Nachholklausur zu Diskreten Strukturen (SS 90)

Prof. Dr. Pahlings

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Tragen Sie auf das Deckblatt, welches Sie Ihren Lösungen beiheften, Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters ein. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen. Die Bearbeitungszeit beträgt 150 Minuten. Zum Bestehen der Klausur müssen mindestens 25 Punkte erreicht werden. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Viel Erfolg!

Wir machen darauf aufmerksam, daß bis zum Ende des auf die Vorlesung folgenden Semesters nicht abgeholte Klausuren (und Übungen) vernichtet werden. Anspruch auf Anrechnen besteht dann nicht mehr.

Aufgabe 1.
Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \infty\}$ mit einer Relation $\leq$ definiert durch

$$a \leq b \Leftrightarrow \text{entweder } b = \infty \text{ oder } a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ und } a \mid b$$

(für $a, b \in M$).
(a) Zeigen Sie, daß $\leq$ eine Ordnung ist, und zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.
(b) Ist $(M, \leq)$ ein Verband? Wenn ja, ist dieser Verband distributiv und/oder komplementär? Begründen Sie Ihre Antworten.
(c) Sei μ die zugehörige Moebius-Funktion. Berechnen Sie $\mu(1, \infty)$.
8 Pkte.

Aufgabe 2.
Sei φ die Euler'sche Funktion und μ die zahlentheoretische Moebius-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(n)$ und $\mu(n)$ für $n = 199, 187, 150$. 6 Pkte.

Aufgabe 3.
Sei G die Gruppe der Einheiten (= bzgl. Multiplikation invertierbaren Elemente) des Ringes $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$. Prüfen Sie nach, ob G zyklisch ist, und berechnen Sie alle Untergruppen von G. 8 Pkte.

Aufgabe 4.
Sei C der von den Vektoren 1 0 1 0, 1 1 1 1 (als Teilraum von $\mathbb{Z}_2^4$) aufgespannte Gruppencode.
(a) Berechnen Sie die Minimaldistanz $\delta(C)$.
(b) Zeigen Sie, daß C ein zyklischer Code ist.
(c) Berechnen Sie das Genertorpolynom von C. 8 Pkte.

Aufgabe 5.
Sei $\phi = (\pi_1 + \pi_3)\pi_1\pi_2 + \pi_1\pi_2'$ eine Schaltfunktion in P_3. Berechnen Sie die konjunktive und disjunktive Normalform von ϕ. 6 Pkte.

Aufgabe 6.
Berechnen Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Z}_3[X]$ kleisten Grades mit

$$X + 1 \mid f - 1, X \mid f + X + 1, X - 1 \mid f + 1.$$

(Alle Polynome und die Teilbarkeit aufgefaßt in $\mathbb{Z}_3[x]$.) 6 Pkte.

Aufgabe 7.
Sei $f = X^5 + X^4 + X^3 + X^2 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$.
(a) Berechnen Sie $d \in \mathrm{ggT}(f, f')$.
(b) Zerlegen Sie f mit Hilfe des Berlekamp-Algorithmus in irreduzible Faktoren. 8 Pkte.

Aufgabe 8.
Sei $f = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$, $K = \mathbb{Z}_2[X]/(f)$ und $z := X + (f) \in K$.
(a) Zeigen Sie, daß K ein Körper ist.
(b) Berechnen Sie die Ordnung von z als Element der multiplikativen Gruppe von K. 6 Pkte.

Klausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ SS 92

Aufgabe 1. **5 Punkte**
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $13 \mid n+4$, $11 \mid n-3$ und $7 \mid n+2$ gilt.

Aufgabe 2. **2+2 Punkte**
(a) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 180 mit zwei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 180 mit drei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. **3 Punkte**
Es sei $I \subseteq \mathbf{Z}_2[x]$ das von x^3+x^2+1 und x^2+x+1 erzeugte Ideal in $\mathbf{Z}_2[x]$. Zeigen Sie, daß $I = \mathbf{Z}_2[x]$ gilt.

Aufgabe 4. **3+6 Punkte**
(a) Es seien zwei Polynome $f = x^5+x^4+x^3+1$ und $g = x^4+x^2+1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie Polynome u und v aus $\mathbf{Z}_2[x]$, für die $d = u*f+v*g$ gilt.

(b) Es sei K ein Körper, f und g zwei Polynome aus $K[x]$ mit $\partial f > \partial g$ und $d \in ggT(f,g)$. Der erweiterte Euklidische Algorithmus liefert Polynome u und v aus $K[x]$ mit $d = u*f+v*g$. Zeigen Sie, daß für das Polynom u die Abschätzung $\partial u \leq \partial g - \partial d$ gilt. ∂h bezeichne dabei den Grad eines Polynoms h.
ANLEITUNG: Zeigen Sie zuerst, daß $\partial x_{i+1} < \partial x_{i+2}$ und $\partial r_i + \partial x_{i+1} = \partial g$ für $i \geq 0$ im erweiterten Euklidischen Algorithmus (bei Startwerten $r_0 = g$ und $r_{-1} = f$) gilt.

Aufgabe 5. **1+3 Punkte**
(a) Es sei φ die Eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(81)$, $\varphi(25)$ und $\varphi(2025)$.

(b) Zeigen Sie: Aus $n \mid m$ folgt $\varphi(n) \mid \varphi(m)$.

Aufgabe 6. **4 Punkte**
Bestimmen Sie die ganzzahligen Lösungen $x \in \mathcal{V}_{3\times 1}(\mathbf{Z})$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 4 \\ 6 & 8 & 12 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7. **3 Punkte**

Es sei P die Pyramide . Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen sowie P und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge. Bestimmen Sie die Eulercharakteristik des zugehörigen Verbandes.

Aufgabe 8. **3 Punkte**

Es sei $M = \{a, b, c, d, e\}$ und $\leq\ = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e), (c, e), (d, e)\}$ gegeben. Es sei $g : M \to \mathbf{N}$ eine Gewichtsfunktion. Bestimmen Sie aus den summierten Gewichten $f(x) = \sum_{d \leq x} g(d)$ mittels Möbiusinversion die ursprüngliche Gewichtsfunktion g. Dabei ist f gegeben durch $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 4$, $f(d) = 6$ und $f(e) = 12$.

Aufgabe 9. **2 Punkte**

Es sei O ein regelmäßiger Oktaeder. Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen sowie O und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge. Ist der zugehörige Verband ein Boolescher Verband?

Aufgabe 10. **2+8 Punkte**

(a) Es sei A eine freie Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$. Bestimmen Sie die disjunktive Normalform des Elementes $(x_1 + x_2 + x_3) \cdot (x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})$.

(b) Es sei B eine Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Für $\epsilon \in \underline{2}^n = \{0, 1\}^n$ sei q_ϵ definiert als $x_1^{\epsilon_1} + \ldots + x_n^{\epsilon_n}$. Für eine Teilemenge I von $\underline{2}^n$ sei w_I definiert als $\prod_{\epsilon \in I} q_\epsilon$. Bestimmen Sie für w_I die disjunktive Normalform.
HINWEISE: DeMorgansche Regeln. Was ist $\overline{w_I}$?.

Aufgabe 11. **2+2+2+4 Punkte**

Es sei $\mathcal{A}$ die Klasse der abelschen Gruppen.

(a) Gibt es für $\mathbf{Z} \dot{+} \mathbf{Z}$ ein $\mathcal{A}$–freies Erzeugendensystem? Wenn ja, geben Sie eins an.

Es sei $M = \{(3, 11, 3, 19), (4, 13, 6, 23), (2, 4, 6, 8)\} \subset \mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$. Weiter sei U die von M erzeugte Untergruppe.

(b) Zeigen Sie, daß M kein $\mathcal{A}$–freies Erzeugendensystem für U ist.

(c) Gibt es ein $\mathcal{A}$-freies Erzeugendensystem für U? Wenn ja, geben Sie es an!

(d) Ist die Faktorgruppe $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})/U$ $\mathcal{A}$-frei? Begründen Sie Ihr Antwort!

Aufgabe 12. **3+2 Punkte**

Das Ideal $I = (x^3 + x^2 + 1)\mathbf{Q}[x]$ von $\mathbf{Q}[x]$ kann als $\mathbf{Q}[X]$–Teilmodul und als $\mathbf{Q}$–Teilmodul von $\mathbf{Q}[X]$ aufgefaßt werden. Entsprechend ist $\mathbf{Q}[X]/I$ ein $\mathbf{Q}[x]$– oder $\mathbf{Q}$–Modul.

(a) Bestimmen Sie eine Basis für $\mathbf{Q}[X]/I$ als $\mathbf{Q}$–Modul.

(b) Bestimmen Sie ein unverkürzbares Erzeugendensystem für $\mathbf{Q}[X]/I$ als $\mathbf{Q}[x]$–Modul.

Aufgabe 13. **3+2 Punkte**

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{3\times 3}(\mathbf{Q})$.

(b) Es sei s ein Element aus den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ mit $s^2 = 2$ und $a = 1 + s$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbf{Q}$.

Nachholklausur zur Vorlesung „Diskrete Strukturen“ SS 92

Aufgabe 1. **3 Punkte**

Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $n \equiv 4 \mod 7$, $n \equiv -9 \mod 11$ und $n \equiv -3 \mod 5$ gilt.

Aufgabe 2. **2+2 Punkte**

(a) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 360 mit zwei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

(b) Wieviele nicht-isomorphe abelsche Gruppen der Ordnung 360 mit drei (oder weniger) Erzeugern gibt es? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3. **3+3 Punkte**

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{V}_{3\times 3}(\mathbf{Z}_2)$.

(b) Es sei s ein Element aus den reellen Zahlen $\mathbf{R}$ mit $s^2 = 5$ und $a = s + 3$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von a über $\mathbf{Q}$.

