Diskrete Strukturen Übung 26.4.2001

Matthias Hensler

26. April 2001

Aufgabe P1

$$S = \{\underbrace{\{1,9\}}_{U}, \{2,8\}, \{3,7\}, \{4,6\}, \{5\}\}$$

$$|M| = 6$$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Pot}\,(\{1,\ldots,9\}) & \rightarrow & S \\ f : x & \mapsto & U \in S \\ M & \rightarrow & S \end{array}$$

Aufgabe P2

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,3,2,4)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (1,3)(2,4)$$

P2.a

$$\sigma = (1,3,4,6)(2,3,10,5,8,7)$$

P2.b

$\sigma(x)$ im Beispiel: $\sigma(3) = 10$

$$\sigma_1, \sigma_2 : \ (\sigma_1 \circ \sigma_2)(x) = \sigma_1(\sigma_2(x))$$

$\sigma_1 = (i_1, \ldots, i_r), \sigma_2 = (j_1, \ldots, j_r) \quad i_k \neq j_l \, \forall k, l$

$$\sigma_1\sigma_2(x) = \left\{ \begin{array}{lr} \sigma_1(x) & x \in \{i_1, \ldots, i_r\} \\ \sigma_2(x) & x \in \{j_1, \ldots, j_r\} \\ \mathrm{id}(x) & \text{sonst} \end{array} \right\} = \sigma_2 \circ \sigma_1(x)$$

$\sigma_1 = (1,2,3)(4)$

P2.c

$$\sigma^4 := \sigma \circ \sigma \circ \sigma \circ \sigma$$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} & = & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ \| & & \| \\ (1,3,2,4)^{-1} & = & (1,4,2,3) \end{array}$$

$$\sigma^{-1} = (6,4,9,1)(7,8,5,10,3,2)$$

$$\sigma^4 = (1)(9)(4)(6)(2,8,10)(3,7,5) = (2,8,10)(3,7,5)$$

$$\sigma^{12} = \mathrm{id}$$

$$\sigma^{123} = \sigma^3 \circ \sigma^{120} = \sigma^3 \circ \left(\sigma^{12}\right)^{10} = \sigma^3 = (1,6,4,9)(2,5)(3,8)(10,7)$$

Aufgabe P3

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	3	4	id
1	2	4	3	(3,4)
1	3	2	4	(2,3)
1	3	4	2	(2,3,4)=(2,3)(3,4)(4,3)(4,2)
1	4	2	3	$\cdots$
1	4	3	2	
2	1	3	4	$\vdots$
2	1	4	3	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$(1,2,3,4,\ldots,n) = (1,2)(2,3)(3,4)\ldots(n-1,n)$$

$$\begin{aligned} S_4 = \quad & \{\mathrm{id}, (12), (13), (14), (23), (24), (34), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243), \\ & (1234), (1432), (1324), (1423), (1342), (1243), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \end{aligned}$$

Aufgabe P4

P4.a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Kombinatorisch: aus n Frauen und n Männern eine n-Gruppe auswählen.

P4.b

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = n \binom{2n-1}{n-1}$$

Kombinatorisch: aus n Frauen und n Männern eine n-Gruppe auswählen und eine (weibliche/männliche) Person als Lehrer bestimmen.