Mitschrift Diskrete Strukturen SS' 01 - Musterlösungen

C. Frenzel

21. Mai 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Übung 1

1.1 Aufgabe 1

Kombinatorischer Beweis:

Behauptung: für $k \leq r \leq n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$$

Betrachte eine n-Menge A. Betrachte die Paare (B, C) mit $C \subseteq B \subseteq A$ mit $|B| = r$, $|C| = k$.

Deren Anzahl sei a.

1. Es gibt $\binom{n}{r}$ Möglichkeiten B zu wählen, und zu jedem solchen B $\binom{r}{k}$ Möglichkeiten ein passendes C zu wählen. Also ist $a = \binom{n}{r}\binom{r}{k}$.
2. Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, eine k-Teilmenge C von A zu wählen, und zu jedem solchen C $\binom{n-k}{r-k}$ Möglichkeiten B zu wählen.

   $\implies \quad a = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k}$.

1.2 Aufgabe 2 (vom Lösungsblatt übernommen)

Es ist zu zeigen: Für $m, n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}.$$

1.2.1 Algebraischer Beweis

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach m.
Induktionsanfang: Für $m = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0} = \binom{n+m+1}{m}.$$

Induktionsannahme: Es sei $m \geq 0$ und die Behauptung sei bereits bewiesen für m.
Induktionsschritt: (Schluss von m auf $m+1$):

$$\sum_{k=0}^{m+1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} + \binom{n+m+1}{m+1}$$

nach Induktionsannahme:

$$= \binom{n+m+1}{m} + \binom{n+m+1}{m+1}$$

nach Vorlesung Kap. I, 1, Satz 2:

$$= \binom{n+(m+1)+1}{m+1}.$$

1.2.2 Kombinatorischer Beweis

Es sei $M = \{1, \ldots, m+n+1\}$. Für $k = 1, \ldots, m+1$ setzen wir

$$\mathcal{M}_k = \left\{ X \in \binom{M}{m} | min(M \backslash X) = k \right\}$$

(Das ist die Menge aller m-Teilmengen von M, die die $k-1$ kleinsten Zahlen aus M enthalten, aber nicht die Zahl k selber.) Dann ist

$$\binom{M}{m} = \mathcal{M}_1 \,\dot{\cup}\, \mathcal{M}_2 \,\dot{\cup} \cdots \dot{\cup}\, \mathcal{M}_{m+1}$$

und

$$|\mathcal{M}_k| = \binom{(n+m+1)-k}{m-(k-1)} = \binom{n+(m+1-k)}{m+1-k}$$

für $1 \leq k \leq m+1$, also

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=0}^{m} |\mathcal{M}_{m+1-k}| = \left| \binom{M}{m} \right| = \binom{n+m+1}{m}.$$

1.3 Aufgabe 3

1.3.1 Kombinatorischer Beweis

$x_1 + \ldots + x_s = n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}$.

Beispiel:

```
o Steine
I Stöcke

o o o o I o o I I o I o o I o
1 2 3 4 5 6 7 ...            n+r-1 Positionen
```

$n+r-1$	`Positionen`
n	`Steine`
$r-1$	`Stöcke`

$$\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}.$$

1.3.2 Induktionsbeweis

Behauptung: $\forall r \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N}_0$:

$$a_{n,r} = \binom{n+r-1}{n}.$$

Induktion nach $r+n$.

Induktionsanfang: $a_{0,1} = 1$ trivial.

Induktionsannahme: Die Behauptung ist bereits bewiesen für alle Zahlenpaare (n', r') mit $n' \leq n,\ r' \leq r$ und $n' + r' < n + r$.

Induktionsschritt: **Behauptung:** dann gilt sie auch für $n+r$.
Für x_1 können wir jede der Zahlen $0, \ldots, n$ wählen, und für jedes x_1 erhalten wir nach Induktionsvoraussetzung die Anzahl der Möglichkeiten:

$$a_{n-x_1,r-1} = \binom{(n-x_1)+(r-1)-1}{(r-1)-1}.$$

$$a_{n,r} = \sum_{x_1=0}^{n} \binom{n - x_1 + r - 2}{r - 2}$$

setze $k := n - x_1$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{k + r - 2}{r - 2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{r - 2 + k}{k}$$

aus Aufgabe 2 wissen wir:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} = \binom{n+m+1}{m}$$

dadurch erhalten wir:

$$\binom{n+r-1}{n}.$$

1.4 Aufgabe 4

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\dots(x+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(x-i).$$

Behauptung:

$$(x+y)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}}\, y^{\overline{n-k}}.$$

Induktion nach n.