Aufgabe 4. **3 Punkte**

Es sei $I \subseteq \mathbf{Z}_2[x]$ das von $x^5 + x^4 + x^2 + 1$ und $x^5 + x^3 + x^2 + 1$ erzeugte Hauptideal in $\mathbf{Z}_2[x]$. Bestimmen Sie ein Polynom g aus $\mathbf{Z}_2[x]$, so daß $I = \mathbf{Z}_2[x]g(x)$ gilt.

Aufgabe 5. **5 Punkte**

Es sei A eine freie Boolesche Algebra mit freiem Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, x_3\}$. Es seien Elemente $f = x_1x_2x_3 + x_1\overline{x_3} + x_2\overline{x_3} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}$ und $g = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + x_2 + \overline{x_3})(x_1 + \overline{x_2} + \overline{x_3})(\overline{x_1} + x_2 + \overline{x_3})$ aus A geben. Gilt $f = g$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 6. **4 Punkte**

Es seien zwei Polynome $f = x^6 + x^4 + x^3 + 1$ und $g = x^3 + x^2 + 1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben. Bestimmen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von f und g sowie Polynome u und v aus $\mathbf{Z}_2[x]$, für die $d = u * f + v * g$ gilt.

Aufgabe 7. **5 Punkte**

Bestimmen Sie die ganzzahligen Lösungen $x \in \mathcal{V}_{4\times 1}(\mathbf{Z})$ der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 8 & 12 & 14 & 4 \\ 6 & 8 & 12 & 2 \\ 4 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 8. **4 Punkte**

Es sei P die Pyramide . Es sei M die Menge der Ecken, Kanten und Flächen außer der quadratischen Grundfläche sowie P und $\emptyset$. Dann ist $(M, \subseteq)$ eine verbandsgeordnete Menge mit 19 Elementen. Bestimmen Sie die Eulercharakteristik des zugehörigen Verbandes.

Aufgabe 9. **2+8 Punkte**

(a) Bestimmen Sie $\mu(0,1)$ des Verbandes .

(b) Es sei V ein endlicher Verband mit kleinstem Element 0 und größten Element 1. Es gebe genau ein maximales Element m ungleich 0 unterhalb von 1. Zeigen Sie, daß $\mu(0,1) = 0$ gilt.
HINWEIS: Betrachten Sie Ketten von 0 nach 1 und unterscheiden Sie dabei, ob das vorletzte Element der Kette m ist oder nicht.

Aufgabe 10. **2+3+4 Punkte**
Es sei $f = x^3 + x + 1$ aus $\mathbf{Z}_2[x]$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie ein unverkürzbares Erzeugendensystem von $R = \mathbf{Z}_2[x]/(f \cdot \mathbf{Z}_2[x])$ als Ring-mit-1.

(b) Ist R ein Körper? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie ein primitives Element p von R und berechnen Sie p^{49}.

Aufgabe 11. **3+3 Punkte**
Es sei $M = \{(2,1,1,1),(3,2,7,7),(2,1,7,1),(3,2,7,13)\} \subset \mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$. Weiter sei U die von M erzeugte Untergruppe von $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})$.

(a) Zeigen Sie, daß die Faktorgruppe $\mathcal{V}_{1\times 4}(\mathbf{Z})/U$ isomorph zu $\mathbf{Z}_6 \dotplus \mathbf{Z}_6$ ist.

(b) Gegeben Sie zwei verschieden lange, unverkürzbare Erzeugendensysteme für $\mathbf{Z}_6 \dotplus \mathbf{Z}_6$ an.

Aufgabe 12. **4 Punkte**
Wieviele verschiedene Typen von Halsketten mit 5 Perlen gibt es, wenn jede Perle blau, rot, gelb oder grün sein kann?

Aufgabe 13. **5 Punkte**
Es sei s die positive, reelle Zahl, für die $s^2 = 2$ gilt. Bestimmen Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes ein Polynom f kleinsten Grades aus $\mathbf{Q}[x]$, so daß $f(s) = 3$ und $f(-1) = 4$ gilt.
HINWEIS: Wie lautet das Minimalpolynom von s?

Klausur zur Vorlesung Diskrete Strukturen (SS 93)

Professor Dr. H. Pahlings

Bearbeitungszeit: 120 Minuten zuzüglich 10 Minuten Lesezeit

Bitte bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe und schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine schriftlichen Aufzeichnungen und keine elektronischen Rechengeräte. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.
Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

(a) Charakteristik eines Körpers K. *2 Punkte*

(b) Stabilisator eines Elements x einer Menge M, auf der eine Gruppe G operiert. *1 Punkt*

(c) Irreduzibilität eines Polynoms über einem Körper K. *2 Punkte*

Aufgabe 2.
Auf der Menge $M = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ definieren wie mit Hilfe der Eulerschen φ-Funktion eine Relation $\trianglelefteq$ durch

$$m \trianglelefteq n \;\Leftrightarrow\; m = n \text{ oder } \varphi(m) < \varphi(n).$$

(a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(M, \trianglelefteq)$. *3 Punkte*

(b) Ist $(M, \trianglelefteq)$ ein Verband? (Antwort mit Begründung) *2 Punkte*

(c) Es sei μ die zugehörige Möbiusfunktion. Berechnen Sie $\mu(2, 7)$. *2 Punkte*

Aufgabe 3.
Es sei $\varphi = (\pi_1 + \pi_2)(\pi_3 + \pi_2')$ eine Schaltfunktion in P_3.

(a) Berechnen Sie die disjunktive Normalform von φ. *3 Punkte*

(b) Berechnen Sie die konjunktive Normalform von φ. *3 Punkte*

Aufgabe 4.
Es sei C der von den Vektoren 1 0 1 1 0 und 0 1 1 0 1 (als Teilraum von $\mathbb{Z}_2^5$) aufgespannte Gruppencode.

(a) Berechnen Sie die Minimaldistanz $\delta(C)$. *2 Punkte*

(b) Bestimmen Sie Restklassenführer für alle Restklassen von C in $\mathbb{Z}_2^5$. *3 Punkte*

(c) Decodieren sie die Worte 0 0 1 0 1 und 1 1 1 0 0. *1 Punkt*

Aufgabe 5.

(a) Bestimmen Sie alle Drehungen und Spiegelungen der Ebene, die ein regelmäßiges Fünfeck in sich überführen, und geben Sie sie als Permutationen auf den fünf Ecken an. *3 Punkte*

(b) Berechnen Sie unter Benutzung von (a), wieviele verschiedene Typen von Perlenketten mit 5 Perlen es gibt, wenn jede Perle blau, rot, grün oder gelb sein kann? *3 Punkte*

Aufgabe 6.

(a) Es sei φ die Eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(1000)$. *2 Punkte*

(b) Berechnen Sie die letzten drei Ziffern in der Dezimaldarstellung der Zahl 101^{8805}. *3 Punkte*

(c) Welche der Restklassen $[7]_{1000}$, $[5]_{1000}$ und $[14]_{1000}$ in $\mathbb{Z}/1000\mathbb{Z}$ sind invertierbar, welche sind Nullteiler? (Antwort mit Begründung) *2 Punkte*

Aufgabe 7.
Drei Kometen statten alle 11, 8 bzw. 21 Jahre der Erde einen Besuch ab. Zuletzt waren sie vor 2, 5 bzw. 1 Jahren hier. Wann werden sie das nächste Mal alle gleichzeitig da sein, wann waren sie das letzte Mal alle gleichzeitig da? *7 Punkte*

Aufgabe 8.
In $\mathbb{Z}_2[X]$ seien die Polynome $f_1 = X^{12} + X^2 + X + 1$ und $f_2 = X^{10} + X^6 + X^4$ gegeben.

(a) Berechnen Sie $d \in \mathrm{ggT}(f_1, f_2)$. *4 Punkte*

(b) Stellen Sie d in der Form $a \cdot f_1 + b \cdot f_2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[X]$ dar. *2 Punkte*

Aufgabe 9.
Es sei $f = X^5 + X^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$. Untersuchen Sie mit Hilfe des Berlekamp-Algorithmus, ob f irreduzibel ist. *7 Punkte*

Professor Dr. H. Pahlings 5. 10. 93

Nachholklausur zur Vorlesung Diskrete Strukturen

Bearbeitungszeit: 120 Minuten zuzüglich 10 Minuten Lesezeit

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen, und bearbeiten Sie auf jedem Blatt nur eine Aufgabe. Es sind keine Hilfsmittel zugelassen, insbesondere keine schriftlichen Aufzeichnungen und keine elektronischen Rechengeräte. Bitte beachten Sie, daß ausführliche Begründungen einen wesentlichen Teil der Lösung einer Aufgabe bilden. Wenn Sie z. B. Bezeichnungen verwenden, die nicht aus dem Aufgabentext stammen, müssen Sie diese erklären. Die Aufgaben können in beliebiger Reihenfolge bearbeitet werden. Zum Bestehen der Klausur sind 25 Punkte erforderlich. Viel Erfolg!

Aufgabe 1.

Geben Sie für die folgenden Begriffe jeweils eine vollständige Definition an.

(a) Verband. *1 Punkt*

(a) Index einer Untergruppe U in einer Gruppe G. *1 Punkt*

(c) Primitives Element eines Körpers K. *2 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei $\leq$ die kleinste Halbordnung auf der Menge $A := \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, die die Relation $R := \{(1, 3), (2, 3), (3, 6), (2, 4), (4, 6), (2, 5), (5, 6)\}$ umfaßt, und μ die zugehörige Möbiusfunktion.

(a) Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm von $(A, \leq)$. *1 Punkt*

(b) Leiten Sie daraus $\mu(2, 6)$ her (nicht nur das Ergebnis hinschreiben). *1 Punkt*

(c) Stellen Sie die zu $(A, \leq)$ gehörige Inzidenzmatrix auf. *2 Punkte*

(d) Berechnen Sie daraus die Matrix $[\mu(i, j)]$. *2 Punkte*

(e) Ist $(A, \leq)$ ein Verband? (Antwort mit Begründung) *1 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei φ die Euler'sche Funktion und μ die zahlentheoretische Moebius-Funktion.

