + q_2 f(n+d-2) + ... + q_d f(n) = 0$

also $f \in v_1$, d.h. $v_2 \subseteq v_1$, d.h. $v_2 = v_1$

(b) $v_3 \subseteq v_2$: $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} g_i(z) \cdot \prod_{j \neq i} (1-\alpha_j z)}{\underbrace{\prod_{i=1}^{k} (1-\alpha_i z)^{d_i}}_{q(z)}}$ $\Leftrightarrow$ Grad < d

$$= \frac{p(z)}{q(z)}, Grad(p) < d$$

$$v_3 = v_2 = v_1$$

© $v_3 \subseteq v_4$:

$$\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d_i}{n} (-\alpha_i z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{d_i+n-1}{d_i-1} \alpha_i{}^n z^n$$

$$g_i(z) = g_0{}^{(i)} + g_1{}^{(i)} z + ... + g_{d_i-1}{}^{(i)} z^{d_i-1}$$

$$\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}} = \sum_{j=0}^{d_i-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_j{}^{(i)} z^j \binom{d_i+n-1}{d_i-1} \alpha_i{}^n z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{d_i-1} g_j{}^{(i)} \binom{d_i+n-1}{d_i-1} \alpha_i{}^n z^{n+j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_j{}^{(i)} \binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \alpha_i{}^{n-j} \right) z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{j=0}^{d_i-1} g_j{}^{(i)} \binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \alpha_i{}^{-j} \right)}_{p_i(n) \text{ Polynom in } n \text{ vom Grad} < d_i} (\alpha_i z)^n$$

$\Rightarrow v_3 \subseteq v_4$, also $v_1 = v_2 = v_3 = v_4$

Beispiel:

$$a_0 = a_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n \quad (n \geq 2)$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$(-1)^n$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
a_n	1	1	4	5	14	23	52	97

1 Rekursion $(a_n := 0 \ \mathit{für}\ n < 0)$

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n [n \geq 0] + [n = 1]$$

$$(n = 1 : \vee , \quad n = 0 : \vee)$$

$$\mathrm{A(z)} = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{a_n z^n}$$

$$\mathrm{A(z)} = \sum_{\mathrm{n}} \mathrm{a_{n-1} z^n} + 2\sum_{\mathrm{n}} \mathrm{a_{n-2} z^n} + \sum_{n} (-1)^n [n \geq 0] z^n + \sum_{n} [n-1] z^n$$

$$A(z) = z \cdot A(z) + 2 \cdot z^2 A(z) + \frac{1}{1+z} + z$$

$$A(z)(1-z-2z^2) = \frac{1+z+z^2}{1+z}$$
$$A(z) = \frac{1+z+z^2}{(1-z-2z^2)(1+z)} = \frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2}$$

Nach unserem Satz:

$a_n = \gamma_1 \cdot 2^n + (\gamma_1 + \gamma_3 n)(-1)^n$

Erhalten durch einsetzen:

$\gamma_1 = \frac{7}{9}, \gamma_2 = \frac{2}{9}, \gamma_3 = \frac{1}{3}$

$a_n = \frac{7}{9}2^n + \left(\frac{1}{3}n + \frac{2}{9}\right)(-1)^n$

$\Rightarrow$ Problem der Klammerungen:

$x_0, x_1, \ldots, x_n$

Auf wie viele Weisen kann man Sinnvoll klammern?

$x_0 x_1$	$(x_0 x_1) x_2$	$(x_0 x_1)(x_2 x_3)$
	$x_0 (x_1 x_2)$	$x_0 (x_1 (x_2 x_3))$
		$x_0 ((x_1 x_2) x_3)$
		$((x_0 x_1) x_2) x_3$
		$(x_0 (x_1 x_2)) x_3$

Bemerkung

Lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten kann man auch mit Hilfe von Methoden aus der linearen Algebra lösen.

Bsp: $F_0 = 0, F_1 = 1$

$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ (n \geq 2)$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Unabhängig von } n} \begin{pmatrix} F_{n-1} \\ F_{n-2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} F_1 \\ F_0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} F_n \\ F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Potenzen einer Matrix kann man für Diagonalmatrizen leicht berechnen

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T \qquad \text{, so ist}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = \left(T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} T \right) = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{pmatrix} T$$

Bsp.: Catalan-Zahlen

Gegeben: $\mathrm{n}+1$ Variablen $x_0, x_1, ..., x_n$

Auf wie viele Weisen kann das Produkt $x_0 \cdot x_1 \cdot ... \cdot x_n$ korrekt geklammert werden?

$C_0 = 1, C_1 = 1$

$n = 2,$ $\quad (x_0 x_1) x_2$, $\quad x_0 (x_1 x_2)$ $\qquad C_2 = 2$

$n = 3$ $\quad (x_0 x_1)(x_2 x_3)$, $\quad x_0 (x_1 (x_2 x_3))$, $\quad x_0 ((x_1 x_2) x_3)$, $\quad ((x_0 x_1) x_2) x_3$, $\quad (x_0 (x_1 x_2)) x_3$ $\qquad C_3 = 5$

Rekursion für die $\mathrm{C_n}$:

Beobachtung: Es gibt genau eine Multiplikation deren Punkt außerhalb aller Klammern steht, nämlich die letzte, falls $n > 0$.

Angenommen, dieser letzte Multiplikationspunkt steht zwischen x_k und x_{k+1}

$$\underbrace{(x_0 ... x_k)}_{C_k} \underbrace{(x_{k+1} ... x_n)}_{C_{k-1-k}}$$

Dann gibt es C_k Möglichkeiten $x_0 ... x_k$ zu klammern und C_{n-1-k} Möglichkeiten $x_{k+1}, ..., x_n$ zu klammern, also

$$C_n = \underbrace{C_0 \cdot C_{n-1}}_{k=0} + C_1 \cdot C_{n-2} + C_2 \cdot C_{n-3} + ... + C_{n-1} \cdot C_0 \quad (n > 0)$$

Erzeugende Funktionen einsetzen:

Erweitern der Rekursion für beliebige $n \in \mathbf{Z}$

$$C_n = 0 \quad (n < 0)$$

$$C_n = \sum_k C_k C_{n-1-k} + [n = 0] \quad \Big| \cdot z^n \qquad \text{aufsummieren!}$$

$$C(z) = \sum_k C_n z^n = \left(\sum_n z^n \sum_k C_k C_{n-1-k} \right) + \underbrace{\sum_n [n = 0] z^n}_{1}$$

$$C(z) = z \sum_n \sum_k C_k z^k C_{n-1-k} z^{n-1-k} + 1$$

$$= z \cdot C(z) \cdot C(z) + 1$$

Ergebnis: *Quadratische Gleichung für $C(z)$*

$$C(z) = z \cdot C^2(z) + 1 \qquad C^2(z) - \frac{1}{z} C(z) + \frac{1}{z} = 0$$

$$C(z) = \frac{1}{2z} \pm \sqrt{\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2z} \pm \frac{1}{2z}\sqrt{1-4z}$$

Nebenrechnung

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\sqrt{1-4z} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{z}}{n} (-4z)^n =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{z}-n+1\right)}{n!} (-1)^n 2^n z^n z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1(z-1)\ldots(-zn+3)}{n!} (-1)^n 2^n z^n$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n-1} \frac{(2n-3)(2n-5)\ldots 3 \cdot 1}{n!} 2^n z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)\ldots 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{n! \cdot (n-1)!} 2 \cdot z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-2)!}{n! \cdot (n-1)!} 2 \cdot z^n$$

$$= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} \frac{1}{n+1} 2 \cdot z^{n+1} \qquad \aleph$$

$\aleph$ =

wählen das Minuszeichen, da der Koeffizient von 2^{-1} Null drin muss:

$$C(2) = \frac{1}{2z}\left(1 - \left[1 - \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} 2z^{n+1}\right]\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{n+1} z^n$$

$$C(2) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$$

Anderer Trick

Benutze erzeugende Funktion eines anderen Typs, z.B. erzeugende Funktion vom Exponentialtyp

