Kapitel I
Abzählung, Rekursionen, erzeugende Funktionen

§1 Elementare Zahlprinzipien

Es sei M eine endliche Menge

$|M| \triangleq$ Anzahl der Elemente von M

$|A| = n \in \mathbb{N} \iff$ Es gibt eine Bijektion $\alpha:$ A $\to \{1, 2, \ldots, n\}$

$|A| = 0 \iff A = \{\}$

Lemma 1: a) $|A| = |B| \iff$ Es gibt eine Bijektion $\alpha: A \to B$.

b) $|A \dot{\cup} B| = |A| + |B|$

$A \dot{\cup} B \triangleq$ disjunkte Vereinigung mit $A \cap B = \{\}$.

c) $|A \times B| = |A| \cdot |B|$

$A \times B := \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

Folgerung: $Abb(A,B) = B^A =$ Menge aller Abbildungen von $A \to B$

$|B^A| = |B|^{|A|}$

Beweis: $|A| = n$ $\quad\quad A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$|B| = m$

$B^A \to \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{\text{n-mal}} : f \mapsto (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n))$ ist eine Bijektion nach c).

$|B^A| = |B \times B \times \ldots \times B| = |B|^n$

Definition: $f: A \to A$ heißt Permutation von A, wenn f bijektiv ist

$S_n = \{\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\}$

$= Sym\{1, 2, \ldots, n\}$ heißt symmetrische Gruppe vom Grad n

Lemma 2: $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

(Anzahl der Möglichkeiten eine n-Menge A mit $|A| = n$ anzuordnen)

Satz 1: Die Anzahl der Teilmengen einer n-Menge ist 2^n.

$|A| = n \Rightarrow |P(A)| = 2^n$,

dabei ist $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ die Potenzmenge von A.

Beispiel: $A = \{1, 2\}$; $P(A) = \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2\}, \{\}\}$

Beweis: $P(A) \to \{0,1\}^A$: $B \mapsto \chi_B$

Hierin heißt χ_B die charakteristische Funktion von B,

definiert durch: $\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$B := \{x \in A \mid \chi_B(x) = 1\}$$

$$|P(A)| = \left|\{0,1\}^A\right| = 2^{|A|}$$

Definition: $P_k(A) = \binom{A}{k} = \text{Menge aller k-Teilmengen von A}$

$$= \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$$

Bemerkung: $P(A) = \dot{\bigcup}_{k=0}^{n} P_k(A)$. Also nach Lemma 1 ist $|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} |P_k(A)|$

Lemma 3: $|P_k(A)| = \left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$, falls $|A| = n$.

Beweis: $B = \{b_1, \ldots, b_k\}$; $|B| = k$; $b_i \neq b_j$ für $i \neq j$ mit $b_i \in A$

$$\left|\{(b_1, \ldots, b_k) \mid b_i \in A \text{ mit } b_i \neq b_j \text{ für } i \neq j\}\right| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Es gibt $k!$ Anordnungen von $\{b_1, \ldots, b_k\}$.

2. Beweis von Satz 1: $|A| = n$

$$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n$$

Satz 2: i) Pascalsches Dreieck

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \quad \text{für} \quad \begin{matrix} k \geq 1 \\ n \geq k \end{matrix}$$

ii) Vandermondsche Identität

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \cdot \binom{m}{k-l}$$

Beweis: zu i) $n \geq 1$ und $|A| = n$

$\binom{n}{k} = \text{Anzahl der k-Teilmengen von A;}$

$b \in A$

$$\binom{A}{k} = \{X \subseteq A \mid b \notin X\} \dot{\cup} \underbrace{\{X \subseteq A \mid \, |X| = k, b \in X\}}_{M} = \binom{A \setminus \{b\}}{k} \dot{\cup} M$$

$M \to \binom{A \setminus \{b\}}{k-1}$ und $X \to X \setminus \{b\}$ ist jeweils eine Bijektion.