(a) Berechnen Sie $\varphi(n)$ und $\mu(n)$ für $n = 250$. *2 Punkte*

(b) Berechnen Sie die natürliche Zahle z mit $0 \leq z < 250$ und $7^{8002} \equiv z \bmod 250$. *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Es sei $\varphi = \pi_2(\pi_1' + \pi_3) + \pi_3(\pi_1 + \pi_3')$ eine Schaltfunktion in P_3.

(a) Berechnen Sie die disjunktive Normalform von φ. *3 Punkte*

(b) Berechnen Sie die konjunktive Normalform von φ. *3 Punkte*

Aufgabe 5.

Es sei $R = \mathbb{Z}_2[X]\,/\,(X^3+X^2+X)$. Berechnen Sie alle Einheiten in R und zu jeder Einheit das dazu inverse Element. *7 Punkte*

Aufgabe 6.

Ein regelmäßiges Tetraeder soll so gefärbt werden, daß nicht die Flächen, sondern nur die (sechs) Kanten mit je einer Farbe angemalt werden. Wie viele (bis auf Drehungen) verschiedene Tetraeder kann man erhalten, wenn drei verschiedene Farben zur Verfügung stehen? *7 Punkte*

Aufgabe 7.

Die kleine Lisa muß die beiden Käfige ihrer Meerschweinchen und Wüstenmäuse regelmäßig alle 4 bzw. alle 15 Tage reinigen. Heute ist Dienstag, und sie freut sich, daß die Meerschweinchen erst morgen und die Mäuse erst am Dienstag in der nächsten Woche wieder dran sind. Einmal schon mußte sie an einem Sonntag beide Käfige reinigen, und sie fragt sich, wieviele Tage das schon her ist und wieviele Tage es noch dauert, bis wieder so ein Sonntag kommt. *7 Punkte*

Aufgabe 8.

In $\mathbb{Z}_2[X]$ seien die Polynome $f_1 = X^8 + X^6 + 1$ und $f_2 = X^7 + X^6 + X^4 + 1$ gegeben.

(a) Berechnen Sie mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus $d \in \mathrm{ggT}(f_1, f_2)$. *5 Punkte*

(b) Stellen Sie d in der Form $a\cdot f_1 + b\cdot f_2$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[X]$ dar. *2 Punkte*

Aufgabe 9.

Es sei $f = X^6 - X^5 + X^4 - X^3 - 1 \in \mathbb{Z}_3[X]$. Zerlegen Sie f mit Hilfe des Berlekamp-Algorithmus in irreduzible Faktoren. *7 Punkte*

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 1.

Beweisen Sie: Ist V ein 4-dimensionaler Vektorraum, so gibt es in V drei 2-dimensionale Untervektorräume, so daß die Summe von je zweien dieser Untervektorräume ganz V ist. (Es kommt auf eine klare Formulierung der logischen Zusammenhänge an.) *4 Punkte*

Aufgabe 2.

Es sei $K = \mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen, $A \in K^{2\times 5}$ und $b \in K^{2\times 1}$.

(a) Welche notwendige und hinreichende Bedingung müssen die Matrix A und die Spalte b erfüllen, damit das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau 8 Lösungen hat? (Antwort mit Beweis.)

(b) Wie viele verschiedene homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über K? (Dabei bezeichnen wir zwei lineare Gleichungssysteme als verschieden, wenn die zugehörigen erweiterten Matrizen verschieden sind.)

(c) Wie viele verschiedene nicht homogene lineare Gleichungssysteme mit 2 Gleichungen, 5 Unbekannten und genau 8 Lösungen gibt es über K?

(Es kommt jeweils auf die sorgfältige Argumentation an.) *3 + 3 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 3.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. In $K^{n\times n}$ seien symmetrische Matrizen A und B gegeben, d. h., es sei $A^t = A \in K^{n\times n}$ und $B^t = B \in K^{n\times n}$. Beweisen Sie: Die Matrix AB ist genau dann symmetrisch, wenn $AB = BA$ ist. *3 Punkte*

Aufgabe 4.

Invertieren Sie (mit dem Gauß-Algorithmus) die Matrix $A = \begin{bmatrix} -9 & 2 & -6 \\ 6 & -1 & 4 \\ 19 & -4 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$.

Sie brauchen dabei nicht anzugeben, welche elementaren Umformungen Sie benutzen, Sie müssen aber am Schluß die Matrix A^{-1} explizit angeben. Empfehlung: Vermeiden Sie bei der Rechnung Brüche. (Das Ergebnis ist ganzzahlig.) *4 Punkte*

Aufgabe 5.

Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ seien die Untervektorräume

$$U_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad U_2 = \left\langle \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Berechnen Sie je eine Basis für $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Erläutern Sie dabei den Ansatz Ihrer Rechnung, und geben Sie die Basen konkret an. *5 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 6.
Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{4\times 4}$ mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei $|A|$ und alle vorkommenden 3×3-Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Zeile. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Zeilen oder Spalten oder Anwendung der Regel von Sarruss.) *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Es seien $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f = X^5 - 4X^4 + 4X^3 + X^2 - 9X - 6$ und $g = X^2 - 2X - 3$.

(a) Dividieren Sie f mit Rest durch g. (Formulieren Sie das Ergebnis in einem Schlußsatz.)

(b) Berechnen Sie $g(A)$ und $f(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$. *4 + 3 = 7 Punkte*

Für die Aufgaben 8 und 9 nehmen wir an, es sei V der Vektorraum $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit der Standardbasis $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$, und es sei $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \in V$.

Weiter sei eine Abbildung $\varphi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(v) = Tv$ für alle $v \in V$.

Aufgabe 8.

(a) Zeigen Sie, daß φ linear ist.

(b) Beweisen Sie, ohne die betreffenden Polynome zu berechnen: Die charakteristischen Polynome von T und φ sind verschieden, aber ihre Minimalpolynome sind gleich. Bestimmen Sie dazu der Reihe nach die Grade der Polynome χ_T, χ_φ, μ_T, μ_φ. (Die Begründungen sind wichtig.)

(c) Zeigen Sie, daß φ ein Automorphismus von V ist. *2 + 5 + 2 = 9 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Nach Aufgabe 8 ist φ linear. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von φ. (Achtung: Das müssen Untervektorräume von V sein.)

(d) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht, und geben Sie $\mathcal{C}$, die Basiswechselmatrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$ und die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ an.

3 + 4 + 4 + 3 = 14 Punkte

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 10.

Es sei $a \geq 1$ eine natürliche Zahl. Drücken Sie die Anzahl der ungeordneten k-Zahlpartitionen $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ mit $n_i \geq a$ für $1 \leq i \leq k$ durch die Partitionszahlen $P_{n',k'}$ aus.

7 Punkte

Aufgabe 11.

Zeigen Sie, daß die Anzahl der ungeordneten k-Zahlpartitionen $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ mit $n_i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ für $1 \leq i \leq k$ folgenden Wert hat:

$$P_{n,k} - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} P_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - j, k-1}.$$

9 Punkte

Aufgabe 12.

Bestimmen Sie in folgendem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ einen maximalen Fluß:

$$V = \{x_1, ..., x_9\} \cup \{q, s\},$$

$$B = \{(q, x_i), (x_i, s) | 1 \leq i \leq 9\} \cup \{(x_{i+1}, x_i) | 1 \leq i \leq 8\},$$

$c((q, x_i)) = i$, $c((x_i, s)) = 10 - i$ für $1 \leq i \leq 9$ und $c((x_{i+1}, x_i)) = 9 - i$ für $1 \leq i \leq 8$.

10 Punkte

Aufgabe 13.

Es sei T ein Baum mit zwei nicht adjazenten Ecken vom Grad $d \geq 3$. Zeigen Sie, daß T mindestens $2d - 2$ Endecken besitzt.

9 Punkte

Aufgabe 14.

Die Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+1} + a_{n+2} = 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 3$ und $a_1 = 0$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

7 Punkte

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (17. 9. 1998)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 15.
Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ mit $a_n = 3 + (-2)^n$. Welche Folge $(b_n)_{n\geq 0}$ hat die erzeugende Funktion

$$g(z) = \frac{f(\sqrt{z}) + f(-\sqrt{z})}{2}?$$

(Hinweis: Versuchen Sie es nach Möglichkeit zu vermeiden, die Funktionen f und g explizit zu berechnen.)

10 Punkte

Aufgabe 16.
Die Folge $(c_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion

$$c_{n+3} + 3 \cdot 10 \cdot c_{n+2} + 3 \cdot 100 \cdot c_{n+1} + 1000 \cdot c_n = 0$$

mit den Anfangsbedingungen $c_0 = 0$, $c_1 = -10$, $c_2 = 200$ und $c_4 = 40000$.

Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge. (Beachten Sie, daß c_3 nicht gegeben ist).

9 Punkte

Aufgabe 17.
Zeigen Sie, daß ein Graph G genau dann bipartit ist, wenn für alle seine Teilgraphen H eine Menge $V_H \subseteq V(H)$ mit $|V_H| \geq \frac{|V(H)|}{2}$ existiert, so daß keine zwei Ecken aus V_H in H adjazent sind.

(Hinweis: Betrachten Sie einen Kreis ungerader Länge.) *9 Punkte*

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 1.
Gegeben seien zwei Vektorräume V und W, ein Untervektorraum U von W und eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to W$. Beweisen Sie: $\varphi^{-1}(U) := \{v \in V \mid \varphi(v) \in U\}$ ist ein Untervektorraum von V. *4 Punkte*

Aufgabe 2.
Untersuchen Sie
(a) im Fall $V = \mathbb{Q}^{1\times 2}$,
(b) im Fall $V = \mathbb{F}_2^{1\times 2}$,
ob die Abbildung $\varphi\colon V \to V,\ [\,a,\, b\,] \mapsto [\,a+b,\ a^2+b^2\,]$ linear ist. *2 + 3 = 5 Punkte*

Aufgabe 3.
(a) Gegeben seien zwei lösbare, nicht homogene lineare Gleichungssysteme über einem endlichen Körper K, das eine mit 2 Gleichungen und 4 Unbekannten, das andere mit 4 Gleichungen und 2 Unbekannten. Können die beiden Systeme gleich viele Lösungen haben?
(b) Untersuchen Sie die gleiche Frage für den Fall, dass die beiden Systeme über verschiedenen endlichen Körpern K_1 und K_2 gegeben sind.