Vorher (gewöhnliche erzeugende Funktion)

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n = F(z)$$

Jetzt (exp.) erzeugende Funktion

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \frac{z^n}{n!} = \hat{F}(z)$$

Unterschied liegt in der Multiplikation

$$A(z) = \sum_n a_n z^n, \quad B(z) = \sum_n b_n z^n$$

$$A(z)B(z) = \sum_n c_n z^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-a}$$

$$\hat{A}(z) = \sum_n \frac{a_n}{n!} z^n, \quad \hat{B}(z) = \sum_n \frac{b_n}{n!} z^n$$

$$\hat{A}(z)\hat{B}(z) = \sum_n z^n \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-a}}{(n-k)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\underbrace{\binom{n}{k} a_k b_{n-k}}_{c_n} \right) \frac{z^n}{n!} = \hat{C}(z)$$

Die C_n heißen Binomialfaltung von (a_k) und (b_k)

Bsp.: $e^{az} = \sum_n \frac{a^n z^n}{n!} e^{bz} = \sum_n \frac{b^n z^n}{n!}$

$$e^{az} e^{bz} = e^{(a+b)z} = \sum_n \frac{(a+b)^n z^n}{n!}$$

Die Folge $(a+b)^n \quad n = 0,1,\ldots$ muss also die Binomialfaltung von (a_k) und (b_k) sein, d.h.

$(a+b)n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ binomischer Lehrsatz

Bsp.: $\sum_n a^{\underline{n}} \frac{z^n}{n!} = \sum_n \binom{a}{n} z^n = (1+z)^a$

$\sum_n b^{\underline{n}} \frac{z^n}{n!} = (1+z)^b \qquad\qquad (1+z)^a (1+z)^b = (1+z)^{a+b}$

$$= \sum_n (a+b)^{\underline{n}} \frac{z^n}{n!}$$

$$\sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} a^{\underline{h}} b^{\underline{n-h}} = (a+b)^{\underline{n}}$$

Bsp.: **Derangement Zahlen:** D_n

Bekannt: $n! = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} D_{n-k} = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} D_n \cdot 1$

$$\underbrace{\sum_k n!\frac{z^n}{n!}}_{\frac{1}{1-z}} = \underbrace{\left(\sum_n 1\cdot\frac{z^n}{n!}\right)}_{e^z}\underbrace{\left(\sum_n D_n\frac{z^n}{n!}\right)}_{\hat{D}(z)}$$

$$\frac{1}{1-z} = e^z\cdot\hat{D}(z) \qquad\qquad \hat{D}(z) = e^{-z}\cdot\frac{1}{1-z} = \left(\sum_n (-1)^n\frac{z^n}{n!}\right)\cdot\left(\sum_n z^n\right)$$

$$= \sum_n z^n\left(\sum_{h=0}^{n}\frac{(-1)^h}{h!}\right) = \sum_n\frac{z^n}{n!}\underbrace{\left(n!\sum_{h=0}^{n}\frac{(-1)^h}{h!}\right)}_{D_n}$$

Was passiert bei Differentation und Integration?

Gew. erzeugende Funktion: $(a_n)\to A(z)$

$$A'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n$$

$$(a_n)\to\left(1\cdot a_1, 2\cdot a_2, 3\cdot a_3, ..., I = \left((n+1)a_{n+1}\right)_{n=0}^{\infty}\right)$$

$$(a_n)\to\hat{A}(z) = \sum_n a_n\frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{d}{dz}\hat{A}(z) = \sum_n na_n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_n a_{n+1}\frac{z^n}{n!}$$

$(a_0, a_1, a_2, ...)\to(a_1, a_2, a_3, ...)$ „Shift“

Analog bei Integration

$$\int_0^z\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n t^n\right)dt = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}z^{n+1} = \sum_{n\geq 1}\frac{a_{n-1}}{n}z^n$$

$$(a_n)\to\left(0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \ldots\right)$$

$$\int_0^z\left(\sum_{n\geq 0}a_n t^n\frac{1}{n!}\right)dt = \sum_{n\geq 0}a_n\frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 1}a_{n+1}\frac{z^n}{n!}$$

$$(a_n)\to(0, a_0, a_1, ...)$$

Bsp: Bonoulli-Zahlen

Rekursion für die Bonoulli-Zahlen

$$\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+1}{j}B_j n = [m=0] \quad g.a.\ m\geq 0$$

$n = m+1$:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}B_j = [n=1]$$

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}B_j = [n=1]+B_n$$, für alle $n\geq 0$

$\Rightarrow$ *für* $\hat{B}(z) = \sum_j B_j\frac{z^j}{j!}$ bedeutet dies:

$$\hat{B}(z)e^{z} = z + \hat{B}(z).$$

$$\hat{B}(z) = \frac{z}{e^{z}-1}$$

Anwendung

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$ Polynom von Grad 3 in n

$$S_n(n) = 0^n + 1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n = \sum_{0\le k<n} k^n$$

Gibt es eine Formel für $S_n(n)$?

$$S_0(n) = n$$

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$$

$$S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

$$S_3(n) = \frac{1}{4}n^4 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$$

$$\vdots$$

$$S_{10}(n) = \frac{1}{12}n^{11} - \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{5}{66}n$$

Versuchen das Problem mit erzeugenden Funktionen anzugeben

$$\sum_{m\ge0} S_m(n)z^m = \sum_{m\ge0}\sum_{0\le k<n} k^m z^m = \sum_{m\ge0}\sum_{0\le k<n}(kz)^m = \sum_{0\le k<n}\sum_{m\ge0}(kz)^m = \sum_{0\le k<n}\frac{1}{1-kz}$$

Problem: Werden die Summe nicht los!

Exponentielle erzeugende Funktion

$$\hat{S}(z,n) = \sum_{m\ge0} S_m(n)\frac{z^m}{m!} = \sum_{m\ge0}\sum_{0\le k<m} k^m \frac{z^m}{m!}$$

$$= \sum_{0\le k<m}\sum_{m\ge0}\frac{(kz)^m}{m!} = \sum_{0\le k<m} e^{kz} = \sum_{k=1}^{n-1}(e^z)^k \underbrace{=}_{1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{q^n-1}{q-1}} \frac{(e^n)^z-1}{e^n-1} = \frac{e^{nz}-1}{e^n-1}$$

$$\hat{S}(z,n) = \frac{e^{nz}-1}{e^n-1} = \hat{B}(z)\frac{e^{nz}-1}{z}$$

Daraus folgt:

$$\hat{S}(z) = \left(B_0\frac{z^0}{0!} + B_1\frac{z^1}{1!} + B_2\frac{z^2}{2!} + \ldots\right)\cdot\left(n\frac{z^0}{1!} + n^2\frac{z^1}{2!} + n^3\frac{z^2}{3!} + \ldots\right)$$

also:

$$\frac{S_m(n)}{m!} = B_0 \frac{n^{m+1}}{(m+1)!\cdot 0!} + B_1 \frac{n^m}{m!\cdot 1!} + \ldots + B_m \frac{n^1}{1!\cdot n!}$$

$$S_m(n) = m!\left(B_0 \frac{n^{m+1}}{(m+1)!\cdot 0!} + B_1 \frac{n^m}{m!\cdot 1!} + \ldots + B_m \frac{n^1}{1!\cdot n!} \right) =$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(B_0 n^{m+1} + \binom{m+1}{1} B_1 n^m + \ldots + \binom{m+1}{n} B_m n \right)$$

Bemerkung zu anderen Typen von Rekursionen

$f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) \quad < 0 \quad (n \geq 0) \qquad (\nabla)$

$q^R(z)$ Nullstellen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$

$\sum n\alpha_i^{\,n}$ falls Nullstellen einfach

$\alpha^n (an+b)$

$\alpha^n (an^2 + bn + c)$

Manchmal kommen Rekursionen des folgenden Typs vor:

$f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) = g(n) \quad (n \geq 0) \qquad (\Diamond\Diamond)$

inhomogene lineare Differenzgleichung mit konstanten Koeffizienten

Allgemeine Lösung von $(\Diamond\Diamond)$ erhalten wir, indem wir eine spezielle Lösung von $(\Diamond\Diamond)$ nehmen und alle Lösungen von (∇) dazu addieren.