$n = 1$: $(x+y)^{\overline{1}} = x + y.$

Induktionsanfang:

$$\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{\overline{k}}\, y^{\overline{1-k}}$$

$$= \binom{1}{0} x^{\overline{0}}\, y^{\overline{1}} + \binom{1}{1} x^{\overline{1}}\, y^{\overline{0}}$$

$$= \quad y + x.$$

Induktionsannahme: Bewiesen für $1, \ldots, n$.

Induktionsschritt: **Behauptung:** dann gilt sie auch für $n+1$.

Betrachte $(x+y)^{\overline{n+1}} = (x+y+n)(x+y)^{\overline{n}}$

$$= \quad (x+y+n) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k}}$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{n} (x+k+y+n-k) \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k}}$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{n} (x+k) \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} (y+n-k) \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k}}$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k+1}} \, y^{\overline{n-k}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}}$$

$$= \quad \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}}$$

$$= \quad \binom{n}{n} x^{\overline{n+1}} \, y^{\overline{0}} + \binom{n}{0} x^{\overline{0}} \, y^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}}$$

$$= \quad \binom{n+1}{n+1} x^{\overline{n+1}} \, y^{\overline{0}} + \binom{n+1}{0} x^{\overline{0}} \, y^{\overline{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}}$$

$$= \quad \sum_{k=0}^{n+1} x^{\overline{k}} \, y^{\overline{n-k+1}}.$$

2 Präsenzaufgaben 26.04.01

2.1 Aufgabe P1

$M \subseteq \{1, \ldots, 9\} = \underline{9}$, $|M| = 6$

Behauptung: M enthält 2 Zahlen, deren Summe 10 ist.

mit $|M| = 6$

$$M \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \{1,9\} \\ \{2,8\} \\ \{3,7\} \\ \{4,6\} \\ \{5\} \end{array} \right\}$$

$$x \longmapsto \{x, y\}$$

Eine Menge wird zwei mal getroffen.

2.2 Aufgabe P2

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 3 & 10 & 6 & 8 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

$\sigma : \underline{10} \to \underline{10}$

1. $(1, 9, 4, 6)(2, 3, 10, 5, 8, 7)$
2. σ_1, σ_2 zifferfremd.

   Behauptung: $\sigma_1 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_1$.

   Sei $x \in \underline{n}$ bel. zeige: $\sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_2\sigma_1(x)$.

   - **1. Fall:** x kommt in σ_1 vor
     $\Longrightarrow x$ kommt nicht in σ_2 vor
     $\Longrightarrow \sigma_1\sigma_2(x) = \sigma_1(x)$.
     $\sigma_2\sigma_1(x) = \sigma_2(\sigma_1(x)) = \sigma_1(x)$,
     da $\sigma_1(x)$ nicht in σ_2 vorkommt.
   - **2. Fall:** x kommt in σ_2 vor.
     analog
   - **3. Fall:** x kommt nicht in σ_1 und nicht in σ_2 vor
     $\Longrightarrow \sigma_2\sigma_1(x) = x = \sigma_1\sigma_2(x)$.

3. $\sigma^{-1} = (1,6,4,9)(2,7,8,5,10,3)$
   $\sigma^4 = (2,10,8)(3,5,7)$
   $\sigma^{12} = id$
   $\sigma^{123} = \sigma^{120}\sigma^3 = \sigma^3 = (1,6,4,9)(2,5)(3,8)(7,10)$

2.3 Aufgabe P3

1. gegeben: S_4
   mit $|S_n| = n! \quad |S_4| = 4! = 24$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad (1) = id$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (3,4)$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad (2,3)$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2,3,4)$$
   $$\vdots$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1,2,4)$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad (1,2,3,4)$$
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad (1,2)(3,4)$$
   $$\vdots$$
2. (1,2,3) = (1,2)(2,3)
   (1,2,3,4) = (1,2)(2,3)(3,4)
   $$\vdots$$

2.4 Aufgabe P4 (Lösungsvorschlag)

1.
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \stackrel{?}{=} \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$$

Kombinatorisch: aus n Frauen und n Männern eine n-Gruppe auswählen.

2.

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 \stackrel{?}{=} n\binom{2n-1}{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = n\binom{2n-1}{n-1}$$

Kombinatorisch: aus n Frauen und n Männern eine n-Gruppe auswählen und eine (weibliche/männliche) Person als Lehrer bestimmen.

3 Übung 2

3.1 Aufgabe 5

Vorbereitung:
$n \in \mathbb{Z} \quad \Longrightarrow \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$, da

wenn n gerade: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

wenn n ungerade: $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}, \quad \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \frac{n+1}{2}$.