Antwort jeweils mit Beweis der Unmöglichkeit oder konkretem Beispiel. *4 + 3 = 7 Punkte*

Aufgabe 4.
Gegeben sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & a & 3 \\ 2 & a & 1 & 0 \\ a & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 4}$.

(a) Berechnen Sie die Determinante von A mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes. Entwickeln Sie dabei $|A|$ und alle vorkommenden 3×3-Unterdeterminanten jeweils nach der letzten Spalte. (Also keine vorherigen elementaren Umformungen, Entwicklung nach anderen Spalten oder Zeilen oder Anwendung der Regel von Sarruss.)
(b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist A invertierbar, für welche nicht?
(c) Für welche $a \in \mathbb{Z}$ ist A ganzzahlig invertierbar?

Antwort jeweils mit Begründung. *4 + 1 + 1 = 6 Punkte*

Aufgabe 5.
Es sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$, und es sei $A \in K^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$.
(a) Es sei $\det(A) = d$. Berechnen Sie $\det(-A)$.
(Geben Sie nicht nur das Ergebnis an, sondern begründen Sie es.)
(b) Zeigen Sie: Wenn n eine ungerade Zahl ist, gilt: Ist $A^t = -A$, so ist A nicht invertierbar.
(Wo geht hier die Charakteristik von K ein?)
(c) Zeigen Sie: Wenn n eine gerade Zahl ist, gilt die Aussage in (b) nicht.
(Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$.) *2 + 3 + 3 = 8 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 6.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum V der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 seien zwei Basen $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $\mathcal{C} = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ mit der Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ sowie zwei Untervektorräume

$$U_1 = \langle\, v_1 + 3v_2 + v_4,\ v_1 - 3v_3 + v_4,\ v_1 + 4v_2 + v_3 + v_4 \,\rangle,$$
$$U_2 = \langle\, w_1 - w_3 + w_4,\ w_2 + 2w_3 - 2w_4 \,\rangle$$

gegeben.

(a) Stellen Sie die Erzeugenden von U_2 als Linearkombinationen aus $\mathcal{B}$ dar.

(b) Berechnen Sie mit Hilfe des Zassenhaus-Algorithmus eine Basis von $U_1 \cap U_2$ und eine Basis von $U_1 + U_2$. (Erläutern Sie Ihre Rechnung außerhalb des eigentlichen Zassenhaus-Schemas, insbesondere den Ansatz, und geben Sie die resultierenden Basen an.)

(c) Berechnen Sie nun die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\mathrm{id}_V)$.

(d) Es seien $w_1 = X^3 - X^2 + 1$ und $w_2 = X^2 - X + 1$. Berechnen Sie eine Darstellung des Durchschnitts $U_1 \cap U_2$ als <u>Menge</u> von Polynomen. (Wenn Sie sich beim Zassenhaus-Algorithmus nicht verrechnet haben, geht das.) *4 + 5 + 3 + 3 = 15 Punkte*

Aufgabe 7.
Es sei $\mathbb{C}$ der Körper der komplexen Zahlen und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A.

(b) Zeigen Sie, ohne irgendwelche Potenzen von A auszurechnen, dass A^5 gleich $16 \cdot A$ ist. (Auf die Argumentation kommt es an.) *4 + 3 = 7 Punkte*

Aufgabe 8.
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $\varphi\colon V \to V$ der durch $\varphi([\,a, b, c\,]) = [\,5a + 2c,\ 2a + 3b + 2c,\ -4a - c\,]$ definierte Endomorphismus von V.

(a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ von φ bezüglich der Standardbasis $\mathcal{B}$ von V.

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von φ und ihre algebraischen Vielfachheiten.

(c) Berechnen Sie die Eigenräume von φ. (Achtung: Das müssen Untervektorräume von V sein.)

(d) Berechnen Sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht, und geben Sie $\mathcal{C}$, die Basiswechselmatrix $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_V)$ und die Abbildungsmatrix $M_{\mathcal{C}}(\varphi)$ an.

1 + 3 + 4 + 3 = 11 Punkte

Aufgabe 9.
Es sei K ein Körper, $a \in K$ und $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$. Bestimmen Sie die Menge aller zu A ähnlichen Matrizen aus $K^{2\times 2}$. (Antwort mit Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 10.

Es seien $a_1, ..., a_n$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Zwei der Zahlen aus der Menge $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$ ergeben bei Division durch n denselben Rest.

b) Es gibt zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so dass $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist. *8 Punkte*

Aufgabe 11.

Es sei a_n für $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der Mengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\{x, x+1 |\, x \in S\} = \{1, ..., n\}$$

ist. Drücken Sie die Zahlen a_n für $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen aus.

(Hinweis: Beweisen Sie eine Rekursion für die a_n.) *8 Punkte*

Aufgabe 12.

Gegeben sei eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\geq 1}$, so dass $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und für $n \geq 2$ der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ aus $G_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ entsteht, indem man zu V_{n-1} eine Ecke v_n hinzufügt und mit mehr als $\frac{n-1}{2}$ Ecken von G_{n-1} verbindet, d.h. $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$.

Zeigen Sie, dass G_n für $n \geq 3$ hamiltonsch ist. *8 Punkte*

Aufgabe 13.

Zeigen Sie, dass $P_{n,k}$ für $n, k \in \mathbb{N}$ die Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen

$$n + k^2 - k = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von $n + k^2 - k$ in genau k Summanden ist, für die $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt. *9 Punkte*

Aufgabe 14.

Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+4} + 3\,a_{n+3} + a_{n+2} = 3\,a_{n+1} + 2\,a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 8$, $a_1 = -8$ und $a_2 = 24$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

7 Punkte

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (15. 3. 1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik
RWTH Aachen

Aufgabe 15.

Die Mengen $A_1, ..., A_n \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ bilden eine „*Kette*“, falls $A_i \subseteq A_{i+1}$ und $A_i \neq A_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für jede Kette $A_1, ..., A_n$ gilt $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$, und es gibt genau $n!$ verschiedene Ketten.

b) Zu einer Menge $B \subseteq \{1, ..., n\}$ gibt es genau $|B|! \cdot (n - |B|)!$ verschiedene Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B|} = B$.

c) Gilt für die Mengen $B_1, ..., B_m \subseteq \{1, ..., n\}$, dass $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$, dann gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

12 Punkte

Aufgabe 16.

Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit den Partitionsmengen U und W mit $|U| = |W| = n$. Es sei $d(x, G) = |N(x, G)| \geq \frac{n}{2}$ für alle $x \in U \cup W$.

Zeigen Sie, dass G ein perfektes Matching besitzt.

(Hinweis: Betrachten Sie eine minimale Eckenüberdeckung.) *8 Punkte*

Aufgabe 17.

Bestimmen Sie einen maximalen Fluss und einen minimalen Schnitt in dem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{q = 1, 2, 3, ..., 8, s = 9\}, \\ B &= \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (4,7), (5,4), \\ &\quad (5,7), (5,8), (6,3), (6,7), (7,9), (8,6), (8,9)\}, \end{aligned}$$

$c((1,2)) = 5$, $c((1,5)) = 10$, $c((2,3)) = 1$, $c((2,6)) = 2$, $c((2,9)) = 1$, $c((3,4)) = 2$, $c((4,7)) = 7$, $c((5,4)) = 5$, $c((5,7)) = 2$, $c((5,8)) = 3$, $c((6,3)) = 3$, $c((6,7)) = 1$, $c((7,9)) = 8$, $c((8,6)) = 2$ und $c((8,9)) = 1$. *8 Punkte*

Musterlösung für den "Diskrete Strukturen"-Teil der Vordiploms-Klausur Mathematik II für Informatiker (15.3.1999)

Professor Dr. G. Hiß, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen
Professor Dr. E. Triesch, Lehrstuhl II für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 10. (8 Punkte)
Es seien $a_1, ..., a_n$ beliebige natürliche Zahlen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Zwei der Zahlen aus der Menge $N = \{0, a_1, a_1 + a_2, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n\}$ ergeben bei Division durch n denselben Rest.

b) Es gibt zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so daß $\sum_{i=k+1}^{l} a_i$ ein Vielfaches von n ist.

Lösung: zu a) Es gibt genau die n verschiedenen Reste $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ bei Division durch n. Da nun $|N| = n + 1 > n$ folgt sofort nach dem 'Schubfachprinzip', daß zwei der Zahlen in N denselben Rest modulo n ergeben. Setzt man $a_0 = 0$, so gibt es zwei Zahlen $0 \leq k < l \leq n$, so daß die beiden Zahlen mit demselben Rest $\sum_{i=0}^{k} a_i$ und $\sum_{i=0}^{l} a_i$ sind.
zu b) Die Zahl $\sum_{i=k+1}^{l} a_i = \sum_{i=0}^{l} a_i - \sum_{i=0}^{k} a_i > 0$ hat den Rest 0 bei Division durch n und ist daher ein Vielfaches von n.

Aufgabe 11. (8 Punkte)
Es sei a_n für $n \in \mathbf{N}$ die Anzahl der Mengen $S \subseteq \{1, ..., n\}$ mit der Eigenschaft, daß $\{x, x+1 | \, x \in S\} = \{1, ..., n\}$ ist. Drücken Sie die Zahlen a_n für $n \in \mathbf{N}$ mit Hilfe der Fibonacci-Zahlen aus.
(Hinweis: Beweisen Sie eine Rekursion für die a_n.)

