Name: Matrikelnummer:

Klausur zur Vorlesung Diskrete Strukturen (13. 7. 2001)

Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH Aachen

---

Ankreuzteil

Aufgabe A1. Es seien $s_{n,k}$ und $S_{n,k}$ die Stirlingzahlen 1. bzw. 2. Art. Dann gilt:

(1) $S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$ für $1 \le k \le n$. ☐ Ja ☐ Nein

(2) $\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = 2^n$. ☐ Ja ☐ Nein

(3) Was ist $S_{4,2}$? ☐

Aufgabe A2. Ist $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbb{Q}[[x]]$ eine formale Potenzreihe, so ist:

(1) $A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n$ ☐ Ja ☐ Nein

(2) $x^2 A = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$ ☐ Ja ☐ Nein

(3) A genau dann in $\mathbb{Q}[[x]]$ invertierbar, wenn $a_0 = 1$ ist ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe A3. Ist K ein Körper und $f \in K[x]$ mit $\operatorname{Grad} f \ge 1$, so gilt:

(1) Gibt es kein $c \in K$ mit $(x + c) \mid f$, so ist f irreduzibel. ☐ Ja ☐ Nein

(2) Ist $K[x] / f\, K[x]$ ein Körper, so ist f irreduzibel. ☐ Ja ☐ Nein

(3) $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel. ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe A4.

(1) Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}/9\,\mathbb{Z}$? ☐

(2) $\mathbb{Z}/9\,\mathbb{Z}$ ist ein Körper. ☐ Ja ☐ Nein

(3) Wie viele Elemente hat $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 - 1)\, \mathbb{Z}_3[x]$? ☐

(4) $\mathbb{Z}_3[x] / (x^2 - 1)\, \mathbb{Z}_3[x]$ ist ein Körper. ☐ Ja ☐ Nein

---

Aufgabe A5.

Es sei C der Code über $\mathbb{Z}_2$ mit der Generatormatrix $G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) Was ist die Dimension von C? ☐

(2) C ist zyklisch. ☐ Ja ☐ Nein

(3) Die Minimaldistanz von C ist 3. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A6. Gibt es einen Graphen $G = (V, E)$ mit $|V| \le 5$ und

(1) $\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 9$? ☐ Ja ☐ Nein

(2) $\sum_{v \in V} \mathrm{d}(v) = 22$? ☐ Ja ☐ Nein

(3) Adjazenzmatrix A mit $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$? ☐ Ja ☐ Nein

---

Rechenaufgaben ohne Begründung

Aufgabe R1. (7 Punkte)

(1) Wie viele injektive Abbildungen $f: \{1,2\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es? ....

(2) Wie viele surjektive Abbildungen $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3\}$ gibt es? ....

(3) Wie viele injektive Abbildungen $f: \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ gibt es? ....

Aufgabe R2. (4 Punkte)

Es seien die Permutationen $a = (1\ 2\ 5)\,(3\ 6\ 7\ 8\ 4)$ und $c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 5 & 3 & 8 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ aus S_8 gegeben.

(1) Die Zyklendarstellung von c ist ....

(2) Die Ordnung von a ist ....

(3) Die Zyklendarstellung von a^3 ist ....

(4) Die Zyklendarstellung von a^{3001} ist ....

Aufgabe R3. (4 Punkte)

Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d der Zahlen 532 und 434 und stellen Sie ihn in der Form $d = a \cdot 532 + b \cdot 434$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ dar. ....

Aufgabe R4. (8 Punkte)

(1) Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(60)$. ....

(2) Wie viele Einheiten (invertierbare Elemente) hat der Ring $\mathbb{Z}/60\,\mathbb{Z}$? ....

(3) Bestimmen Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \equiv 7^{162} \bmod 60$. ....

Aufgabe R5. (6 Punkte)

(1) Die Anzahl der irreduziblen Teiler von $x^{2^5} - x \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist ....

(2) Die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grad 5 über $\mathbb{Z}_2$ ist ....

Aufgabe R6. (5 Punkte)

Wie viele Ideale hat der Ring $\mathbb{Z}_2[x]\,/(x^5+1)\,\mathbb{Z}_2[x]$? ....

Aufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe L1. (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ und $a_n = -a_{n-1} + 2\,a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe L2. (6 Punkte)

Geben Sie explizit einen Isomorphismus $\psi: \mathbb{Z}_{220} \to \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{11}$ an und berechnen Sie

$$\psi([135]_{220}),\quad \psi([187]_{220}) \quad \text{und} \quad \psi([135 \cdot 187]_{220}).$$

Benutzen Sie dies, um $[135]_{220} \cdot [187]_{220}$ in $\mathbb{Z}_{220}$ auszurechnen.

