Übung zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ (SS 01)

Prof. Dr. H. Pahlings

Präsenzaufgaben für die Übungsstunde am 26. 4. 01

Aufgabe P1.

Zeigen Sie (mit dem Schubfachprinzip): Jede Teilmenge $M \subseteq \{1, \ldots 9\}$ mit $|M| = 6$ enthält zwei Zahlen, deren Summe 10 ist.

Aufgabe P2.

Es sei

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 3 & 10 & 6 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

(a) Schreiben Sie σ als Produkt von ziffernfremden Zyklen.

(b) Zeigen Sie: Sind σ_1, σ_2 ziffernfremde Zyklen, so ist $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_2\sigma_1$.

(c) Berechnen Sie σ^{-1}, σ^4, σ^{12}, σ^{123}.

Aufgabe P3.

Schreiben Sie alle Elemente von S_4 als Produkte von ziffernfremden Zyklen und als Produkte von Transpositionen (Zweierzyklen).

Aufgabe P4.

Zeigen Sie:

(a) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n},$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \binom{2n-1}{n-1}.$$

Präsenzaufgaben am 3. 5. 2001

Aufgabe P5.

Wie viele ungerade Zahlen in $\{1, \dots, 100\}$ sind weder durch 3 noch durch 5 teilbar? . ☐

Aufgabe P6. An einem Institut sind 10 Professoren und 4 Professorinnen. Wie viele verschiedene paritätisch besetzte Kommissionen mit 4 Mitgliedern kann man bilden? ☐

Aufgabe P7. Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

$\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2}$ für $n \geq k \geq 2$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{k-l} \binom{n}{l}$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} = 2^n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = n!$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe P8. Es sei $|M| = 4$ und $|N| = 3$. Die Anzahl

der injektiven Abbildungen $f\colon N \to M$ ist .... ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon N \to M$ ist .... ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon M \to N$ ist .... ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon M \to M$ ist .... ☐

der Äquivalenzrelationen auf N ist .... ☐

der surjektiven Abbildungen $f\colon M \to \emptyset$ ist .... ☐

aller Abbildungen $f\colon \emptyset \to M$ ist .... ☐

Aufgabe P9.

Es seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Permutationen aus S_6.

Die Zyklendarstellung von σ ist .... ☐

Die Zyklendarstellung von τ ist .... ☐

Die Zyklendarstellung von $\sigma \circ \tau$ ist .... ☐

Die Zyklendarstellung von σ^2 ist .... ☐

Die Zyklendarstellung von τ^{-1} ist .... ☐

Welches ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau^n = (1)$? .... ☐

Präsenzaufgaben am 10. 5. 2001

Aufgabe P10.

Welche der folgenden formalen Potenzreihen sind invertierbar?

$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$x + x^2$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{n=0}^{\infty} n^{n!}x^n$ .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P11.

Welche der folgenden Aussagen über formale Potenzreihen sind richtig?

Ist $A = A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$, so ist

$A(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$A(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$x^3 A(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n+3} x^n \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$(A(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$(A(x))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$D(A(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n \in K[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

aus $D(A(x)) = 0$ folgt $A = c \in K$ (A ist eine Konstante) .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P12.

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Betrag von n (z. B. 50) Euro in 1- und 2-Euromünzen auszuzahlen?

Präsenzaufgaben am 17. 5. 2001

Aufgabe P13.

Gibt es $A \in \mathbb{Q}[[x]]$ mit $A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$? .... ☐ Ja ☐ Nein

Gibt es für jeden Körper K ein $A \in K[[x]]$ mit $A^2 = 1 + x^2$? .... ☐ Ja ☐ Nein

Gibt es $A \in \mathbb{F}_2[[x]]$ mit $A^2 = 1 + x$? .... ☐ Ja ☐ Nein

Gilt in $\mathbb{F}_2[[x]]$ die Gleichung $\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{2i}$? .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe P14.

Ist $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ mit $a_n \neq 0$, so gilt für das reflektierte Polynom f^{R} von f:

$f^{\mathrm{R}} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$f^{\mathrm{R}} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{i}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$f^{\mathrm{R}} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$f^{\mathrm{R}} = x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{i}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$f^{\mathrm{R}} = x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$(f^{\mathrm{R}})^{\mathrm{R}} = f$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe P15.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha}{\alpha-n}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\, k! \binom{\alpha}{k}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$\binom{\alpha}{n} = 0$ für $n > \alpha$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Präsenzaufgaben am 31. 5. 2001

Aufgabe P16.