Lösung: Es gilt $a_1 = 0$, denn für $n = 0$ gibt es keine derartige Menge. Ferner $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$, denn $\{1\}$ und $\{1, 2\}$ sind die einzigen derartigen Mengen. Es sei nun $\mathcal{S}_n$ für $n \geq 4$ die Menge aller Mengen mit der gewünschten Eigenschaft. Weiter sei

$$\mathcal{S}'_n = \{S \in \mathcal{S}_n | n - 2 \in S\}$$

$$\mathcal{S}''_n = \mathcal{S}_n \setminus \mathcal{S}'_n.$$

Es gilt $n-3 \in S$ für alle $S \in \mathcal{S}''_n$.
Nun folgt $|\mathcal{S}'_n| = |\mathcal{S}_{n-1}|$, denn für jedes $S \in \mathcal{S}'_n$ ist $S - \{n-1\} \in \mathcal{S}_{n-1}$ und für jedes $S' \in \mathcal{S}_{n-1}$ ist $S' \cup \{n-1\} \in \mathcal{S}'_n$.
Weiter folgt $|\mathcal{S}''_n| = |\mathcal{S}_{n-2}|$, denn für jedes $S \in \mathcal{S}''_n$ ist $S - \{n-1\} \in \mathcal{S}_{n-2}$ und für jedes $S'' \in \mathcal{S}_{n-2}$ ist $S'' \cup \{n-1\} \in \mathcal{S}''_n$. Daher folgt

$$a_n = |\mathcal{S}_n| = |\mathcal{S}'_n| + |\mathcal{S}''_n| = |\mathcal{S}_{n-1}| + |\mathcal{S}_{n-2}| = a_{n-1} + a_{n-2},$$

d.h. die a_n genügen der Rekursion der Fibonaccizahlen $F_{n'}$ bei verschobenen Anfangsbedingungen ($a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_3 = 1$ statt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ und $F_2 = 1$) und es folgt $a_n = F_{n-1}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 12. (8 Punkte)
Gegeben sei eine Folge von Graphen $(G_n)_{n\geq 1}$, so daß $G_1 = (\{v_1\}, \emptyset)$ und für $n \geq 2$ der Graph $G_n = (V_n, E_n)$ aus $G_{n-1} = (V_{n-1}, E_{n-1})$ entsteht, indem man zu V_{n-1} eine Ecke v_n hinzufügt und mit mehr als $\frac{n-1}{2}$ Ecken von G_{n-1} verbindet, d.h. $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$.
Zeigen Sie, daß G_n für $n \geq 3$ hamiltonsch ist.

Lösung: (Induktion) Es gilt $G_1 = K_1$, $G_2 = K_2$ und $G_3 = K_3$, womit die Aussage für $n = 3$ richtig ist.
Es sei nun G_{n-1} hamiltonsch und O.B.d.A.

$$C = x_1 x_2 ... x_{n-1} x_1$$

ein Hamiltonkreis in G_{n-1}. Da $|N(v_n)| > \frac{n-1}{2}$, existiert ein Index $1 \leq i \leq n-1$ mit $x_i, x_{i+1} \in N(v_n)$ (Indizes modulo $(n-1)$). Daher ist

$$C' = x_1 x_2 ... x_i v_n x_{i+1} ... x_{n-1} x_1$$

ein Hamiltonkreis in G_n und die Behauptung ist bewiesen.

Aufgabe 13. (9 Punkte)
Zeigen Sie, daß $P_{n,k}$ für $n, k \in \mathbf{N}$ die Anzahl der ungeordneten Zahlpartitionen

$$n + k^2 - k = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von $n + k^2 - k$ in genau k Summanden ist, für die $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$ gilt.

Lösung: Es sei $\mathcal{P}_{n,k}$ die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen von n. Es sei weiter $\mathcal{P}'_{n,k}$ die Menge aller ungeordneten k-Zahlpartitionen

$$n = n_1 + n_2 + ... + n_k$$

von n mit $|n_i - n_j| \geq 2$ für alle $1 \leq i < j \leq k$.
Gegeben sei der Ferrergraph eines Elementes aus $\mathcal{P}_{n,k}$. O.B.d.A. enthalte die Zeile $i+1$ mehr Sterne als die Zeile i für $1 \leq i \leq k-1$. Fügt man nun für $1 \leq i \leq k$ in der i-ten Zeile jeweils $2(i-1)$ Sterne hinzu, dann erhält man ein Element aus $\mathcal{P}'_{n',k}$ mit

$$n' = n + \sum_{i=1}^{k} 2(i-1) = n + 2\sum_{i=1}^{k-1} i = n + 2\frac{k(k-1)}{2} = n + k^2 - k.$$

*		*
*		***
**		*******
****	$\longrightarrow$	***********
****		*************
*****		****************

Nun sei umgekehrt der Ferrergraph eines Elementes aus $\mathcal{P}'_{n',k}$ gegeben. O.B.d.A. enthalte wieder die Zeile $i+1$ mehr Sterne als die Zeile i für $1 \leq i \leq k-1$. Wegen der Definition von $\mathcal{P}'_{n',k}$ folgt sofort, daß für $1 \leq i \leq k$ die i-te Zeile mindestens $2(i-1)+1$ Sterne enthalten muß. Streicht man nun für $1 \leq i \leq k$ in der i-ten Zeile jeweils $2(i-1)$ Sterne, dann erhält man ein Element aus $\mathcal{P}_{n,k}$. Die Mengen $\mathcal{P}_{n,k}$ und $\mathcal{P}'_{n',k}$ stehen daher in Bijektion und es folgt

$$|\mathcal{P}'_{n',k}| = |\mathcal{P}'_{n+k^2-k,k}| = |\mathcal{P}_{n,k}| = P_{n,k}.$$

*		*
*		***
**		*******
****	$\longleftarrow$	***********
****		*************
*****		****************

Aufgabe 14. (7 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ genüge der Rekursion $a_{n+4} + 3a_{n+3} + a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 8$, $a_1 = -8$ und $a_2 = 24$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung dieser Folge.

Lösung: Gemäß dem Satz über Rekursionen aus der Vorlesung gilt $q(z) = 1 + 3z + z^2 - 3z^3 - 2z^4$. Die Nullstellen $z = 1$ und $z = -1$ kann man leicht erraten. Damit ergibt sich $q(z) = 1 + 3z + z^2 - 3z^3 - 2z^4 = (1-z)(1+z)^2(1+2z)$ und daher $\alpha_1 = 1$, $d_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $d_2 = 2$ und $\alpha_3 = -2$, $d_3 = 1$. Daher genügt a_n dem Ansatz

$$a_n = a + (b + c \cdot n) \cdot (-1)^n + d \cdot (-2)^n.$$

Mit den Anfangsbedingungen ergibt sich nun folgendes GLS für a, b, c und d.

$$\begin{array}{cccccc} a & +b & & +d & = & 8 \\ a & -b & -c & -2d & = & -8 \\ a & +b & +2c & +4d & = & 24 \\ a & -b & -3c & -8d & = & a_3. \end{array}$$

Dies hat die Lösung:

$$\begin{array}{ccccccc} a & & & & = & 6+\frac{a_3}{12} \\ & b & & & = & 10+\frac{a_3}{4} \\ & & c & & = & 20+\frac{a_3}{2} \\ & & & d & = & -8-\frac{a_3}{3} \end{array}$$ und damit gilt für $n \geq 0$

$$a_n = (6+\frac{a_3}{12}) + ((10+\frac{a_3}{4}) + (20+\frac{a_3}{2}) \cdot n) \cdot (-1)^n + (-8-\frac{a_3}{3}) \cdot (-2)^n.$$

Aufgabe 15. (12 Punkte)

Die Mengen $A_1, ..., A_n \subseteq \{1, ..., n\}$ mit $n \in \mathbf{N}$ bilden eine "*Kette*", falls $A_i \subseteq A_{i+1}$ und $A_i \neq A_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n-1$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für jede Kette $A_1, ..., A_n$ gilt $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$ und es gibt genau $n!$ verschiedene Ketten.

b) Zu einer Menge $B \subseteq \{1, ..., n\}$ gibt es genau $|B|! \cdot (n - |B|)!$ verschiedene Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B|} = B$.

c) Gilt für die Mengen $B_1, ..., B_m \subseteq \{1, ..., n\}$, daß $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$, dann gilt
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

Lösung: zu a) Es gilt $|A_i| < |A_{i+1}| \leq n$ für $1 \leq i \leq n-1$. Daraus folgt sofort $|A_i| = i$ für $1 \leq i \leq n$ und $A_n = \{1, ..., n\}$. Man kann nun alle Ketten bilden, indem man ausgehend von A_n sukzessive Elemente streicht. Für das i-te zu streichende Element hat man dabei jeweils genau $n - i + 1$ Möglichkeiten für $1 \leq i \leq n-1$. Daher gibt es

$$\prod_{i=1}^{n-1} (n-i+1) = \prod_{i=2}^{n} i = n!$$

verschiedene Ketten.

zu b) Man erhält die Mengen $A_1, ..., A_{|B|-1}$ aller gewünschten Ketten, indem man ausgehend von $A_{|B|} = B$ sukzessive Elemente streicht. Dabei hat man wie oben $|B|!$ Möglichkeiten. Weiter erhält man die Mengen $A_{|B|+1}, ..., A_n$ aller gewünschten Ketten, indem man ausgehend von $A_{|B|} = B$ sukzessive Elemente hinzufügt. Analog ergibt sich, daß man dabei $(n - |B|)!$ Möglichkeiten hat. Insgesamt gibt es also $|B|! \cdot (n - |B|)!$ der gesuchten Ketten.
zu c) Da $B_i \not\subseteq B_j$ für $1 \leq i \neq j \leq m$ sind alle Ketten $A_1, ..., A_n$ mit $A_{|B_i|} = B_i$ verschieden von den Ketten $A'_1, ..., A'_n$ mit $A'_{|B_j|} = B_j$. Daher gilt nach den Teilen a) und b)

$$\sum_{i=1}^{m} |B_i|! \cdot (n - |B_i|)! \leq n! \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{|B_i|! \cdot (n - |B_i|)!}{n!} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\binom{n}{|B_i|}} \leq 1.$$

Aufgabe 16. (8 Punkte)
Es sei $G = (U \cup W, E)$ ein bipartiter Graph mit den Partitionsmengen U und W mit $|U| = |W| = n$. Es sei $d(x, G) = |N(x, G)| \geq \frac{n}{2}$ für alle $x \in U \cup W$.
Zeigen Sie, daß G ein perfektes Matching besitzt.
(Hinweis: Betrachten Sie eine minimale Eckenüberdeckung.)