Falls $g(n)$ ein Polynom in n ist, so kann eine spezielle Lösung von $(\Diamond\Diamond)$ an einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für ein Polynom des gleichen Grades ermittelt werden.

Bsp.:

$f_{n+2} - f_{n+1} - f_n = n^2$

Ansatz: $\qquad f_n = an^2 + bn + c$

$\left(a(n+2)^2 + b(n+2) + c\right) - \left(a(n+1)^2 + b(n+1) + c\right) - \left(an^2 + bn + c\right)$

$= -an^2 + n(2a-b) + 3a + b - c = n^2$

$a = -1, \quad b = -2, \quad c = 3(-1) + (-2) = -5$

$f_n = -n^2 - 2n - 5$ spezielle Lösung

Allgemeine Lösung:

$$\underbrace{\left(A\phi^n + B\hat{\phi}^n\right)}_{\text{Lösung von } (\nabla)} \underbrace{- n^2 - 2n - 5}_{\left(\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2},\ \hat{\phi} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}$$

2.- Variable Koeffizienten $(q_i = q_i(n))$

keine allgemeine Lösung möglich

Spezialfall

$a(n) f(n) = b(n) f(n-1) + c(n) \quad (n \geq 1)$

Trick Summationsfaktor

Multipliziere beide Seiten mit $F(n) = \dfrac{\prod_{i=1}^{n-1} a(i)}{\prod_{j=1}^{n} b(j)}$

$$\frac{a(1)\cdot a(2)\cdot \ldots \cdot a(n-1)}{b(1)\cdot b(2)\cdot \ldots \cdot b(n-1)} \quad (n \geq 1) \quad F(1) = \frac{1}{b(1)}$$

Dies verändert die Rekursion:

$g(n) = g(n-1) + F(n) + c(n)$

$g(n) = b(n+1)\cdot F(n+1)\cdot f(n)$

$$b(n+1) = \frac{a(1)\cdot a(2)\cdot \ldots \cdot a(n-1)}{b(1)\cdot b(2)\cdot \ldots \cdot b(n-1)\cdot b(n+1)} f(n) = F(n)a(n)f(n)$$

Lösung für $g(n)$

$$y(n) = y(0) + \sum_{i=1}^{n} F(i)c(i)$$

also $b(n+1)F(n+1)f(n) = b(1)F(1)f(0) + \sum_{i=1}^{n} F(i) + c(i)$

$$f(i) = \frac{f(0) + \sum_{i=1}^{n} F(i) + c(i)}{b(n+1)F(n+1)}$$

Bsp: Analyse von QuickSort

Beschreibung des Verfahrens

Es seien die Elemente von $n[1],\ldots,n[m]$ zu sortieren

1. Wähle im Element auf, (etwa $n[1]$ oder ein zufällig gewähltes Element), das sogenannte Pivotelement
2. Vergleiche es mit allen anderen Elementen und partitioniere die Elemente in diejenigen, die kleiner und in diejenigen, die größer als das Pivotelement sind (n-1) Vergleiche
3. Sortiere diese beiden Teilfelder ebenso weiter

   Bsp.:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\downarrow & & & & & & & & \downarrow \\
6 & \underline{2} & 1 & 5 & 8 & 9 & 4 & 3 & \underline{7} \\
 & \downarrow & & & & & & & \downarrow \\
6 & 7 & \underline{1} & 5 & 8 & \underline{9} & 4 & 3 & 2 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
6 & 7 & 9 & 5 & \underline{8} & 1 & 4 & 3 & 2 \\
 & & & \downarrow & \downarrow & & & & \\
6 & |\,7 & 9 & 8 & |\,5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\
 & & > 6 & & & & < 6 & &
\end{array}$$

Anzahl der Vergleiche im worst-case:

$$(n-1)+(n-2)+(n-3)+...+2+1 = \binom{n}{2}$$

tritt ein wenn jedes Mal eine der beiden Zerlegungsklassen leer ist, d.h. wenn das Pivotelement jedes Mal das größte oder das kleinste der verbleibenden Elemente ist.

Es sei nun Q_n die durchschnittliche Anzahl der Vergleiche.

$$Q_n = \underbrace{n+1}_{Knuthsche\ \mathrm{Im}\ plementierung} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Q_{i-1}+Q_{n-i})$$

$$= n+1+\frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1}Q_i$$

$$nQ_n = n^2 + n + 2\sum_{i=0}^{n-1}Q_i$$

$$(n+1)Q_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1) + 2\sum_{i=0}^{n-2}Q_i$$

Subtrahieren:

$$nQ_n - (n-1)Q_{n-1} = 2Q_{n-1} + 2n$$

$$nQ_n = (n+1)Q_{n-1} + 2n \quad Q_0 = 0$$

$$a(n)f(n) = b(n)f(n-1) + (n)$$

$$Q_n = \frac{Q_0 + \sum_{i=1}^{n} F(i)2i}{(n+2)F(n+1)}$$

$$F(n) = \frac{a(1)...a(n-1)}{b(1)...b(n)} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot ....\cdot (n-1)}{2\cdot 3\cdot ...\cdot (n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

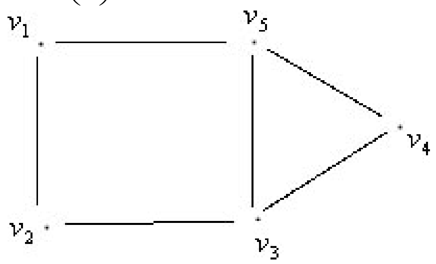
$$Q_n = \frac{2\cdot \sum_{i=1}^{\wedge}\frac{i}{2(i+1)}}{(n+2)\frac{1}{(n-1)(n+2)}} = 2(n+1)\sum_{i=1}^{\wedge}\frac{1}{i+1} = \underline{\underline{2(n+1)(H_{n+1}-1)}}$$

Graphentheorie

Was ist ein Gaph?

Def.: Ein Paar $G = (v, E)$ disjunkter, endlicher Mengen wobei

$$E \in \binom{v}{2} = \{\{v, w\} | v \neq w, v, w \in V\}$$



$v = \{v_1, \ldots, v_5\}$

$E = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_5\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_3, v_5\}\}$

Elemente von V heißen Punkte, Knoten, Verticer, Ecken

Elemente von E heißen Kanten (englisch: edges)

Statt $\{v_1 v_2\} \in E$ schreiben wir oft einfach $v_1 v_2$

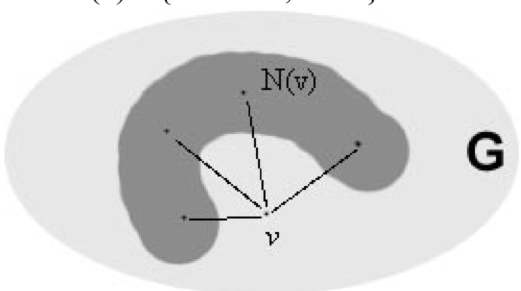
Sprechweise:

$\{v_1 v_2\} \in E$ heißt: v_1 und v_2 sind (in G) verbunden, benachbart, adjazent

v_1 inzidiert mit der Kante $v_1 v_2$

sei die Menge der Nachbarn von $v \in V$,

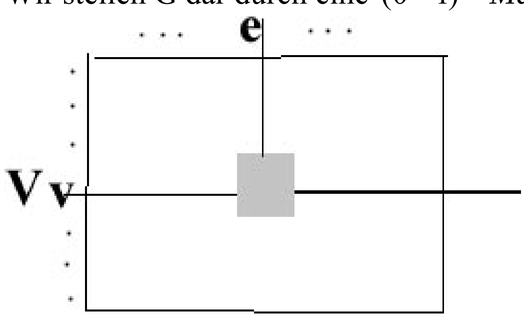
d.h. $N(v) = \{u \in U : v, u \in E\}$



Die Anzahl der Nachbarn von v heißt der Grad von v, $d(v) = d_G(v)$.