Ankreuzteil

Aufgabe A1. Es seien $s_{n,k}$ die Stirlingzahlen 1. Art. Dann gilt:

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + k \cdot s_{n-1,k}$ für $1 \leq k \leq n$. ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = n!$. ☐ Ja ☐ Nein

$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$ für $n \geq 1$. ☐ Ja ☐ Nein

$s_{4,2}$ hat den Wert ☐

Aufgabe A2. Es sei $\mathbb{Q}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{Q}$. Dann gilt:

$\frac{x}{1+x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. ☐ Ja ☐ Nein

$\frac{1+x}{x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $x^3 A = \sum_{i=3}^{\infty} a_{i-3} x^i$. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $A^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 x^i$. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A3. Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$. Dann gilt:

Ist $\operatorname{Grad} f = 0$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 1$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. ☐ Ja ☐ Nein

Hat f in K keine Nullstelle, so ist f irreduzibel in $K[x]$. ☐ Ja ☐ Nein

$x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A4. Es sei $f = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ und $R = \mathbb{Z}_2[x] / f\,\mathbb{Z}_2[x]$. Dann gilt:

Die Anzahl der Elemente von R ist ☐

R ist ein Körper. ☐ Ja ☐ Nein

Das Inverse von $[x^2 + x + 1]_f$ in R ist $[x^3 + x^2 + 1]_f$. ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Teiler von f in $\mathbb{Z}_2[x]$ ist ☐

Aufgabe A5.

Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, so ist $|V| \leq |E| + 1$. ☐ Ja ☐ Nein

Es gibt einen 3-regulären Graphen mit 7 Knoten. ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen K_6 ist ☐

Rechenaufgaben ohne Begründung

Aufgabe R1. (4 Punkte)

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $f\colon \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ist ☐

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f\colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2\}$ ist ☐

Aufgabe R2. (4 Punkte)
Es seien die Permutationen $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 3 & 8 & 9 & 4 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ aus S_9 und $b = (1\ 4\ 6)\,(2\ 3\ 7\ 5)$ aus S_7 gegeben.

Die Zyklendarstellung von a ist .... [ ]

Die Ordnung von b ist .... [ ]

Die Zyklendarstellung von b^{-1} ist .... [ ]

Die Zyklendarstellung von b^{27} ist .... [ ]

Aufgabe R3. (4 Punkte)
Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von $f = x^4 + 1$ und $g = x^3 + x^2 + 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ und stellen Sie ihn in der Form $d = a \cdot f + b \cdot g$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[x]$ dar. Geben Sie d, a und b an.

$d =$	$a =$	$b =$

Aufgabe R4. (5 Punkte)
Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(100)$. .... [ ]

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \equiv 13^{162} \bmod 100$. .... [ ]

Aufgabe R5. (5 Punkte) Es sei C der binäre zyklische Code der Länge 7 mit Generatorpolynom $g = x^3 + x + 1$, also

$$C = \{\, (c_i)_{i=0}^{6} \mid \left[\sum_{i=0}^{6} c_i x^i\right]_{x^7-1} = [g \cdot h]_{x^7-1} \text{ für ein } h \in \mathbb{Z}_2[x] \,\}.$$

Die Dimension von C ist .... [ ]

Die Anzahl der Codeworte in C ist .... [ ]

Die Minimaldistanz von C ist .... [ ]

$(1, 1, 0, 0, 0, 0, 0)$ wird decodiert als .... [ ]

Aufgabe R6. (5 Punkte)
Es sei (V, E) der Baum mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 6\}$ und dem Prüfercode $(2, 3, 3, 2)$. Geben Sie die Nachbarn von 3 an, also die Menge $\{a \in V \mid \{a, 3\} \in E\}$. .... [ ]

Aufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe L1. (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} \in \mathbb{Q}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe L2. (8 Punkte)

Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Bestimmen Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 6$. Für welche dieser n ist die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}_n^*$ zyklisch? Geben Sie jeweils alle erzeugenden Elemente $[a]_n$ dieser Gruppe an.