$(\mathbb{N}_0, +, -, 0, \cdot, 1)$ ist ein Ring .... ☐ Ja ☐ Nein

$(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ ist eine Gruppe .... ☐ Ja ☐ Nein

$(\mathbb{R}_{>0}, \cdot, ^{-1}, 1)$ ist eine Gruppe .... ☐ Ja ☐ Nein

$\mathbb{Z}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ist Unterring von $\mathbb{R}$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\{f \in \mathbb{Q}[x] \mid f = 0 \text{ oder } \operatorname{Grad} f \text{ ist gerade}\}$ ist Unterring von $\mathbb{Q}[x]$ ... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P17. Die Relation $\sim$, definiert durch $a \sim b$ genau dann wenn

$a + b \in 2\mathbb{Z}$, ist eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$a - 4b \in 3\mathbb{Z}$, ist eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Z}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$\operatorname{Grad} a = \operatorname{Grad} b$, ist eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Q}[x]$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$a(0) = b(0)$, ist eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{Q}[x]$, ... ☐ Ja ☐ Nein

$a - b \in \mathbb{Q}$, ist eine Kongruenzrelation auf $\mathbb{R}$, ... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P18. Ist K ein Körper und $f, g \in K[x]$, so gilt:

$f = g \iff f(a) = g(a)$ für alle $a \in K$ .... ☐ Ja ☐ Nein

f ist in $K[x]$ invertierbar $\iff f(a) \neq 0$ für alle $a \in K$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\operatorname{Grad}(f \cdot g) = \operatorname{Grad} f \cdot \operatorname{Grad} g$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\{f \in K[x] \mid f(1) = 0\} \trianglelefteq K[x]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\{f \in K[x] \mid \operatorname{Grad} f \leq 3\} \trianglelefteq K[x]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P19.

In $\mathbb{Z}$ gilt: $2 \in \operatorname{ggT}(2, 0)$ .... ☐ Ja ☐ Nein

In $\mathbb{Z}$ gilt: aus $1 = ya + zb$ mit $a, b, y, z \in \mathbb{Z}$ folgt $1 \in \operatorname{ggT}(a, b)$ ...... ☐ Ja ☐ Nein

In $\mathbb{Z}[x]$ gilt: $2 \in \operatorname{ggT}(2x, 2x^2 + 2x)$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist R ein Ring und $1 \in I \trianglelefteq R$, so ist $I = R$ .... ☐ Ja ☐ Nein

$\{\sum_{i=3}^{\infty} a_i x^i \mid a_i \in \mathbb{R}\} \trianglelefteq \mathbb{R}[[x]]$ .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P20.

Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? .... ☐

Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}_2[x] \,/\, (x^2 + 1)\mathbb{Z}_2[x]$? .... ☐

Wie viele Lösungen hat die Gleichung $x^2 + y^2 + 4\,z = 3$ in $\mathbb{Z}$? .... ☐

Präsenzaufgaben am 21. 6. 2001

Aufgabe P21. R sei ein kommutativer Ring.

Sind a, b Einheiten ($a, b \in R^*$), so ist ab Einheit. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist ab Einheit, so sind a und b Einheiten. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $a + b$ Einheit, so sind a und b Einheiten. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P22.

35 ist ein Teiler von $6^{2n} - 1$ für alle $n \geq 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P23. Es sei $f = x^4 + x \in \mathbb{Z}_2[x]$.

Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}_2[x]/f\mathbb{Z}_2[x]$? .... ☐

$\mathbb{Z}_2[x]/f\mathbb{Z}_2[x]$ ist ein Körper. .... ☐ Ja ☐ Nein

Es sei $\alpha = [x + 1]_f$. Was ist α^4 ? .... ☐

Aufgabe P24. Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$.

Ist $\operatorname{Grad} f > 1$, so ist f irreduzibel genau dann wenn f keine Nullstelle in K hat.
.... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 1$, so ist f irreduzibel. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 0$, so ist f irreduzibel. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 2$ und $f(a) \neq 0$ für alle $a \in K$, so ist f irreduzibel. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $K = \mathbb{C}$, so ist f irreduzibel genau dann wenn $\operatorname{Grad} f = 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P25.

Ist $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ eine Gruppe und $a, b \in G$, so ist $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$. . ☐ Ja ☐ Nein

$(\mathbb{Z}_n, +, -, 0)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine zyklische Gruppe. .... ☐ Ja ☐ Nein

$(\mathbb{Z}_n^*, \cdot, ^{-1}, 1)$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine zyklische Gruppe. .... ☐ Ja ☐ Nein

Hat eine Gruppe G nur 2 Untergruppen, so ist G zyklisch. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Präsenzaufgaben am 28. 6. 2001

Aufgabe P26. Es sei G eine Gruppe und $|G| = m \in \mathbb{N}$ und $g \in G$.

Die Abbildung $G \to G$, $h \mapsto g \cdot h$ ist bijektiv. ☐ Ja ☐ Nein

Zu jedem Teiler d von m gibt es ein Element der Ordnung d in G. ☐ Ja ☐ Nein

Hat g die Ordung d, so gilt $d \mid m$. ☐ Ja ☐ Nein

Ist m eine Primzahl, so ist G zyklisch. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $m = 15$ und $g^3 \neq 1$ und $g^5 \neq 1$, so ist G zyklisch. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf G, so ist $[1]_\sim$ Untergruppe von G. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G, so ist $[1]_\sim$ Normalteiler von G. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist $\mathrm{Kern}(\varphi) \trianglelefteq G$. ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P27.