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig:

1. $$\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{n}{n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} = \binom{n}{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}$$

2. Ist $k \in \mathbb{N}_0$ und $k+1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$,
   so ist $k+1 \leq \frac{n}{2} = n - \frac{n}{2} \leq n-(k+1) < n-k$, also
   $$\begin{aligned} \binom{n}{k} &< \binom{n}{k} \frac{n-k}{k+1} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \; \frac{n-k}{k+1} \\ &= \frac{n!}{(k+1)! \; (n-k-1)!} \\ &= \binom{n}{k+1} \end{aligned}$$

3. Für $k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ folgt die Behauptung aus 2.

3.2 Aufgabe 6 (vom Lösungsblatt übernommen)

Es sei $A = \underline{n} = \{1, \cdots, n\}$ und $B = \underline{k} = \{1, \cdots, k\}$.
Dann ist $k! \; S_{n,k} = |Surj(A,B)|$ die Anzahl der surjektiven Abbildungen und $k^n = |Abb(A,B)|$ die Anzahl aller Abbildungen von A nach B. Wir beweisen die

gegebene Formel, indem wir die $t := k^n - k!\ S_{n,k}$ nicht surjektiven Abbildungen von A nach B abzählen. Dazu betrachten wir für jedes $i \in B$ die Menge
$X_i = \{f : A \to B | i \notin Bild\ f\}$
der Abbildungen von A nach B, in deren Bild i nicht enthalten ist. Dann ist $t = |X_1 \cup \ldots \cup X_k|$. Nach dem Inklusion-Exklusion-Prinzip ergibt sich t zu

$$t = \left| \bigcup_{i=1}^{k} X_i \right| = \sum_{j=1}^{k} \sum_{I \in \binom{B}{j}} (-1)^{j+1} |X_I|$$

mit

$$X_I = \bigcap_{i \in I} X_i.$$

Da $X_I = Abb(A, B \backslash I)$ ist, also $|X_I| = (k-j)^n$, ergibt sich

$$t = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j+1} \binom{k}{j} j^n$$

(mit Summationsverschiebung $j' = k - j$). Also ist

$$k!\ S_{n,k} = k^n + \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

3.3 Aufgabe 7

zu zeigen: für $n, m \in \mathbb{N}_0$

$$S_{m+n+1,m} \quad = \quad \sum_{k=0}^{m} k\ S_{n+k,k}$$

Induktion nach m für n beliebig.

Induktionsanfang: Für $m = 0$ ist

$$\sum_{k=0}^{m} k\ S_{n+k,k} = 0 \quad \underbrace{S_{n,0}}_{\begin{cases} 1: n=0 \\ 0: n>0 \end{cases}} = 0 = S_{n+1,0} = S_{m+n+1,m}$$

Sei $m \in \mathbb{N}_0$ und die Behauptung sei bereits bewiesen für m(und für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$). Dann ist

$$\sum_{k=0}^{m+1} k\ S_{n+k,k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} k\ S_{n+k,k} + (m+1)\ S_{n+m+1,m+1}$$

nach Induktionsvoraussetzung:

$$= S_{m+n+1,m} + (m+1)\ S_{n+m+1,m+1}$$

nach Rekursionsformel (für Stirlingzahlen 2. Art):

$$= S_{(m+1)+n+1,m+1}$$

Knuth-Notation: $S_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

vgl. auch Rekursionsformel

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \begin{matrix} m+n+1 \\ m \end{matrix} \right\} = \sum_{k=0}^{m} k \left\{ \begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right\} & \text{(Aufgabe 7) Stirling Dreieck 2. Art} \\ \begin{pmatrix} m+n+1 \\ m \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^{m} k \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix} & \text{(Aufgabe 2) Pascal Dreieck} \\ \begin{bmatrix} m+n+1 \\ m \end{bmatrix} = \sum_{k=0}^{m} k\ (n+k) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} & \text{(entsprechend) Stirling Dreieck 1. Art} \end{array} \right.$$

3.4 Aufgabe 8 (vom Lösungsblatt übernommen)

Die Regeln des Wechselns kann man auch als Permutation der Positionen betrachten:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 10\ 7\ 4)(2\ 9\ 6\ 3\ 8\ 5) \in S_{10}.$$

1. Es ist $(1\ 10\ 7\ 4)^4 = id$, aber $(1\ 10\ 7\ 4)^n \neq id$ für $n \in \mathbb{N}$, $n < 4$. Also fährt der erste Fahrer nach vier Wechseln zum ersten Mal wieder vorne.

2. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt genau dann $\sigma^n = id$, wenn n ein gemeinsames Vielfaches der Längen der beiden Zyklen von σ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von 4 und 6 ist 12. Also fahren die Fahrer jeweils nach dem 12., 24., 36., ... Wechsel wieder in der ursprünglichen Reihenfolge. Da es 125 Wechsel gibt, geschieht das zum letzten Mal nach dem 120. Wechsel und damit insgesamt 10 mal.

3. Die Fahrer wechseln 125 mal. Das entspricht der Permutation
$\sigma^{125} = \sigma^{10\cdot 12+5} = id^{10} \circ \sigma^5 = (1\ 10\ 7\ 4)(2\ 5\ 8\ 3\ 6\ 9)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 4 & 3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Fahrer kommen also in der Reihenfolge 4, 9, 8, 7, 2, 3, 10, 5, 6, 1 im Ziel an.

4 Präsenzaufgaben 03.05.01

4.1 Aufgabe P5

Aufgabe: Wie viele ungerade Zahlen in $\{1, \ldots, 100\}$ sind weder durch 3 noch durch 5 teilbar?

$M = \{1, \ldots, 100\}$
$A_2 = \{\text{gerade Zahlen}\} = \{x \in M \mid 2/x\}$
$A_3 = \{x \in M \mid 3/x\}$
$A_5 = \{x \in M \mid 5/x\}$

$A_{2,3,5} = \mid A_2 \cup A_3 \cup A_5 \mid$

$= \quad |A_2| + |A_3| + |A_5| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_5| - |A_3 \cap A_5| + |A_2 \cap A_3 \cap A_5|$

$= \quad 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 \quad = \quad 74$

$\mid M - A_{2,3,5} \mid \quad = \quad 100 - 74 \quad = \quad 26.$

4.2 Aufgabe P6

Aufgabe: An einem Institut sind 10 Professoren und 4 Professorinnen. Wie viele verschiedene paritätisch besetzte Kommissionen mit 4 Mitgliedern kann man bilden?

[paritätisch: hier: gleiche Anzahl von Professoren und Professorinnen]

10 Professoren $\longrightarrow \binom{10}{2}$
4 Professorinnen $\longrightarrow \binom{4}{2}$

$\Longrightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten $= \binom{10}{2}\binom{4}{2} = 270.$

4.3 Aufgabe P7

Aufgabe: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

1.

$$\binom{n}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k-2} \text{für} n \geq k \geq 2$$

Falsch, da mit

$$n = k = 2 : \quad \binom{2}{2} = \binom{2}{1} + \binom{2}{0} \quad \Rightarrow \quad 1 = 2 + 1$$

Wiederspruch! Somit ist die Behauptung falsch!

2.

$$\binom{n+1}{k} \stackrel{?}{=} \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

Richtig, siehe Vorlesung.

3.

$$\binom{m+n}{k} \stackrel{?}{=} \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{k-l} + \binom{n}{l}$$

Richtig, da (kombinatorischer Beweis:)

$$\begin{array}{ccccc} m+n & & m & n \\ \downarrow & = & \downarrow & \downarrow \\ k & & k-l & l \end{array}$$

$$\Longrightarrow \binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{k-l} \binom{n}{l}$$

(siehe auch Vorlesung)

4.

$$\sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \stackrel{?}{=} 2^n$$

Falsch, da mit $n = 2 :\quad S_{2,0} = 0 \quad S_{2,1} = 1 \quad S_{2,2} = 1$

$\sum = 2 \neq 4 = 2^2$.

5.

$$\sum_{k=0}^{n} s_{n,k} \stackrel{?}{=} n!$$

Richtig, da gesucht:

$|\{$Permutationen, die aus genau k zifferfremden Zyklen bestehen$\}|$

$|S_n| = n!$

4.4 Aufgabe P8

Aufgabe: Es sei $|M| = 4$ und $|N| = 3$. Die Anzahl ...

1. ... der injektiven Abbildungen $f : N \longrightarrow M$ ist?
   $|Inj(N, M)| = 3!\binom{4}{3} = 24$ bzw. $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$
2. ... der surjektiven Abbildungen $f : N \longrightarrow M$ ist?
   $|Surj(N, M)| = 0$
3. ... der surjektiven Abbildungen $f : M \longrightarrow N$ ist?
   $|Surj(M, N)| = S_{4,3} \cdot 3! = 36$
4. ... der surjektiven Abbildungen $f : M \longrightarrow M$ ist?
   $|Surj(M, M)| = \ [\ |Bij(M, M)| =]\ 4! = 24$
5. ... der Äquivalentsrelationen auf N ist?
   $$|\{\text{Äquivalenzrelationen auf N}\}| = |\{\text{Partitionen}\}| = \sum_{k=0}^{3} S_{3,k} = 5$$
6. ... der surjektiven Abbildungen $f : M \longrightarrow \emptyset$ ist?
   $|Surj(M, \emptyset)| = 0$, da
   $f : A \longrightarrow B$ ist definiert: $(a, b) \in R \Rightarrow a \mapsto b$
   Relation $R \subseteq A \times B$, so dass für jedes $a \in A$: $|\{b \in B | (a, b) \in R\}| = 1$.
7. ... aller Abbildungen $f : \emptyset \longrightarrow M$ ist?
   $|Abb(\emptyset, M)| = 1$.