Satz: In jedem Graphen ist die Anzahl der Punkte ungeraden Grades gerade

Beweis: Wir stellen G dar durch eine $(0-1)-Matrix$, seine sogenannte Inzidenzmatrix



$$[v \in e] = \begin{cases} 1, v \in e \\ 0, v \notin e \end{cases}$$

Bsp.:

	v_1v_2	v_1v_3	v_3v_4	v_2v_5	v_4v_5	v_3v_5
v_1	1	1	0	0	0	0
v_2	1	0	0	1	0	0
v_3	0	1	1	0	0	1
v_4	0	0	1	0	1	0
v_5	0	0	0	1	1	1

Doppelte Abzählung für die Einsen in der Inzidenzmatrix:
Summe aller Einsen= Summe aller Zeilensummen = $\sum_{v\in V} d(v)$

Andererseits: Summe aller Einsen = Summe aller Spaltensummen

$= \underbrace{(E)}_{\substack{\text{Anzahl}\\ \text{der}\\ \text{Spalten / Kanten}}} \cdot 2$

$\Rightarrow \sum_{v\in V} d(v)$ ist eine gerade Zahl

$\Rightarrow$ Anzahl alle v mit $d(v)$ ungerade ist gerade.

Bemerkung:

In jedem Graphen gibt es zwei Punkte, die den gleichen Grad haben.
Angenommen $v = \{v_1, ...v_n\}$
Als Grade kommen in Frage die Zahlen $0,1,2,3,...,(n-1)$ und die Grade o und n-1 schließen sich aus.
Aus dem Schubfachprinzip folgt die Behauptung

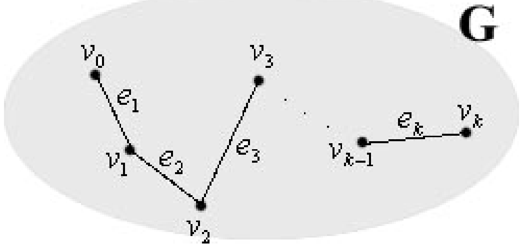
Aufgabe:

Peter hat bemerkt, dass jeder seiner 25 Mitschülern eine unterschiedliche Zahl von Freunden in seiner Klasse hat.
Wie viele Freunde hat Peter selbst?
(Man bestimme alle Lösungen).

Einige Grundbegriffe, anschaulich erklärt:

Weg:

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$, wobei
$e_i = v_{i-1}v_i \in E, \quad v_1, ..., v_k \in V$ alle $v_1, ..., v_k$ verschieden.



„path“

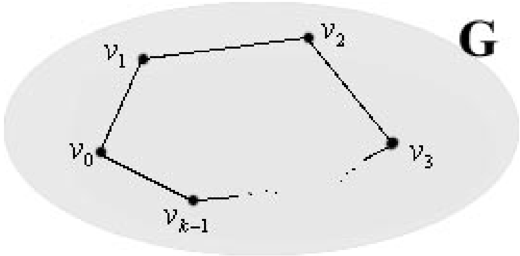
Hamiltonscher Weg:

Alle Punkte von G werden durchlaufen $\{v_0, ..., v_k\} = V$

Kreis:

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$

$e_i = v_{i-1}v_i \in E, \quad v_k = v_0, \quad v_1, ..., v_k$ alle verschieden



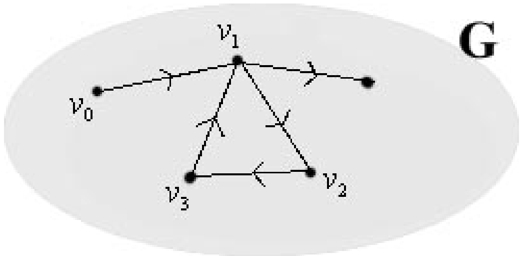
Hamiltonkreis:

$V = \{v_1, ..., v_k\}$

Kantenzug:

$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$

v_i nicht notwendigerweise verschieden die e_i aber wohl



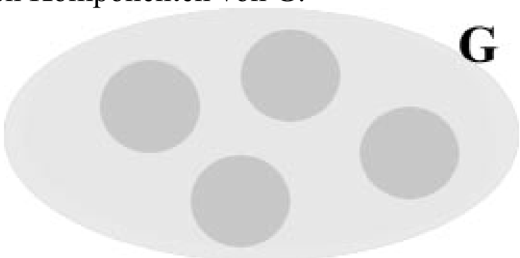
Punkte dürfen mehrfach besucht werden, Kanten aber nur einmal benutzt werden.

$\Rightarrow$ („trail“) geschlossen, falls $v_k = v_0$

Kantenfolge:

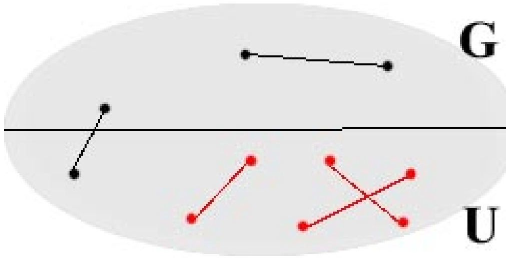
$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$ wie oben, jedoch dürfen Punkte und Kanten mehrfach vorkommen („walk“)

G heißt zusammenhängend (zshg), falls zu je zwei Punkten $u, v \in V$ in G ein $(u - v)$-Weg existiert.
Ist G nicht zusammenhängend, so zerfällt G in maximal zusammenhängende „Teilgraphen“, die sogenannten Komponenten von G.



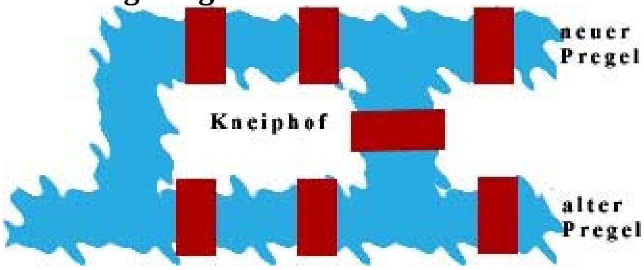
H heißt dabei Teilgraph von $G = (v, E) \quad H = (u, F)$, falls $U \subseteq V$, $F \subseteq E$

H heißt induzierter Untergraph von G, falls $F = E \cap \binom{U}{2}$



Das Königsberger Brückenproblem

Skizze der Königsberger Brücken im 18.Jahrhundert



Frage:

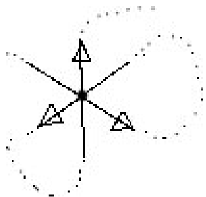
Kann man einen Spaziergang machen, so dass man über jede Brücke genau einmal geht und zum Ausgangspunkt zurückkehrt?
Leonhard Euler hat diese Frage in viel größerer Allgemeinheit gelöst.
Ein Kantenzug heißt *Eulersch*, falls darin jede Kante genau einmal durchlaufen wird.
Ein geschlossener Eulerscher Kantenzug heißt *Euler-Tour*. G heißt Eulersch, falls G eine Euler-Tour besitzt.

Satz: (L. Euler, 1736)
Ein zusammenhängender Graph ist Eulersch g.d.w. alle seine Grade gerade sind.

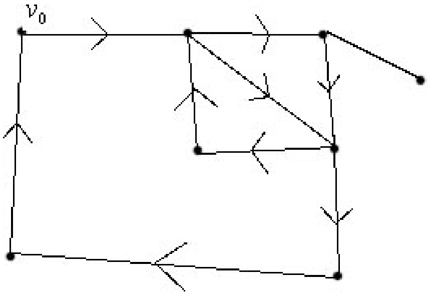
Beweis

(a)

G sei Eulersch, $v \in V$ beliebig wird v bei Durchlaufung der Euler-Tour k-mal besucht, so ist $d(r) = 2 \cdot k$.