Für alle $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z}$ gilt $a^{\varphi(m)} \equiv a \bmod m$. ☐ Ja ☐ Nein

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $70 \mid 101^{6n} - 1$. ☐ Ja ☐ Nein

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $70 \mid 1001^{6n} - 1$. ☐ Ja ☐ Nein

Für welche $m \in \mathbb{N}$ ist $\varphi(m)$ ungerade? ☐

Aufgabe P28.

Zu jedem $m \in \mathbb{N}$ gibt es eine Gruppe G mit $|G| = m$. ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt eine Gruppe mit genau zwei Elementen der Ordnung 5. ☐ Ja ☐ Nein

Eine Untergruppe einer zyklischen Gruppe ist stets zyklisch. ☐ Ja ☐ Nein

Ein homomorphes Bild einer zyklischen Gruppe ist stets zyklisch. ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P29. Es sei $G = (\mathbb{Z}_{20}, +)$ und $H = \{\, [8n]_{20} \mid n \in \mathbb{Z} \,\}$.

H ist Untergruppe von G. ☐ Ja ☐ Nein

Was ist $|H|$? ☐

Wie viele erzeugende Elemente hat H? ☐

Was ist $[G : H]$? ☐

Es ist $[2]_{20} + H = [6]_{20} + H$. ☐ Ja ☐ Nein

Präsenzaufgaben am 5. 7. 2001

Aufgabe P30. Es sei p eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$. Dann

ist $\mathbb{Z}_{p^n}$ ein Körper, ... ☐ Ja ☐ Nein

ist $\mathbb{Z}_p[x]/(x^n - 1)$ ein Körper, ... ☐ Ja ☐ Nein

gibt es einen Körper mit p^n Elementen, ... ☐ Ja ☐ Nein

gibt es genau ein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ vom Grad n. ..... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P31.

Die Anzahl der normierten irreduziblen Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{Z}_3[x]$ ist .... ☐

Aufgabe P32. Ist $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreduzibel mit $\operatorname{Grad} f = d$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt:

wenn $f \mid (x^n - 1)$, so gilt $d \mid n$, ... ☐ Ja ☐ Nein

wenn $f \mid (x^{p^n - 1} - 1)$, so gilt $d \mid n$, ... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P33.

Es sei C der Code über $\mathbb{Z}_2$ mit Generatormatrix $G(C) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dann gilt:

C ist ein zyklischer Code, ... ☐ Ja ☐ Nein

die Minimaldistanz von C ist 3, ... ☐ Ja ☐ Nein

$\dim C = 3$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe P34.

Wie viele zyklische Codes C der Länge $n = 3$ gibt es über $\mathbb{Z}_2$ (d. h. $C \subseteq \mathbb{Z}_2^3$) ? ...... ☐

Was sind ihre Dimensionen? .... ☐

Was sind ihre Minimaldistanzen? .... ☐

Präsenzaufgaben am 12. 7. 2001

Aufgabe P35.

Wie viele Ideale hat der Ring $\mathbb{Z}_2[x]\,/(x^3+1)$? .... ☐

Aufgabe P36. Ist $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| \geq 2$, so gilt:

Es gibt stets $v_i, v_j \in V$ mit $v_i \neq v_j$ und $d(v_i) = d(v_j)$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\sum_{v \in V} d(v) < |V|$, so ist G nicht zusammenhängend. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P37.

In einer Gruppe von 15 Personen kennt jede Person höchstens 3 andere. Wie viele Paare von Personen, die sich gegenseitig kennen, kann es in dieser Gruppe höchstens geben? ... ☐

Aufgabe P38. Ist $G = (V, E)$ ein nummerierter Graph mit Adjazenzmatrix $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ und Inzidenzmatrix $B \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ und $V = \{ v_1, \ldots, v_n \}$, so ist der Grad $d(v_i)$

die Summe der Einträge der i-ten Spalte von A, ... ☐ Ja ☐ Nein

die Summe der Einträge der i-ten Spalte von B, ... ☐ Ja ☐ Nein

die Summe der Einträge der i-ten Zeile von A, ... ☐ Ja ☐ Nein

die Summe der Einträge der i-ten Zeile von B. .... ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe P39.

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so gilt $|V| \leq |E|$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so gilt $|E| \leq |V|^2$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Der vollständige Graph K_6 hat 15 Kanten. .... ☐ Ja ☐ Nein

Der vollständige Graph K_6 hat einen 4-regulären induzierten Teilgraphen. ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt einen 3-regulären Graphen mit 5 Knoten. .... ☐ Ja ☐ Nein

---