4.5 Aufgabe P9

Aufgabe: Es seien $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ und $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ Permutattionen aus S_6.

1. Die Zyklendarstellung von σ ist?
   (1 4 3)(2 5 6)
2. Die Zyklendarstellung von τ ist?
   (1 3)(2 6 4 5)

3. Die Zyklendarstellung von $\sigma \circ \tau$ ist?

   $(1)(2)(3\ 4\ 6)(5) = (3\ 4\ 6)$

4. Die Zyklendarstellung von σ^2 ist?

   $(1\ 3\ 4)(2\ 6\ 5)$

5. Die Zyklendarstellung von τ^{-1} ist?

   $(1\ 3)(2\ 5\ 4\ 6)$

6. Welches ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau^n = (1)$?

   $kgV(|\tau_{Zyklus_1}|, |\tau_{Zyklus_2}|) = kgV(2, 4) = 4$

5 Übung 3

5.1 Aufgabe 9

1. Sei $M = \{1, \ldots, n+1\}$
   X_k ist die Menge aller Partitionen von M, bei denen $n+1$ in einem Block der Länge $k+1$ liegt.
   $|X_k| = \binom{n}{k} B_{n-k} \quad$ für $0 \le k < n$
   und es ist
   $$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} |X_k| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

2. $$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\ S_{n,k} &= \sum_{k=1}^{n} (S_{n+1,k} - S_{n,k+1}) = \sum_{k=1}^{n} S_{n+1,k} - \sum_{k=0}^{n-1} S_{n,k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} S_{n+1,k} - \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} - \underbrace{\underbrace{S_{n+1,0}}_{0} - \underbrace{S_{n+1,n+1}}_{1} + \underbrace{S_{n,n}}_{1}}_{0} \\
&= B_{n+1} - B_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k - \binom{n}{n} B_n \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k.
\end{aligned}$$

5.2 Aufgabe 10

1. Jede Permutation auf $\{1, \ldots, n\}$, die (mindestens) $n-3$ Fixpunkte hat, ist entweder ein Dreierzyklus oder eine Transposition (Zweierzyklus) oder die Identität.
   $F(n, n-3) = 2\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + 1.$

2. $F(n, n-3) - 2\binom{n+1}{3}$
   $= 2\binom{n}{3} + \binom{n}{2} + 1 - 2\left(\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right)$
   $= 1 - \binom{n}{2} < 0$
   Die Antwort heisst „weniger“.

5.3 Aufgabe 11

1.

$$F_i = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i\}$$

$$F_I = \bigcap_{i \in I} F_i = \{\sigma \in S_n | \sigma(i) = i \quad \forall i \in I\}$$

$$|F_I| = (|M \backslash I|)! = (n - |I|)!$$

2. $\bigcup_{i=1}^n F_i$ ist die Menge aller Permutationen auf $M = \{1, \dots, n\}$, die mindestens einen Punkt fest lassen.

   $|S_n \backslash \bigcup_{i=1}^n F_i|$ ist die Anzahl der fixpunktfreien Permutationen aus S_n.

$$|\bigcup_{i=1}^n F_i| = \sum_{k=1}^n \sum_{I \in \binom{M}{k}} (-1)^{k+1} |F_I| = \sum_{k=1}^n \sum_{I \in \binom{M}{k}} (-1)^{k+1} (n-k)!$$

$$= \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}$$

$$= n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} \quad \textit{Also ist}$$

$$f_n = n! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k!} = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!}$$

3.

$$\frac{10000}{10000!} = \sum_{k=1}^{10000} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$$\left[\text{Zur Erinnerung (aus der Analysis): } e^x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right]$$

$$\approx \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$= e^{-1} \approx 0,367879 \dots$$

6 Präsenzaufgaben 10.05.01

6.1 Aufgabe P10

Aufgabe: Welche der folgenden formalen Potenzreihen sind invertierbar?