(b) Nun seien alle Geraden von G gerade.
$v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, e_3, v_3, ..., v_{k-1}, e_k, v_k$ sei ein Kantenzug [$(e_1,...,e_k)$ verschieden] mit maximal k (Länge = k). Dann muss $v_0 = v_k$ sein, denn anderenfalls wäre eine ungerade Anzahl der Kanten $(e_1,...,e_k)$ mit v_k inzident und der Kantenzug könnte verlängert werden



Angenommen, es gibt noch eine Kante $e \in E$, die nicht zu $(e_1,...,e_k)$ gehört. Da G zusammenhängend ist, können wir o.B.d.A. annehmen, dass e mit einem der Punkte $v_0, v_1, v_2,..., v_{k-1}$ inzidiert, etwa mit v_i

Wir setzen nun $\mathrm{v}_{\mathrm{i,e}}$ zu einem Kantenzug maximaler Länge in $\underbrace{G - \{e_1,...,e_k\}}_{G'}$ fort

Etwa $v_i, e, u_1, f_1, u_2,..., u_{l-1}, f_{l-1}, u_l$

Weil in G' ebenfalls alle Grade gerade sind, muss also $u_l = v_i$

Der Kantenzug

$v_0, e_1, v_1,..., e_i, v_i, e, u_1, f_1, u_2,..., u_{l-1}, f_{l-1}, v_i, e_{i+1}, v_{i+1},..., e_k, v_o$

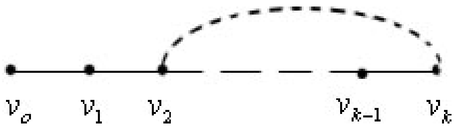
besteht dann aus lauter verschiedenen Kanten und hat Länge $k + l > k$.

WIDERSPRUCH!

Definition: Ein zusammenhängender Graph ohne Kreise heißt ein **Baum**

Satz: Ein Baum mit n Punkten hat immer n-1 Kanten

Beweis: Angenommen, nicht. Dann wählen wir ein Gegenbeispiel $T = (V, E)$ mit minimalem n. In T sei $v_o, v_1, v_2,... v_{k-1}, v_k$ ein Weg maximaler Länge.



Dann gilt v_0 und v_k Punkte vom Grad 1 in T. Wir streichen v_k und die Kante $v_{k-1}v_k$ aus T und erhalten einen Baum (!) T' mit $\mathrm{n-1}$ Punkten und $(n-2)$ Kanten.

Dann besitzt T aber auch n Punkte und $(\mathrm{n-1})$ Kanten, Widerspruch!

Für diese Bäume gilt:

Satz: Es sei $G = (V, E)$ ein Graph

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) G ist ein Baum

(ii) Zu je zwei Punkten $u, v \in V$ gibt es <u>genau</u> einen Weg von u nach v

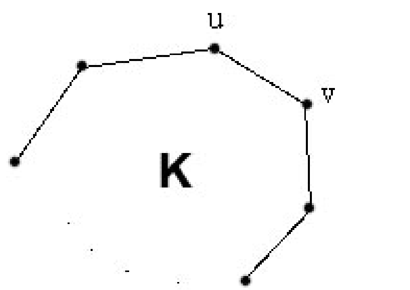
(iii) G ist minimal zusammenhängend, d.h. G zusammenhängend $G - e := \left(V, E\big|_{\{e\}}\right)$ ist nicht zusammenhängend für alle $e \in E$

(iv) G ist maximal Kreisfrei, d.h. G ist kreisfrei, aber $G+e := (V, E \cup \{e\})$ enthält einen Kreis für jedes $e \in \binom{V}{2} \| _E$

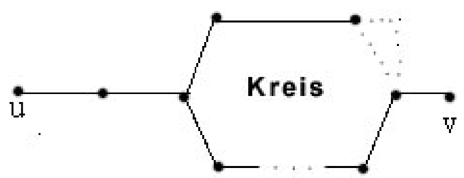
Beweis: $(i) \Rightarrow (iv)$ - G ist kreisfrei und zusammenhängend. Nimmt man noch eine Kante hinzu, so ist G kein Baum mehr (s. vorheriger Satz)
Da G durch Hinzunahme von Kanten seinen Zusammenhang nicht verlieren kann, muss der neue Graph $\mathrm{G+e}$ einen Kreis enthalten

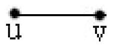
$(iv) \Rightarrow (ii)$ - Es seien $u, v \in V$

a) Angenommen, es gäbe keinen u-v-Weg in G
Nehmen wir dann die Kante uv zu G hinzu.
Diese muss einen Kreis schließen.
K- uv ist aber ein u-v-Weg; Widerspruch!



b) Angenommen es gibt zwei u-v-Wege



$(ii) \Rightarrow (iii)$ - 

Ist $u, v \in V$, so ist u,v der eindeutige (u-v)-Weg in G. Also gibt es in G ohne uv ($(G-\{uv\})$ keinen (u-v)-Weg mehr.

$(iii) \Rightarrow (i)$ - Angenommen G enthielte einen Kreis, etwa $v_o, v_1, ..., v_k = 0$. Lassen wir eine Kante aus dem Kreis weg (etwa $v_0 v_{k-1}$), so ist der Graph immer noch zusammenhängend, denn jede Benutzung einer Kante $v_0 v_{k-1}$ kann durch den Weg $v_o, v_1, ..., v_{k-1}$ überflüssig gemacht werden. Fertig!

$$\begin{array}{ccc} (i) & \Rightarrow & (iv) \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ (iii) & \Leftarrow & (ii) \end{array}$$

Bemerkung: **Satz (von Cayley)**
Ist $|v| = n$, so gibt es auf V genau n^{n-2} Bäume
Beweis: (vgl. auch Aigner-Ziegler: „Proofs from the Book“)

Wir wollen nun ein Optimierungsproblem lösen.

Gegeben ist ein zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ und eine „Kantenbewertung“ $c : E \to \mathbf{R}$

Gesucht wird ein „aufspannender“ Baum $T \subseteq G \quad (T = (V, F),\ F \subseteq E)$ von G, so dass $\sum_{e \in F} c(e) \le \sum_{e \in F'} c(e)$ für alle $T' = (V, F')$, $F' \subseteq E$.

(englisch: mininum spanning tree, MST)

Lösung mit Hilfe des <u>Kruskal-Algorithmus</u>

1. Sortiere $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, so dass $c(e_1) \le c(e_2) \le c(e_3) \le ... \le c(e_m)$
2. Setzen $F_0 = \phi$. Dann prüfen wir sukzessive für $r = 1, ..., m$, ob der Graph $(V, F_{i-1} \cup \{e_i\})$ einen Kreis enthält oder nicht.

Wenn ja: $F_i := F_{i-1}$

Wenn nein: $F_i := F_{i-1} \cup \{e_i\}$

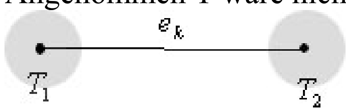
Der Graph $T = (V, F_m)$ wird ausgegeben

Satz: $T = (V, F_m)$ ist ein MST

Beweis: **(i)** **T ist aufspannender Baum:**

Natürlich ist T kreisfrei

Angenommen T wäre nicht zusammenhängend.

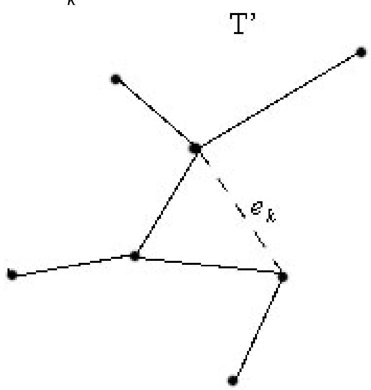


Dann gibt es zwei Komponenten T_1 und T_2 von T , die durch eine Kante e_k von G verbunden sind. Aber $T \cup e_k$ ist offenbar kreisfrei. Deshalb musste e_k eben doch zur Kantenmenge von T gehören!