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

zu ii) $|A| = m + n$ $\qquad A = B \dot{\cup} C$ $\qquad |\mathrm{B}| = m$ $\qquad |\mathrm{C}| = n$

$$\binom{A}{k}_l = \{X \subseteq A \mid |X| = k, |\mathrm{X} \cap \mathrm{B}| = l\} \qquad l = 0, 1, \ldots, \mathrm{k}$$

$$\binom{\mathrm{A}}{\mathrm{k}} = \dot{\bigcup_{l=0}^{k}} \binom{A}{k}_l$$

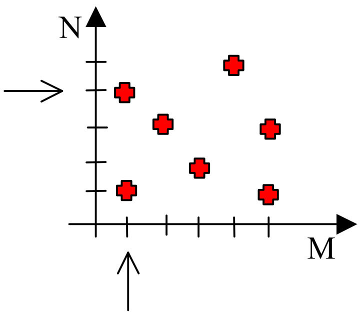
$$\binom{m+n}{k} = \left|\binom{A}{k}\right| = \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\left|\binom{A}{k}_l\right|}_{\binom{m}{l} \cdot \binom{n}{k-l}}$$

Lemma 4: a) [Doppeltes Abzählen]

Ist $R \subseteq M \times N$, so ist $|R| = \sum_{a \in M} \left| \{b \in N \mid (a,b) \in R\} \right|$

$$= \sum_{b \in N} \left| \{a \in M \mid (a,b) \in R\} \right|$$

Visualisierung der doppelten Abzählung:



- Entweder wählt man für jeden Summanden eine Abszisse und zählt die zugehörigen Ordinaten oder umgekehrt.

b) [Schubfachprinzip]

Ist $f: M \to N$ und $|M| > |N|$, so ist f nicht injektiv.

d.h.: $\exists b \in N : \left| \overset{-1}{f}(b) \right| = \left| \{a \in M \mid f(a) = b\} \right| > 1$

c) [Inklusion-Exklusionsprinzip]

$A_1, \ldots, A_n \subseteq M$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i_1<i_2}|A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1<i_2<i_3}|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}|$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le n}|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|$$

Beweis: zu c) $A \subseteq M$

$$\chi_A : M \to \{0,1\}:\ \mathrm{x} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } \mathrm{x} \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad |A| = \sum_{\mathrm{x}\in M}\chi_A(\mathrm{x})$$

$$\circledast\quad \chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n}(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le n}\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j}}(\mathrm{x})$$

Daraus folgt die Beh. durch Summation über M.

Ist i) $\mathrm{x} \notin A_1 \cup \ldots \cup A_n$, so ist die Linke Seite von $\circledast$ $= 0$.

Rechte Seite von $\circledast$ $= 0$.

ii) $\mathrm{x} \in A_1 \cup \ldots \cup A_n$, so ist die Linke Seite von $\circledast$ $= 1$.

x liege in genau $\mathrm{k}(\ge 1)$ Teilmengen $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{n}$

$\mathrm{x} \in A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_k}$ für $j_1 < \ldots < j_k$

Dann ist $\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j}}(\mathrm{x}) = 1 \Leftrightarrow \{i_1, \ldots, i_j\} \le \{j_1, \ldots, j_k\}$

$$\text{die Rechte Seite von} \circledast = 1 - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}$$

$$= 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{j}\binom{k}{j}}_{(1-1)^k} = 1$$

§2 Partition

Definition: Eine Partition P von einer Menge M ist eine Zerlegung von M in eine Vereinigung von disjunkten nichtleeren Teilmengen ("Blöcke" genannt).

genauer: ▪ $P := \{A_1, \ldots, A_k\}$ heißt Partition $\Leftrightarrow$ 1.) $M = A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k$

2.) $A_i \ne \{\}$ für $\mathrm{i} = 1, \ldots, \mathrm{k}$

▪ $Part_k(M) := \{P \mid P \text{ ist Partition von } M, |\mathrm{P}| = k\}$ heißt eine k-Partition

▪ $S_{n,k} := |Part_k(M)|$ falls $|\mathrm{M}| = n$ und beschreibt die Stirling Zahlen 2. Art mit $n, k \ge 0$, wobei $S_{0,0} = 1$ ist.

Beispiel: $S_{n,0} = 0$ für $\mathrm{n} \ge 1$; $\quad S_{n,1} = 1$ für $\mathrm{n} \ge 1$

$S_{n,k} = 0$ für $k > n$; $\quad S_{n,n} = 1$; $\quad \mathrm{S}_{\mathrm{n,n-1}} = \binom{n}{2}$

Satz 1: Es gilt für $1 \le k \le n$: $S_{n,k} = S_{n-1,\,k-1} + k \cdot S_{n-1,\,k}$

Stirling Dreieck 2.Art $S_{n,k}$

n\k	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	5	25	10	1