$$\sum a_n x^n \text{ invertierbar} \Longleftrightarrow a_0 \neq 0$$

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{ist invertierbar, da } a_0 = x^0 = 1.$$

2.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n \quad \text{ist invertierbar, da } a_0 = 0! \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

3.
$$x + x^2 \quad \text{ist nicht invertierbar, da } a_0 = 0 + 0^2 = 0.$$

4.
$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{n!}x^n \quad \text{ist nicht invertierbar, da } a_0 = 0^{0!} \cdot x^0 = 0^1 \cdot 1 = 0.$$

6.2 Aufgabe P11

Aufgabe:

Welche der folgenden Aussagen über formale Potenzreihen sind richtig?

$$\text{Ist } A = A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]], \text{ so ist } \ldots$$

1.
$$\ldots A(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Richtig.}$$

2.

$$\ldots A(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Falsch.}$$

Wähle $a_n = 1 \quad \forall n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (x+1)^n \text{ kann nicht auf die Form } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ gebracht werden.}$$

3.

$$\ldots x^3 A(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n+3} x^n \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Falsch.}$$

$$x^3 A(x) = \sum_{n=3}^{\infty} a_{n-3} x^n$$

4.

$$\ldots (A(x))^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 x^n \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Falsch.}$$

$$A(x) = 1 + x \Longrightarrow (A(x))^2 = 1 + 2x + x^2 \neq 1^2 + 1^2 = 1 + x$$

5.

$$\ldots (A(x))^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{-n} \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Falsch.}$$

$$\notin K[[x]]$$

6.

$$\ldots \text{Ableitung } D(A(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-1} x^n \in K[[x]] \text{ ?} \quad \text{Falsch.}$$

$$D(x^2) = 2x \neq x^3$$

7.

$\ldots$aus Ableitung $D(A(x)) = 0$ folgt $A = c \in K$ (A ist eine Konstante ?) Falsch.

$$D(x^2) = 2x = 0 \text{ in } F_2$$

6.3 Aufgabe P12

Aufgabe: Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, einen Betrag von n (z.B. 50) Euro in 1- und 2- Euromünzen auszuzahlen?

logisch: $n = 50 \Rightarrow 1$ Möglichkeit ($50 \cdot$1-er) und 25 Möglichkeiten (1-er in 2-er zu tauschen) = 26 Möglichkeiten $\Longrightarrow 1 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

anders: Pot-Reihen: a_n Anzahl Möglichkeiten für n Euro in 1-er Euro,
b_n ... in 2-er Euro,
c_n ... in 1-er Euro und 2-er Euro.

$$a_n = 1 \ \forall n \qquad b_n = \begin{cases} 0 & \text{für ungerade } n \\ 1 & \text{für gerade } n \end{cases}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, b_{n-k}$$

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n; \quad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n; \quad C = AB$$

$$\begin{aligned}
A(x) = \frac{1}{1-x}; \qquad B(x) = \sum x^{2n} &= \frac{1}{1-x^2} \\
\Rightarrow C(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} &= \frac{1}{(1-x^2)(1+x)} \\
= \frac{\alpha}{(1-x)} + \frac{\beta}{(1-x)^2} + \frac{\gamma}{(1+x)} &\Leftrightarrow \\
1 = \alpha(1-x)(1+x) + \beta(1+x) + \gamma(1-x)^2 & \\
= \alpha - \alpha x^2 + \beta + \beta x + \gamma - 2\gamma x + \gamma x^2 & \\
= x^2(\gamma - \alpha) + x(\beta - 2\gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) & \\
\Leftrightarrow 0 = -\alpha + \gamma \quad \wedge \quad 0 = \beta - 2\gamma \quad \wedge \quad 1 = \alpha + \beta + \gamma & \\
\Leftrightarrow \alpha = \gamma \quad \wedge \quad \beta = 2\gamma \quad \wedge \quad 1 = \gamma + 2\gamma + \gamma & \\
\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{2} \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{4} & \\
\Rightarrow \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_n x^k &
\end{aligned}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) + \frac{1}{4} & = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n+1) & = \frac{1}{2}(n+2) \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(n+1) - \frac{1}{4} & = \frac{1}{2}(n+1) & = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \end{cases} .$$

7 Übung 4

7.1 Aufgabe 12

Für $k = 1, \ldots, n$ sei w_k die Anzahl der Folge der Länge k in C_n. Dann ist

$$|C_n| = \sum_{k=1}^{n} w_k \quad \text{und}$$

$$w_k = \sum_{i=1}^{k-1} 26^i \cdot 2^{k-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} 26^i \cdot 2^{k-i}}_{=:C_k} - 2^k - 26^k \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