(ii). **Minimaleigenschaft**

T’ sei ein MST, der mit T möglichst viele Kanten gemeinsam hat. Angenommen, $T' \ne T$. Wir fügen zu T’ eine Kante e_k mit minimalem Index hinzu, die zu T gehört, aber nicht zu T’

$T' + e_k$ enthält einen Kreis



Aus diesem Kreis entfernen wir ein e_1, das nicht zu T gehört. Es entsteht ein weiterer aufspannender Baum T’’.

$T'' = ((T' + e_k) - e_l)$. Nach Konstruktion muss nun $l > k$ sein, also

$c(e_k) \leq c(e_1)$

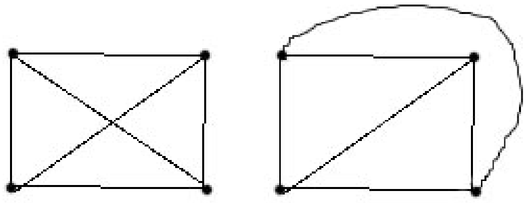
$$\underbrace{\sum_{e \in F''} c(e)}_{T''=(V,F'')} \leq \underbrace{\sum_{e \in F'} c(e)}_{T'=(V,F')}$$

also ist T'' auch ein MST.
Aber T'' hat eine Kante mehr mit T gemeinsam als T', Widerspruch!

Planare Graphen

Kann der Graph G so in der Ebene gezeichnet werden, dass die Linien, die Kanten des Graphen darstellen, nur Ecken des Graphen als gemeinsame Punkte haben, so heißt G planar (plättbar).
Ein solche Zeichnung nennen wir einen ebenen Graphen (planegraph) oder auch eine Landkarte (map).

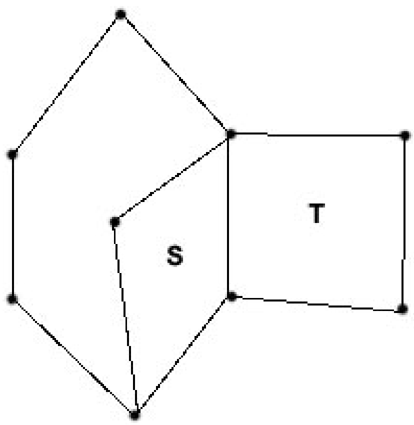
Bsp.:



(falsch) (richtig)

Schneidet man die Ebene entlang der Kanten eines ebenen Graphen auf, so zerfällt sie in endlich viele Stücke (Länder von G, Flächen von G), von denen genau eines unbeschränkt ist!

Satz: (Eulerscher Polyedersatz)
Ein ebener zusammenhängender Graph mit n Punkten, m Kanten und f Ländern erfüllt die Beziehung
$n - m + f = 2$

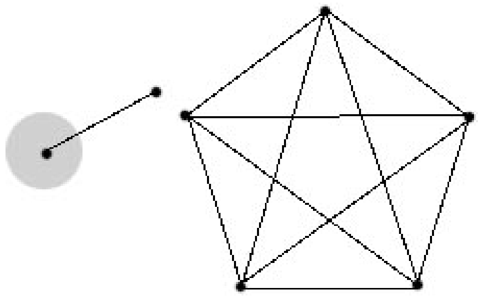


Beweis: Ist der Satz falsch, so existiert ein Gegenbeispiel mit minimalem f.
Ist $f = 1$, so ist G ein Baum, also $m = n - 1$, $\quad n - m + f = n - (n-1) + 1 = 2$
Also $f > 1$. G enthält einen Kreis und jede Kante e dieses Kreises begrenzt zwei Länder von G, etwa S und T.
Entfernen wir e, so erhalten wir einen ebenen Graphen G' mit $n' = n, m' = m - 1$, $f' = f - 1$, also
$n' - m' + f' = 2$, d.h.

$$n-(m-1)+(f-1)=2$$
$$n-m+f=2 \qquad \text{Widerspruch!}$$

1. Ein planarer Graph mit n Punkten hat höchstens $3n-6$ Kanten.

Bsp.: K_5 : vollständig mit 5 Punkten

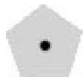


$n=5, m=10$

$3n-6=15-6=9 \quad <10$

Jede Fläche besitzt mindestens 3 Kanten in ihrem Rand. Wird der Graph trianguliert, so gehört auch jede Kante zu genau 2 Flächen

$$3f \leq 2m$$

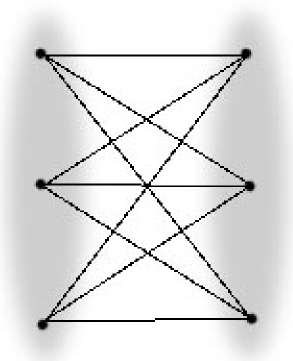


f ausdrücken durch n und m $\quad n-m+f=2$
$\quad f=m-n+2$

$2m \geq 3(m-n+2)$
$m \geq 3(n-2)=3n-6$

2. Ein planarer Graph mit n Punkten ohne Kreise der Länge 3 besitzt höchstens $2n-4$ Kanten
   $2m \geq 4f=4(m-n+2)$
   $2m \leq 4(n-2) \quad m \leq 2(n-2)=2n-4$

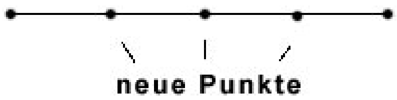
Bsp.:



$K_{3,3}$ enthält keine Dreiecke

$n=6 \quad 2n-4=8$
$m=3\cdot 3=9 \quad >8$
also $K_{3,3}$ nicht planar.

Bemerkung: Graphen, die durch „Unterteilung" von nicht planaren Graphen entstehen, sind nicht planar.



Einzelne Kanten des Graphen werden durch Wege ersetzt, in denen alle Punkte außer Anfangs- und Endpunkt den Grad 2 haben.

Folgerung: Jeder Graph G, der eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält, ist nicht planar
Es gilt auch die Umkehrung

Satz von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 und $K_{3,3}$ enthält.

Beispiel: Die Oberfläche eines Fußballs setzt sich aus schwarzen 5-ecken und weißen 6-ecken zusammen. An die Seiten eines jeden 5-ecks grenzen lauter 6-ecken, während an die Seiten eines jeden 6-ecks abwechselnd 5 –ecken und 6-ecken grenzen.
Bestimme die Anzahl der 5-ecke und 6-ecke
f_5: Anzahl der 5-ecke
f_6: Anzahl der 6-ecke

$$f = f_5 + f_6$$

$$5 \cdot f5 + 6 \cdot f_6 = 2m$$

$$5 \cdot f5 + 6 \cdot f_6 = 3n$$

$$n - m + f = 2$$

$$\frac{5}{3} f_5 + 2 \cdot f_6 - \frac{5}{2} f_5 - 3 f_6 + f_5 + f_6 = 2$$

$$f_5 \left(\frac{5}{3} - \frac{5}{2} + 1 \right) + f_6 \left(\underbrace{2 - 3 + 1}_{=0} \right) = 2$$

$$f_5 \left(\frac{10 - 15 + 6}{6} \right) = 2, \quad f_5 = 2 \cdot 6 = 12$$

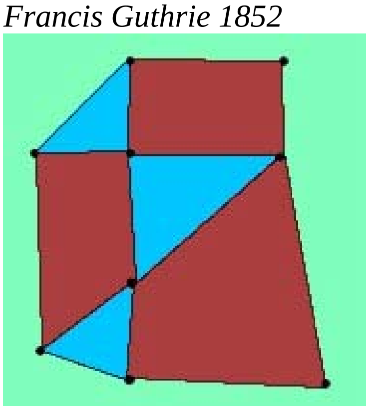
Zählen nun die Inzidenzen (5-eck, adjazentes 6-eck) ab: (auf 2 Weisen)

$$5 f_5 = 3 f_6$$

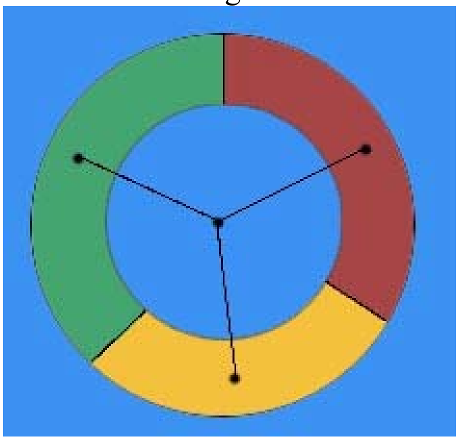
$$5 \cdot 12 = 60 = 3 \cdot f_6, \quad f_6 = 20$$

Vierfarben-Problem

Francis Guthrie 1852



Können die Länder einer Landkarte mit 4 Farben so gefärbt werden, dass je zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie verschieden gefärbt sind?