Lösung: Angenommen G habe kein perfektes Matching, dann gilt für eine minimale Eckenüberdeckung V' nach dem Satz von König, daß $|V'| < n$. Es gilt nun entweder $|V' \cap U| < \frac{n}{2}$ oder $|V' \cap W| < \frac{n}{2}$. O.B.d.A. Gelte $|V' \cap U| < \frac{n}{2}$. Weiter gilt $V' \cap W \neq \emptyset$. Sei $x \in V' \cap W$, dann enden alle Kanten, die von x ausgehen in $V' \cap U$ und es gilt

$$d(x, G) \leq |V' \cap U| < \frac{n}{2},$$

was der Voraussetzung widerspricht. Daher folgt die Behauptung.

Aufgabe 17. (8 Punkte)
Bestimmen Sie einen maximalen Fluß und einen minimalen Schnitt in dem Netzwerk $N = (V, B, q, s, c)$ mit

$$\begin{aligned} V &= \{q = 1, 2, 3, ..., 8, s = 9\}, \\ B &= \{(1,2), (1,5), (2,3), (2,6), (2,9), (3,4), (4,7), (5,4), \\ &\quad (5,7), (5,8), (6,3), (6,7), (7,9), (8,6), (8,9)\}, \end{aligned}$$

$c((1,2)) = 5$, $c((1,5)) = 10$, $c((2,3)) = 1$, $c((2,6)) = 2$, $c((2,9)) = 1$, $c((3,4)) = 2$, $c((4,7)) = 7$, $c((5,4)) = 5$, $c((5,7)) = 2$, $c((5,8)) = 3$, $c((6,3)) = 3$, $c((6,7)) = 1$, $c((7,9)) = 8$, $c((8,6)) = 2$ und $c((8,9)) = 1$.

Lösung: Die Funktion $f : B \to \mathbf{R}$ mit $f((1,2)) = 3$, $f((1,5)) = 7$, $f((2,3)) = 1$, $f((2,6)) = 1$, $f((2,9)) = 1$, $f((3,4)) = 2$, $f((4,7)) = 7$, $f((5,4)) = 5$, $f((5,7)) = 0$, $f((5,8)) = 2$, $f((6,3)) = 1$, $f((6,7)) = 1$, $f((7,9)) = 8$, $f((8,6)) = 1$ und $f((8,9)) = 1$ ist ein Fluß der Stärke 10 in N.
Die Menge $V - \{s = 9\}$ definiert einen Schnitt C der Kapazität $1 + 8 + 1 = 10$ in N.
Daher ist f maximal und C minimal.

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 1.

(a) Geben Sie ein Beispiel V eines 16-dimensionalen Vektorraums, dessen Elemente Abbildungen sind. (Vergesen Sie nicht die formal korrekte Angabe der Operationen.)

(b) Geben Sie Teilräume A, B Ihres Vektorraums V an, die die Dimensionen 3 und 4 haben und wo $S := A + B$ die Dimension 5 hat. Welche Dimension hat $D := A \cap B$? *4 + 2 = 6 Punkte*

Aufgabe 2.
Stellen Sie sich einen Vektorraum mit einer endlichen Basisfolge $\mathcal{B}$ als gegeben vor. Weiter seien Teilräume A und B durch endliche Folgen von Erzeugenden gegeben, die überdies als Linearkombinationen in der Basisfolge $\mathcal{B}$ dargestellt sind. Wie prüft man, ob A ein Teilraum von B ist? *4 Punkte*

Aufgabe 3.
Je nach Wahl des reellen Parameters t hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 1 \cdot x_1 & + & 0 \cdot x_2 & - & (t+1) \cdot x_3 & = & -2 \\ 0 \cdot x_1 & + & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & t \\ 1 \cdot x_1 & - & t \cdot x_2 & + & 0 \cdot x_3 & = & 2-t \end{array}$$

unterschiedliche Lösungsmengen.

(a) Für welche Werte von t ist das Gleichungssystem lösbar?

(b) Berechnen Sie in den lösbaren Fällen jeweils die Lösungsmenge M und schreiben Sie sie als Element eines Faktorraums F von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Welche Dimension hat F? *3 + 6 = 9 Punkte*

Aufgabe 4.
Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem so gut wie es geht.

$$\begin{array}{rcrcl} 3x & + & 5y & = & 1 \\ 6x & + & 10y & = & 7. \end{array}$$

5 bis 7 Punkte

Aufgabe 5.
Wir betrachten die quadratischen Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 8 \\ 8 & 8 & 22 \end{bmatrix}, \; A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

(a) Berechnen Sie (multiplikativ) inverse Matrizen zu diesen Matrizen.

(b) Welche der durch $\alpha_i := (x \mapsto A_i\, x \;\text{ für }\; x \in \mathbb{R}^{3\times 1}) \colon \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$ definierten Abbildungen α_1, α_2, α_3 sind linear, welche injektiv, welche Isomorphismen?

(c) Auf einem 3-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit einer Basisfolge $\mathcal{B}$ seien zwei Skalarprodukte Φ und Ψ durch ihre Matrizen ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}} = A_2$ und ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = A_3$ gegeben. Welche dieser Skalarprodukte sind nicht ausgeartet, welche positiv definit? (Begründung.) *6 + 3 + 5 = 14 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 6.
Es sei $V = \mathbb{R}^{1\times 5}$.
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi < \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi = \operatorname{Bild}\varphi$?
Gibt es eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\operatorname{Kern}\varphi > \operatorname{Bild}\varphi$?
(Antwort jeweils mit Beispiel oder Beweis.) *3 Punkte*

Aufgabe 7.
Zur reellen 3×5-Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ betrachten wir die lineare Abbildung $\varphi = (x \mapsto Ax \ \text{ für } \ x \in \mathbb{R}^{5\times 1})\colon \mathbb{R}^{5\times 1} \to \mathbb{R}^{3\times 1}$. Berechnen Sie eine Basisfolge von $\mathbb{R}^{3\times 1}/\operatorname{Bild}\varphi$. *6 Punkte*

Aufgabe 8.
In einem n-dimensionalen K-Vektorraum V seien Basisfolgen $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ sowie eine lineare Abbildung φ und eine Bilinearform Φ gegeben, so dass ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{C}}\Phi_{\mathcal{C}} = A \in K^{n\times n}$ und ${}_{\mathcal{D}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = {}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = B \in K^{n\times n}$ gilt. Berechnen Sie für die Matrizen ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{B}}\Phi_{\mathcal{B}}$ jeweils eine Formel, die die gesuchte Matrix in A und B ausdrückt (und keine Klammern enthält). *5 Punkte*

Aufgabe 9.

(a) Geben Sie ein Beispiel eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V mit einer nicht ausgearteten Bilinearform Φ und einem Teilraum $W \leq V$, für den V nicht die (innere) direkte Summe der Teilräume W und $W^\perp$ ist.

(b) Gilt in Ihrem Beispiel die Formel $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$? *4 + 1 = 5 Punkte*

Aufgabe 10.
Auf dem reellen Intervall $I = [0, 1]$ sei die Funktion $f = (x \mapsto -x^2 + 1)\colon I \to I$ gegeben. Stellen sie sich vor, jemand fragt Sie: Welche der beiden Polynomfunktionen $g = (x \mapsto -x + 1)\colon I \to I$ und $h = (x \mapsto -x + \frac{5}{4})\colon I \to I$ vom Grad 1 approximiert f „besser“? Da Sie wegen Ihrer Klausur wenig Zeit haben, überlassen Sie ihm das Rechnen und sagen ihm nur, welche Ausdrücke er ausrechnen soll. Welche? *4 Punkte*

Aufgabe 11.
Wie viele Geraden hat ein 3-dimensionaler affiner Raum (also ein affiner Raum über einem 3-dimensionalen Vektorraum) über dem Körper $\mathbb{Z}_2$? (Wie ergibt sich diese Anzahl?) *4 Punkte*

Aufgabe 12.
Wegen $4711 = 7 \cdot 673$ ist der Restklassenring $\mathbb{Z}_{4711} = \mathbb{Z}/4711\,\mathbb{Z}$ kein Körper. Trotzdem besitzt die Restklasse, in der die Zahl 205 liegt, ein (multiplikativ) inverses Element (warum?). Berechnen Sie es (und erläutern Sie dabei ihre Rechnung). *5 Punkte*

Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 13.

Formulieren Sie den Satz von Dilworth für den Spezialfall eines Spernerposets P, und verifizieren Sie ihn am Hassediagramm eines rangsymmetrischen Spernerposets ihrer Wahl, welches $\mathcal{B}_3$ (=Poset der Teilmengen von $\{1,2,3\}$) als echtes induziertes Unterposet enthält. *7 Punkte*

Aufgabe 14.

(a) Zeichnen Sie die Hassediagramme des Posets $P = \underline{1} \oplus (\underline{2} + \underline{2}) \oplus \underline{1}$ und des Posets $\mathcal{O}(P)$ aller Ideale von P. Geben Sie den Elementen von P geeignete Namen und notieren Sie an jedem Element von $\mathcal{O}(P)$ die Elemente des entsprechenden Ideals von P; unterstreichen Sie dabei die Elemente der erzeugenden Antikette.