Betrachte

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} 26^i \cdot 2^{k-i} \right) x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} 26^k x^k \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k = \frac{1}{1-26x} \cdot \frac{1}{1-2x}$$

Partialbruchzerlegung: Ansatz:

$$C = \frac{a}{1-26x} + \frac{b}{1-2x} = \frac{(a+b) - (2a+26b)x}{(1-26x)(1-2x)}$$

durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$\begin{array}{rcl} a+b & = & 1 \\ 2a+26b & = & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{13}{12}, \quad b = -\frac{1}{12}$$

$$\Rightarrow C = \frac{13}{12} \cdot \frac{1}{1-26x} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{13}{12} \sum_{k=0}^{\infty} 26^k x^k - \frac{1}{12} \sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{13}{12} 26^k - \frac{1}{12} 2^k \right)}_{=C_k} x^k$$

$$\Rightarrow w_k = C_k - 2^k - 26^k = \frac{13}{6}(26^{k-1} - 2^{k-1}) \quad \text{für } k = 1 \ldots n$$

$$|C_n| = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{13}{6}(26^{k-1} - 2^{k-1}) = \frac{13}{6} \sum_{k=0}^{n-1} (26^k - 2^k)$$

$$\left[S = \sum_{k=0}^{n-1} a^k = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1} \Rightarrow (a-1)S = -1 + a^n \right]$$

$$\left[\text{für alle } a \neq 1 \text{ folgt } S = \frac{a^n - 1}{a - 1}\right]$$
$$= \frac{13}{6}\left(\frac{26^n - 1}{26 - 1} - \frac{2^n - 1}{2 - 1}\right) = \frac{13}{150}\left(26^n - 25 \cdot 2^n + 24\right).$$

n	$\|C_n\|$
0	0
1	0
2	52
3	1508
4	$39572 > 20000$

7.2 Aufgabe 13

$$A = 1 + x + x^2 \in \mathbb{F}_2[[x]], \text{ da } a_0 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \text{ ex.}$$
$$\text{Dann gilt: } A \cdot A^{-1} = (1 + x + x^2)\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k = 1$$
$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + x^2\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+2}$$
$$= b_0 x^0 + (b_0 + b_1)x^1 + \sum_{k=2}^{\infty}(b_k + b_{k-1} + b_{k-2})x^k \in \mathbb{F}_2[[x]]$$
$$\Rightarrow b_0 = 1; b_0 + b_1 = 0 \Rightarrow b_1 = 1;$$
$$b_k + b_{k-1} + b_{k-2} = 0 \Rightarrow b_k = b_{k-1} + b_{k-2} \text{ für } k \geq 2$$
$$\Rightarrow b_2 = 0; b_3 = 1; b_4 = 1; b_5 = 0, \ldots$$
$$b_k = \begin{cases} 0 & k + 1 \text{ ist durch 3 teilbar} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

```
1 1 0 1 1 0 1 1 0 ... = A^-1
. 1 1 0 1 1 0 1 1 ... = xA^-1
. . 1 1 0 1 1 0 1 ... = x^2A^-1
------------------------------
1 0 0 0 0 0 0 0 0 ... = A·A^-1
```

$\Rightarrow A = 1 + x + x^2$ ist in $\mathbb{F}_2[x]$ nicht invertierbar, da A^{-1} unendliche Potenzreihe
$\Rightarrow$ wohl aber in $\mathbb{F}_2[[x]]$.

7.3 Aufgabe 14

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{4+x+x^2}{3-5x+x^2+x^3} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

Ansatz:
$3-5x+x^2+x^3 = (\alpha_1 - x)(\alpha_1 - x)(\alpha_2 + x)$
$= \alpha_1^2\alpha_2 + (\alpha_1^2 - 2\alpha_1\alpha_2)x + (\alpha_2 - 2\alpha_1)x^2 + x^3$

Koeff.-Vergleich:
(1) $3 - \alpha_1^2\alpha_2 = 0$
(2) $5 - 2\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0$
(3) $1 - \alpha_2 + 2\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 1 + 2\alpha_1$
Einsetzen in (1):
(1′) $3 - \alpha_1^2 - 2\alpha_1^3 = 0 \qquad | \cdot 3$
Einsetzen in (2):
(2′) $5 - 2\alpha_1 - 3\alpha_1^2 = 0 \qquad | \cdot 2\alpha_1$
(1′) − (2′):
(1″) $9 - 10\alpha_1 + \alpha_1^2 = 0 \qquad | \cdot 3$
(1″) + (2′):
(2″) $32 - 32\alpha_1$
$\Rightarrow \alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 3$
$3-5x+x^2+x^3 = (1-x)(1-x)(3+x)$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{4+x-x^2}{3-5x+x^2+x^3} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{3+x}$$
$$= \frac{(3a+3b+c)+(b-2a-2c)x+(c-a)x^2}{\cdots}$$