Ankreuzteil

Aufgabe A1. Es seien $s_{n,k}$ die Stirlingzahlen 1. Art. Dann gilt:

$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + k \cdot s_{n-1,k}$ für $1 \leq k \leq n$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} = n!$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$ für $n \geq 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$s_{4,2}$ hat den Wert .... ☐

Aufgabe A2. Es sei $\mathbb{Q}[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen über $\mathbb{Q}$. Dann gilt:

$\frac{1+x}{x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$\frac{x}{1+x} \in \mathbb{Q}[[x]]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $A^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 x^i$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, so ist $x^3 A = \sum_{i=3}^{\infty} a_{i-3} x^i$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A3. Es sei K ein Körper und $f \in K[x]$. Dann gilt:

Hat f in K keine Nullstelle, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 0$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $\operatorname{Grad} f = 1$, so ist f irreduzibel in $K[x]$. .... ☐ Ja ☐ Nein

$x^4 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ ist irreduzibel. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A4. Es sei $f = x^4 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ und $R = \mathbb{Z}_2[x] \,/\, f\, \mathbb{Z}_2[x]$. Dann gilt:

Die Anzahl der Teiler von f in $\mathbb{Z}_2[x]$ ist .... ☐

Das Inverse von $[x^2 + x + 1]_f$ in R ist $[x^3 + x^2 + 1]_f$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Elemente von R ist .... ☐

R ist ein Körper. .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe A5.

Es gibt einen 3-regulären Graphen mit 7 Knoten. .... ☐ Ja ☐ Nein

Ist $G = (V, E)$ ein zusammenhängender Graph, so ist $|V| \leq |E| + 1$. .... ☐ Ja ☐ Nein

Die Anzahl der Kanten des vollständigen Graphen K_6 ist .... ☐

Rechenaufgaben ohne Begründung

Aufgabe R1. (4 Punkte)

Die Anzahl der injektiven Abbildungen $f\colon \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ ist .... ☐

Die Anzahl der surjektiven Abbildungen $f\colon \{1,2,3,4\} \to \{1,2\}$ ist .... ☐

Aufgabe R2. (4 Punkte)
Es seien die Permutationen $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 2 & 4 & 8 & 9 & 3 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ aus S_9 und $b = (1\ 4\ 6\ 2)\,(3\ 7\ 5)$ aus S_7 gegeben.

Die Zyklendarstellung von a ist ....

Die Ordnung von b ist ....

Die Zyklendarstellung von b^{-1} ist ....

Die Zyklendarstellung von b^{27} ist ....

Aufgabe R3. (4 Punkte)
Berechnen Sie einen größten gemeinsamen Teiler d von $f = x^4 + 1$ und $g = x^2 + x + 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$ und stellen Sie ihn in der Form $d = a \cdot f + b \cdot g$ mit $a, b \in \mathbb{Z}_2[x]$ dar. Geben Sie d, a und b an.

$d =$	$a =$	$b =$

Aufgabe R4. (5 Punkte)
Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Berechnen Sie $\varphi(100)$. ....

Bestimmen Sie die kleinste Zahl $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \equiv 11^{162} \bmod 100$. ....

Aufgabe R5. (5 Punkte) Es sei C der binäre zyklische Code der Länge 7 mit Generatorpolynom $g = x^3 + x + 1$, also

$$C = \{\, (c_i)_{i=0}^{6} \mid \left[\sum_{i=0}^{6} c_i x^i\right]_{x^7-1} = [g \cdot h]_{x^7-1} \text{ für ein } h \in \mathbb{Z}_2[x] \,\}.$$

Die Dimension von C ist ....

Die Anzahl der Codeworte in C ist ....

Die Minimaldistanz von C ist ....

$(1,1,0,1,0,0,0)$ wird decodiert als ....

Aufgabe R6. (5 Punkte)
Es sei (V, E) der Baum mit der Knotenmenge $V = \{1, \ldots, 6\}$ und dem Prüfercode $(2,3,3,2)$. Geben Sie die Nachbarn von 2 an, also die Menge $\{a \in V \mid \{a, 2\} \in E\}$. ....

Aufgaben mit Lösungsweg

Aufgabe L1. (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ und $a_n = a_{n-1} + 2\,a_{n-2} \in \mathbb{Q}$ für $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe L2. (8 Punkte)
Es sei φ die eulersche φ-Funktion. Bestimmen Sie alle ungeraden natürlichen Zahlen n mit $\varphi(n) = 6$. Für welche dieser n ist die prime Restklassengruppe $\mathbb{Z}_n^*$ zyklisch? Geben Sie jeweils alle erzeugenden Elemente $[a]_n$ dieser Gruppe an.