(b) Charakterisieren Sie für beliebige Posets P und Q die Elemente von $\mathcal{O}(P \oplus Q)$ mit Hilfe der Elemente von $\mathcal{O}(P)$ und $\mathcal{O}(Q)$. *6 + 4 = 10 Punkte*

Aufgabe 15.

Beweisen Sie einmal algebraisch und dann kombinatorisch mit Hilfe von Teilmengen:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} \qquad \text{für} \quad n,r,k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\ldots\}$$

und leiten Sie daraus ab:

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k} = 2^r \binom{n}{r} .$$

8 Punkte

Aufgabe 16.

N.N. behauptet:

“Die Anzahl der k-Multimengen, die man aus einer n-Menge bilden kann, ist $\frac{n^k}{k!}$, weil ....”

(a) Was hat N.N. vermutlich als Begründung gegeben und was ist daran verkehrt?

(b) Welches ist die richtige Anzahl? Ist diese $\geq$ oder $\leq$ als $\frac{n^k}{k!}$, oder hängt das von n und k ab?

(c) Geben Sie einen Beweis des richtigen Ergebnisses. *4 + 2 + 3 = 9 Punkte*

Aufgabe 17.

Eine Zählfunktion $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{C}$ habe die rationale erzeugende Funktion

$$\sum_{n\geq 0} f(n)x^n = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{-4x^3 + 4x^2 + 7x + 2}{4x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 2x + 1} .$$

Bestimmen Sie eine Rekursionformel (inklusive Anfangsbedingungen) und eine explizite Darstellung für f. *12 Punkte*

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (16. 9. 1999)

Professor Dr. U. Schoenwaelder, Lehrstuhl D für Mathematik
Priv.-Doz. Dr. R. Winkel, Lehrstuhl für Mathematik und Institut für Reine und Angewandte Mathematik, RWTH Aachen

---

Aufgabe 18.
Für jede natürliche Zahl n sei

$$L_n := \{(l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid 0 \leq l_i \leq n - i,\ i = 1, \ldots, n\}$$

und S_n die Menge der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$.

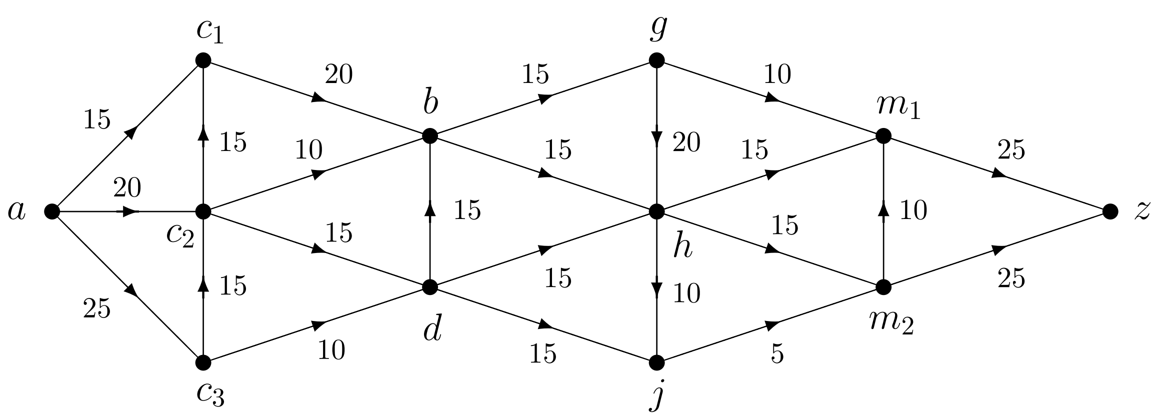
(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $L : S_n \longrightarrow L_n$ definiert durch

$$l_i = l_i(\pi) := \sharp\{j \mid i < j, \pi(i) > \pi(j)\} \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, n$$

eine Bijektion mit $l_1 + \ldots + l_n = l(\pi)$ $[l(\pi)$ die Länge von $\pi]$ ist.

(b) Berechnen Sie $L(\pi)$ für $\pi = 4163752 \in S_7$ und $L^{-1}(3, 6, 4, 0, 2, 1, 1, 0) \in S_8$. *6 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabe 19.
Bestimmen Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk zwei maximale Flüsse mit *verschiedenen* zugehörigen minimalen Schnitten $L = (A, \overline{A})$:



Überprüfen Sie, dass es sich bei Ihren Lösungen tatsächlich um Flüsse handelt und dass in beiden Fällen die maximalen Flussstärken mit den minimalen Kapazitäten übereinstimmen; markieren Sie alle für die Berechnung der Kapazität relevanten Kanten. *12 Punkte*

Aufgabe 20.

(a) Geben Sie den Satz von Turan an und folgern Sie daraus, dass jeder Graph mit $2n$ Ecken und $n^2 + 1$ oder mehr Kanten einen K_3 als Untergraph enthält.

(b) Zeigen Sie, dass jeder 3-reguläre Graph G eine gerade Eckenzahl hat, und bestimmen Sie die Anzahl der Kanten von G.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass es (bis auf Isomorphie) nur einen 3-regulären Graphen mit 4 Ecken geben kann. *4 + 2 + 2 = 8 Punkte*

Aufgabenblatt 1 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 1.
Welche der folgenden Teilmengen des Zeilenraums $V = \mathbb{R}^{1\times 3}$ sind Teilräume von V?

(a) $M_1 = \{ [a,b,c] \in V \mid a+b+c = 0 \}$,

(b) $M_2 = \{ [a,b,c] \in V \mid a^2+b^2+c^2 = 0 \}$,

(c) $M_3 = \{ [a,b,c] \in V \mid a^3+b^3+c^3 = 0 \}$.

(Antwort jeweils mit Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 2.
Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Wir berechnen daraus eine neue Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, indem wir zunächst auf A die Zeilenumformung $Z_2 \mid Z_2 + 2\,Z_1$ und dann auf die so entstandene Matrix die Zeilenumformung $Z_3 \mid Z_3 - Z_1 + 3\,Z_2$ anwenden. Schreiben Sie B als Produkt zweier Matrizen, von denen eine gleich A ist. *3 Punkte*

Aufgabe 3.

(a) Berechnen Sie für die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 6 & 7 \\ -1 & 1 & -9 & 1 \\ 2 & -2 & -2 & 13 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}$ eine Basis des Zeilenraums und eine Basis des Spaltenraums.

(b) Begründen Sie Ihre Berechnungsmethode für die Basis des Zeilenraums. *6 Punkte*

Aufgabe 4.
Invertieren Sie mit Hilfe des Gauß-Algorithmus die Matrix $M = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$. *4 Punkte*

Aufgabe 5.
Max behauptet:

Sind u, v Vektoren eines Vektorraums V und ist $v \in \langle u \rangle$, so ist die Folge (u, v) linear abhängig.

Moritz behauptet:

Sind u, v Vektoren eines Vektorraums V und ist die Folge (u, v) linear abhängig, so gilt $v \in \langle u \rangle$.

Wer hat Recht? Beide, einer, keiner? Falls nicht beide: Für welche Vektorräume sind beide Aussagen wahr? (Es kommt auf die sorgfältige und vollständige Argumentation an.) *6 Punkte*

Aufgabe 6.
Berechnen Sie das Rechtsradikal $A^\perp = \{y \in \mathbb{Q}^{4\times 1} \mid x \cdot A \cdot y = 0 \;\text{ für alle }\; x \in \mathbb{Q}^{1\times 3}\}$ zur Matrix A aus Aufgabe 3. Begründen Sie dabei Ihr Vorgehen. *5 Punkte*

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, das die Lösungsmenge $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \subset \mathbb{R}^{3\times 1}$ hat. (Erklären Sie, wie Sie darauf kommen, und zeigen Sie, dass es die Bedingung erfüllt.) *4 Punkte*

Aufgabe 8.
Geben Sie ein (konkretes) Beispiel für eine surjektive lineare Abbildung an, so dass die Dimension des Kerns dreimal so groß ist wie die Dimension des Bildes. *3 Punkte*

Aufgabenblatt 2 (Lineare Algebra I) zur
Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 9.
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir wollen Polynomfunktionen f und g auf $\mathbb{R}$ „n-äquivalent" (bei $x = 0$) nennen, wenn ihre Differenz die Form $(f-g)(x) = x^n \cdot q(x)$ $(x \in \mathbb{R})$ für eine Polynomfunktion $q \in P(\mathbb{R})$ hat.

(a) Zeigen Sie, dass n-Äquivalenz eine Äquivalenzrelation auf $P(\mathbb{R})$ ist.

(b) Geben Sie für $n = 1$ ein Repräsentanten<u>system</u> für die Äquivalenzklassen an.

(c) Kann man (allgemein) die n-Äquivalenzklassen als Elemente eines Faktorraums von $P(\mathbb{R})$ schreiben? (Begründung.) *6 Punkte*

Aufgabe 10.
Im Restklassenring $\mathbb{Z}_{2001} = \mathbb{Z}/2001\,\mathbb{Z}$ betrachten wir die Elemente $a = \overline{49}$ und $b = \overline{81}$.

(a) Prüfen Sie möglichst einfach nach, ob die Elemente a und b invertierbar sind.

(b) Berechnen Sie die Inversen von a und b, soweit sie existieren. (Erläutern Sie dabei Ihre Rechnung.) *5 Punkte*

Aufgabe 11.
Gegeben seien ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$, eine lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ und ein Skalarprodukt $\Gamma\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Dabei sei ${}_{\mathcal{B}}\mathrm{id}_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ und ${}_{\mathcal{B}}\varphi_{\mathcal{B}} = {}^{\mathcal{B}}\Gamma_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{C}}\varphi_{\mathcal{C}}$ und ${}^{\mathcal{C}}\Gamma_{\mathcal{C}}$.