Trick: Setzen in jedes Land eine „Hauptstadt" und verbinden zwei Hauptsstädte g.d.w. die Länder eine gemeinsame Grenzlinie haben

Seit 1976 ist bekannt, dass jede Landkarte tatsächlich mit 4 Farben gefärbt werden kann (Appel und Haken).

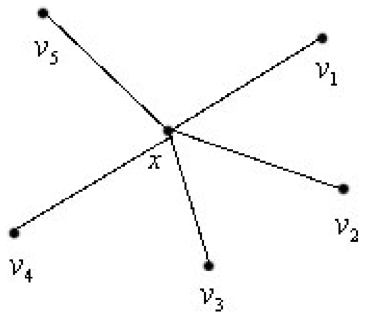
Wir beweisen eine Abschwächung:

Satz: Jede Landkarte ist mit 5 Farben zulässig färbbar.

Beweisen den Satz in folgender Form.
Die Punkte jedes planaren Graphen können mit 5 Farben so gefäbrt werden, dass benachbarte Punkte verschiedene Farben bekommen.
Angenommen, der Satz wäre falsch.
Dann wählen wir ein Gegenbeispiel mit minimaler Punktezahl $G=(V,E)$.
Wegen $|E| \le 3n-6$ muss $G/|E| =$ Anzahl der Kanten einen Punkt x vom Grad

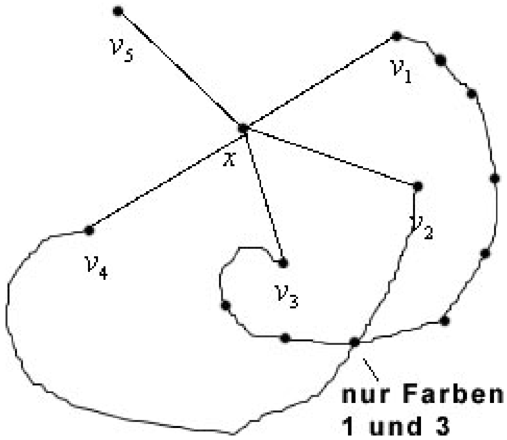
höchstens 5 enthalten $\left(\underbrace{\sum_{e\in V} d(v)}_{n\ Summanden} = 2m \le 2(3n-6) = 6n-12 \right)$

Wir nehmen an, G ist gezeichnet und x besitzt als Nachbarn in zyklischer Reihenfolge die Punkte v_1, v_2, v_3, v_4, v_5

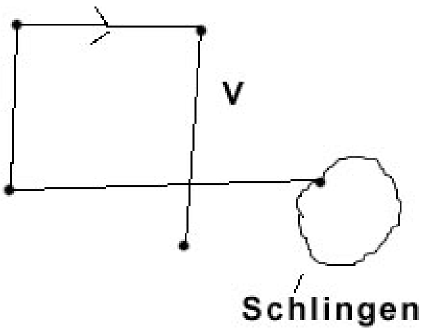


(Falls x weniger als fünf Nachbarn besitzt, so könnten wir $H := G - x$ mit 5 Farben zulässig färben. Diese Färbung könnte zu einer zulässigen Färbung von G fortgesetzt werden, da x nur zu höchstens 4 Punkten benachbart ist.
Nehmen an, dass H mit 5 Farben zulässig gefärbt ist und zwar so, dass der Punkt v_i die Farbe i bekommt.

Bezeichne mit $H(i,j)$ $(1 \le i < j \le 5)$ den Teilgraphen von H, der nur aus den Punkten besteht, die Farbe i oder j haben.
$H(i,j) = H[\{v \in V : v \textit{ hat Farbe i oder } j\}]$ sowie alle H-Kanten zwischen diesen
Betrachten $H(1,3)$. Falls v_1 und v_3 in verschiedenen Komponenten von $H(1,3)$ liegen, so vertauschen wir in der Komponente von v_1 die Farben 1 und 3. Es entsteht wieder eine zusätzliche Färbung von H ohne die Farbe 1 in der Nachbarschaft von x. Dann können wir diese Färbung aber zulässig fortsetzen, indem wir x die Farbe 1 geben. WIDERSPRUCH!
Es gibt also einen Weg P in $H(1,3)$, der v_1 mit v_3 verbindet.



P_{xv_1} ist dann ein Kreis in G, so dass genau einer der v_2, v_4 im Inneren des Kreises liegt.
Jetzt betrachten wir $H(2,4)$
Wie oben schließen wir, dass es in $H(2,4)$ einen Weg Q von v_2 nach v_4 gibt.
Q muss in einem Punkt v den Kreis P_{xv_1} schneiden, d.h. v muss in $H(1,3)$ und $H(2,4)$ liegen. Dies ist unmöglich: WIDERSPRUCH!



Gerichteter Graph

$G = (V, B)$, V endliche Menge, $B \subseteq VxV = \{(u,v) \mid u, v \in V\}$

Bez.: $u \to v$ $\overrightarrow{uv}$ „Bögen“ (daher Bezeichnung „B“)

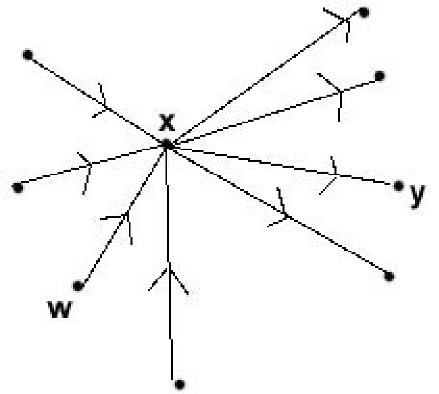
Def.: Ein <u>Netzwerk N</u> ist ein Quadrupel (G, C, q, s), wobei $G = (V, B)$ ein gerichteter Graph ist.
$c : B \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ $\mathbf{R}_+ = \{x \in \mathbf{R} : x \ge 0\}$
(Kapazitätenfunktion)

$q, s \in V, q \neq s$, q heißt Quelle, s heißt Senke

Def.: Ein Fluss in N ist eine Funktion $f : B \to R_+$, so dass gilt:

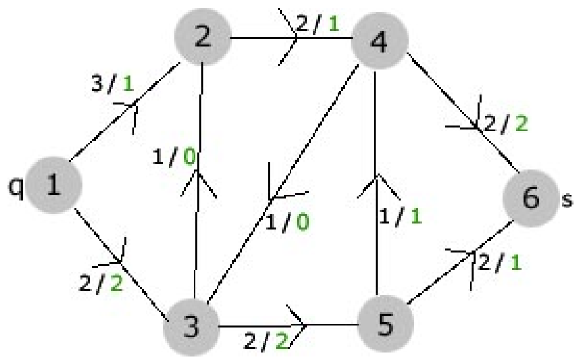
1. Ist $e \in B$, so ist $f(e) \leq c(e)$
2. Für alle $x \in V |_{\{q,s\}}$:

$$\sum_{w:(w,x)\in B} f(w,x) = \sum_{y:(x,y)\in B} f(x,y)$$



(alles was reingeht, geht auch wieder raus)

Beispiel:



Def.: 1. Der Wert $val(f)$ eines Flusses f ist definiert durch:

$$val(f) := \sum_{x:(q,x)\in B} f(q,x) - \sum_{y:(y,q)\in B} f(y,q)$$

2. Ein Schnitt in N ist eine Teilmenge $W \subseteq V$ mit $q \in W, s \notin W$.
Die Kapazität $cap(w)$ von w ist definiert durch:

$$cap(w) := \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} c(x,y)$$

Lemma: Es sei N ein Netzwerk, f ein Fluss in N, w ein Schnitt. Dann gilt:

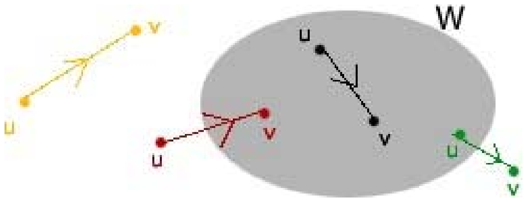
(i) $val(f) := \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} f(x,y) - \sum_{\substack{(u,v)\in B \\ u\notin V, v\in W}} f(u,v)$

(ii) $val(f) \leq cap(w)$

Beweis: (i) impliziert (ii), da für jeden Bogen (x, y) gilt: $0 \leq f(x,y) \leq c(x,y)$.

Zu (i) $\sum_{x\in W}\underbrace{\left(\sum_{y:(x,y)\in B} f(x,y)-\sum_{w:(w,x)\in B} f(w,x)\right)}_{\substack{=0,\ falls\ x\neq q\\ val(f),\ falls\ x=q}}$

Wir halten einen Bogen $(u,v)\in B$ fest und fragen, wie oft die Werte $\pm f(u,v)$ in unserer Summe auftreten:



- $u\in W, v\in W$: 2-mal $(f(u,v)\ und\ -f(u,v))$
- $u\in W, v\notin W$: 1-mal $(f(u,v))$
- $u\notin W, v\in W$: 1-mal $(-f(u,v))$
- $u\notin W, v\notin W$: überhaupt nicht

$$\sum_{x\in W}\left(\sum_{y:(x,y)\in B} f(x,y)-\sum_{w:(w,x)\in B} f(w,x)\right)=\sum_{\substack{(u,v)\in B\\ u\in W, v\notin W}} f(u,v)-\sum_{\substack{(u,v)\in B\\ u\notin W, v\in W}} f(u,v)$$

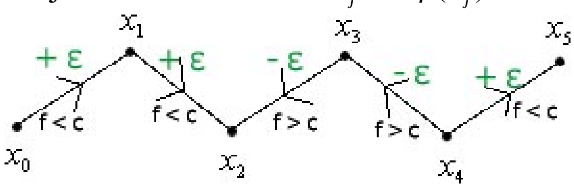
Def.: Es sei N ein Netzwerk und f ein Fluss in N. Eine Folge $x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, x_{v-1}, e_v, x_v$ heißt vergrößernder (x_0, x_v)-Weg (für f), falls

(i) $x_0, \ldots, x_v$ sind paarweise verschiedene Punkte aus V

(ii) $e_1, \ldots, e_v$ sind Bögen aus B mit $e_j=(x_{j-1}, x_j)$ („Vorwärtskante") oder $e_j=(x_j, x_{j-1})$ („Rückwärtskante"), $1\le j\le v$

(iii) für jede Vorwärtskante e_j ist $f(e_j)<c(e_j)$

(iv) für jede Rückwärtskante e_j ist $f(e_j)>0$



Satz: (Schnitt-Fluss-Theorem, *Ford und Fulkerson; Elias, Feinstein und Shannon*)

(i) Ein Fluss f ist maximal g.d.w. kein vergrößernder (q-s)-Weg existiert

(ii) Es gibt stets einen Fluss f und einen Schnitt W mit $val(f)=cap(w)$, es sei denn $cap(w)=\infty$ für alle Schnitte w.

$$\left(\max_{f\ Fluss} val(f)=\min_{W\ Schnitt} cap(w)\right)$$

Beweis: (i) $q=x_0, e_1, x_1, e_2, x_2, \ldots, x_{v-1}, e_v, x_v=s$ ein vergrößernder (q-s)-Weg:

Wir definieren:

$\varepsilon_1 := \min\{f(e_j): e_j\ Rückwärtskante\}$

$\varepsilon_2 := \min\{c(e_j)-f(e_j): e_j\ Vorwärtskante\}$

$\varepsilon := \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)>0$

f' sei nun der folgende Fluss:

$$f'(e) := \begin{cases} f(e), e \notin \{e_1, ..., e_v\} \\ f(e) + \varepsilon, e\ Vorwärtskante \\ f(e) - \varepsilon, e\ Rückwärtskante \end{cases}$$

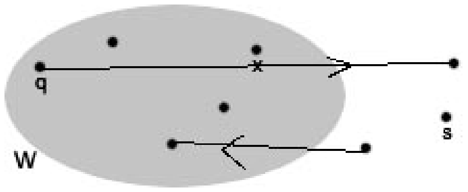
Dann ist f' ein Fluss mit $val(f') = val(f) + \varepsilon$, also war der Wert von f nicht maximal

(b) $w : \{q\} \cup \{x \in V |_{\{q\}} : es\ existiert\ ein\ vergrößernder\ (q - x) - Weg\}$

Nach Voraussetzung ist $s \notin W$

W ist also ein Schnitt.

Wir zeigen: $val(f) = cap(w)$



Es sei $(x, y) \in B,\ x \in W\ \ y \notin W$.

Dann muss aber $f(x, y) = c(x, y)$ sein, denn andernfalls könnte ein nach Def. von W existierender vergrößernder (q-x)-Weg zu einem vergrößerten (q-y)-Weg erweitert werden.

Ist $(x, y) \in B,\ x \notin W\ \ y \in W$, so schließen wir analog: Ein vergrößernder (q-y)-Weg könnte durch hinzunahme von (x, y) (als Rückwärtskante) zu einem vergrößernden (q-x)-Weg erweitert werden, es sei denn $f(x, y) = 0$

Insgesamt:

$$val(f) = \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y \notin W}} \underbrace{f(x, y)}_{c(x,y)} - \underbrace{\sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\notin W, y\in W}} f(x, y)}_{=0}$$

(ii) Folgt aus dem Beweis von (i)

Problem: Wie konstruieren wir einen maximalen Fluss?

Algorithmus von Ford und Fulkerson

1. Es sei f_0 ein Fluss in N, z.B. $f_0 = 0$
2. i := 0
3. Suchen für f_i einen vergrößernden (q-s)-Weg. Falls kein solcher existiert, so ist f_i maximal und wird ausgegeben. Andernfalls vergrößern wir f_i wie im Beweis des Schnitt-Fluss-Theorem zu einem neuen Fluss f_{i+1}
   $y : i = i + 1$, , weiter mit 3.

Fragen:

1. Wie finde ich einen vergrößernden (q-s)-Weg?
   (Verweis auf Standard-Verfahren, z.B. Dijkstra-Algorithmus)
2. Wie oft muss man vergrößern?
   Bem.: Falls $c(x, y)$ ganzzahlig ist für alle $(x, y) \in B$, so wird der Wert des Flusses jedes Mal um mindestens 1 erhöht, das Verfahren bricht also nach höchstens

$\sum_{e \in B} c(e)$ Schritten ab

Falls $e(x, y) \in Q$ für alle $(x, y) \in B$, so bricht das Verfahren ebenfalls nach endlich vielen Schritten ab (Multipliziere alle Kapazitäten mit dem Hauptnenner der auftretenden Brüche und löse das ganzzahlige Problem).

(Satz von Edmonds und Karp, 1972) „Optimierung B“

Es gilt: Falls immer ein vergrößernder (q-s)-Weg mit minimaler Kantenzahl gewählt wird, so stoppt der Algorithmus nach höchstens $\frac{nm}{2}$ Vergrößerungen ab. $n = |V|, m = |B|$, selbst dann, wenn irrationale Kapazitäten auftreten.