(b) Ist Γ nicht ausgeartet? Ist Γ positiv definit? (Antwort mit Begründung.) *5 Punkte*

Aufgabe 12.
Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von V und Ψ das durch ${}^{\mathcal{B}}\Psi_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ gegebene Skalarprodukt auf V. Berechnen Sie eine Basisfolge $\mathcal{C}$ von V, für die ${}^{\mathcal{C}}\Psi_{\mathcal{C}}$ eine Diagonalmatrix ist.

(Empfehlung: Vermeiden Sie Brüche.) *5 Punkte*

Aufgabe 13.
Im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen vom Grad ≤ 1 seien die Vektoren

$$a = (x \mapsto 3 + 2x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{und} \quad b = (x \mapsto 1 - x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

gegeben. Geben Sie positiv definite Skalarprodukte Γ_1 und Γ_2 auf $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ an, so dass a und b bezüglich Γ_1 orthogonal, aber bezüglich Γ_2 nicht orthogonal sind. *4 Punkte*

Aufgabe 14.
Wir betrachten $\mathbb{R}^{1\times 2}$ als euklidischen Vektorraum bezüglich des Skalarprodukts Φ mit ${}^{\mathcal{S}}\Phi_{\mathcal{S}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ bezüglich der Standardbasisfolge $\mathcal{S}$.

Welcher Vektor in $\langle [3,3] \rangle$ approximiert den Vektor $[0,3]$ am besten? (Begründung.) *4 Punkte*

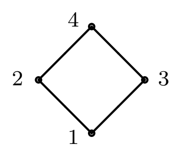
Aufgabenblatt 3 (Diskrete Strukturen) zur

Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 15.
Beschreiben Sie für jede natürliche Zahl $L \geq 3$ ein Poset P mit den folgenden Eigenschaften: L ist die Länge der längsten Kette von P und jedes Element von P liegt in einer Kette der Länge L; trotzdem besitzt P auch eine maximale (= gesättigte) Kette der Länge $< L$, ja sogar maximale Ketten aller Längen k für $1 < k < L$. *7 Punkte*

Aufgabe 16.
Definieren Sie die Verfeinerungsordnung für das Poset $\mathcal{P}_n$ aller Mengenpartitionen von $\{1, \ldots, n\}$ und die entsprechende Überdeckungsrelation. Zeichnen Sie das Unterposet von $\mathcal{P}_4$, welches als Elemente alle Partitionen von



in *konvexe* Blöcke enthält. (Beschriften Sie die Elemente geeignet!) Welche Elemente von $\mathcal{P}_4$ kommen dabei nicht vor? *8 Punkte*

Aufgabe 17.
Gegeben sei ein konvexes n-Eck, bei dem sich nie mehr als zwei Verbindungsgeraden von je 2 Ecken in einem Punkt schneiden. Wie viele Schnittpunkte von je zwei Verbindungsgeraden liegen echt im Inneren des n-Ecks (also nicht außerhalb und nicht auf dem Rand)? *9 Punkte*

Aufgabe 18.
Die *Eulerzahlen* $A(n, k)$ zählen die Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k *Anstiegen*, wobei ein Platz i ein Anstieg von π ist, wenn $\pi(i) < \pi(i+1)$ gilt. (Man setzt $A(0,0) := 1$, $A(0,k) := 0$ für $k \geq 1$). Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursionsformel

$$A(n,k) = (n-k)\, A(n-1, k-1) + (k+1)\, A(n-1, k).$$ *9 Punkte*

Aufgabe 19.
Gegeben sei die lineare Rekursion

$$f(n+4) - 3\,f(n+3) - 6\,f(n+2) + 28\,f(n+1) - 24\,f(n) = 0$$

mit Anfangsbedingungen

$$f(0) = 1,\ \ f(1) = 3,\ \ f(2) = 13,\ \ f(3) = 35.$$

Berechnen Sie die explizite Lösung und geben Sie eine rationale erzeugende Funktion für die Koeffizienten $f(n)$ an. *12 Punkte*

Aufgabenblatt 4 (Diskrete Strukturen) zur

Vordiplom-Klausur Mathematik II (21. 3. 2000)

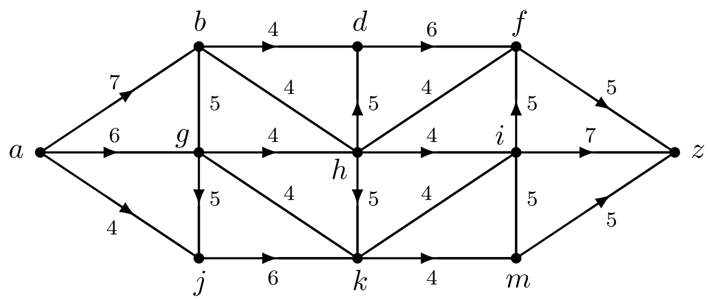
Professor Dr. H. Pahlings, Professor Dr. U. Schoenwaelder
Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

Aufgabe 20.

Zeigen Sie: In jeder Gruppe von $n \geq 2$ Personen sind immer (mindestens) zwei, welche mit der gleichen Anzahl anderer Personen in der Gruppe bekannt sind. ("Bekanntsein" wird als irreflexive, symmetrische Relation aufgefaßt, welche im Allgemeinen nicht transitiv ist.) Formulieren Sie die Behauptung auch in der Sprache der Graphentheorie. *8 Punkte*

Aufgabe 21.

Bestimmen und skizzieren Sie für das nachstehend abgebildete Netzwerk (mindestens) vier maximale Flüsse mit ganzzahligen Werten. (Ungerichtete Kanten können dabei in beiden Richtungen mit der angegebenen Kapazität durchlaufen werden).



Ist es möglich, zwei maximale Flüsse mit verschiedenen *zugehörigen* minimalen Schnitten $L = (A, \overline{A})$ zu finden? *8 Punkte*

Aufgabe 22.

Zeigen Sie, dass ein Graph $G = (E, K)$ mit $|E| = n$ und $|K| > \binom{n-1}{2}$ zusammenhängend ist. Gibt es einen unzusammenhängenden Graphen mit n Ecken und $|K| = \binom{n-1}{2}$ Kanten? *7 Punkte*

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 20.09.2000

DIPLOMVORPRÜFUNG

Mathematik II (Diskrete Strukturen)

Aufgabe 15: (7 Punkte)

Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq n$, die folgende Kongruenz erfüllen:

$$(2^t - 1)^2 \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

Aufgabe 16: (8 Punkte)

Es sei G ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) \geq 3$. Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{dm}(G) = r(G)$, so besitzt G keine Brücke.

Aufgabe 17: (9 Punkte)

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 4$ mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq \dfrac{n(G)}{2}$, und es sei M ein perfektes Matching von G mit $d(x, G) + d(y, G) \leq n(G) - 2$ für jede Kante $xy \in M$. Zeigen Sie, daß der Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 18: (8 Punkte)

Es sei φ die Eulersche φ-Funktion.

a) Bestimmen Sie $\varphi(2000)$.

b) Bestimmen Sie diejenige ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 1999$, die folgende Kongruenz erfüllt:

$$(123)^{802} \equiv x \pmod{2000}.$$

Aufgabe 19: (9 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der a_n.

Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellungen aus den Beispielen 6.1 a) und 6.1 d).

Aufgabe 20: (9 Punkte)

Bestimmen Sie für $n \geq 4$ die Anzahl $F(n, n-3)$ der Permutationen aus S_n mit mindestens $n - 3$ Fixpunkten.

Gibt es mehr oder weniger als $2\dbinom{n+1}{3}$ solcher Permutationen?

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 27.03.2001

DIPLOMVORPRÜFUNG
Mathematik II (Diskrete Strukturen)

Aufgabe 12: (9 Punkte)

Es sei p eine Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ und $m = \sum_{i=0}^{p-2} a^i$. Für welche a mit $1 \leq a \leq p$ ist p ein Teiler von m ?

Aufgabe 13: (8 Punkte)
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $> \frac{n}{2}$, dann hat T_n einen orientierten Hamiltonkreis.

b) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $\geq \sqrt{2n}$, dann ist T_n stark zusammenhängend.

Aufgabe 14: (8 Punkte)
Es sei G ein schlichter, Eulerscher Graph und $\mu(G)$ sein Index.

a) Zeigen Sie, dass es eine Menge $K' \subseteq K(G)$ von $\frac{\Delta(G)}{2}$ verschiedenen Kanten gibt, so dass $G \setminus K' = (E(G), K(G) \setminus K')$ zusammenhängend ist.

b) Ist es möglich, dass $\mu(G) < \frac{\Delta(G)}{2}$ gilt? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Bestimmen Sie alle schlichten, Eulerschen Graphen G mit $\mu(G) = 1$.

Aufgabe 15: (8 Punkte)
Es seien k und n zwei natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Eine *k-Zahlpartition der Zahl n ohne Wiederholung* ist eine Darstellung von n als Summe von k paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Wird die Anordnung der Summanden nicht berücksichtigt, so bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen k-Zahlpartitionen von n ohne Wiederholung mit $w(n, k)$.

a) Bestimmen Sie $w(n, 2)$ für $n \geq 2$.

b) Bestimmen Sie *(ohne Beweis)* für festes gegebenes $k \in \mathbb{N}$ alle $n \geq k$ mit $w(n, k) = 1$.

c) Es sei $n = 2t^2 + 2t - 2$ mit $t \in \mathbb{N}$. Für welche t gilt $w(n, 2t) \geq 2$?
(Begründung mit b) oder direkt.)

Aufgabe 16: (8 Punkte)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 2$ und $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe 17: (9 Punkte)

a) Wieviele ungeordnete 3-Zahlpartitionen $p(100, 3)$ gibt es?

b) Wieviele verschiedene natürliche Zahlen $n \geq 1\,000\,000$ gibt es, die die gleichen Ziffern wie die Zahl $6\,111\,670$ besitzen?

c) Es sei μ die Möbiussche μ-Funktion. Berechnen Sie $\sum_{d/1092} 2(1 + \mu(d))$.