Koeff.-Vergleich:
$3a+3b+c = 4$
$b-2a-2c = 1 \qquad \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = 1,\ c = -\frac{1}{2}$
$c - a = -1$

$$\Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x^2)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3+x}$$

Bestimme die a_n:

$$\left[\frac{1}{1-cx} = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2} + n + 1 - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)}_{a_n} x^n$$

7.4 Aufgabe 15

$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 5$
$u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$ für $n \geq 2$

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = u_0 x^0 + u_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(5u_{n-1} - 6u_{n-2}\right) x^n$$

$$= u_0 x^0 + u_1 x^1 + 5x \sum_{n=1}^{\infty} u_n x^n - 6x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

$$= x + A(5x - 6x^2)$$

$$\iff A = \frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{x}{(1-2x)(1-3x)}$$

Partialzerlegung:

$$\frac{x}{1 - 5x + 6x^2} = \frac{a}{1-2x} + \frac{b}{1-3x} = \frac{a + b - (3a + 2b)x}{\dots}$$

Koeff.-Vergleich:
$a + b = 0,\ 3a + 2b = 1 \Rightarrow a = -1,\ b = 1$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n = A = \frac{-1}{1-2x} + \frac{1}{1-3x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (3^n - 2^n) x^n$$

$\Rightarrow u_n = 3^n - 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.
$u_{12} = 527345\$,\ u_{13} = 1586131\$.$

8 Präsenzaufgaben 17.05.01

8.1 Aufgabe P13

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \in K[[x]] \quad \overset{?}{\Longrightarrow} \quad \exists\, A \in K[[x]] \text{ mit } A^2 = B$$

char $K \neq 2$, d.h. $1 + 1 \neq 0$:
$\exists$ zu $b_0 \neq 0$ ein $a \in K$ mit $a^2 = b_0 \Longleftrightarrow \exists\, A \in K[[x]]$ mit $A^2 = B$

Gibt es ...

1.
$$\ldots A \in Q[[x]] \text{ mit } A^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n? \qquad \text{Ja, da } a_0 = 1.$$

2.
$$\ldots \text{ für jeden Körper K ein } A \in K[[x]] \text{ mit } A^2 = 1 + x^2?$$

char $K \neq 2$: ja
char $K = 2$ ($\mathbb{F}_2$): ja, da $x^2 + 1 = x^2 \underbrace{+2x}_{in\ \mathbb{F}_2 = 0} +1 = (x+1)^2 \Rightarrow A = x + 1$

3.
$$\ldots A \in \mathbb{F}_2[[x]] \text{ mit } A^2 = 1 + x? \qquad \text{Nein, da}$$

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \Rightarrow A^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{k} a_i a_{k-i} x^k = a_0^2 + x(a_0 a_1 + a_1 a_0) + x^2 \ldots$$
$$= a_0^2 + \underbrace{x 2 a_0 a_1}_{=0} + x^2 \ldots = a_0^2 + x^2 \ldots$$

4.
$$\text{Gilt in } \mathbb{F}_2[[x]] \text{ die Gleichung } \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{2i}? \qquad \text{Ja, da}$$

in $\mathbb{F}_2$:

$$\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right)^2}_{=B=\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i} = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{a_i^2}_{=a_i} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^{2i}$$

$$b_i = \sum_{n=0}^{i} a_n a_{i-n}$$

$i = 3$: $\quad a_0 a_3 + a_1 a_2 + a_2 a_1 + a_3 a_0 = 0$
$i = 2$: $\quad a_0 a_2 + a_1 a_1 + a_2 a_0 = a_1^2 = a_1$

8.2 Aufgabe P14

Ist $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in K[x]$ mit $a_n \neq 0$, so gilt für das reflektierte Polynom f^R von f:

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_n \neq 0 \quad \longrightarrow \quad f^R = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$$

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad \longrightarrow \quad (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

1. $$f^R \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} \qquad \text{Ja.}$$

2. $$f^R \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i \qquad \text{Ja, laut Definition.}$$

3. $$f^R \stackrel{?}{=} \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i} \qquad \text{Nein, da } \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^{n-i} = f.$$

4. $$f^R \stackrel{?}{=} x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad \text{Nein, da } x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = x^n f.$$

5. $$f^R \stackrel{?}{=} x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i} \qquad \text{Ja, da } \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^n x^{-i} = x^n \sum_{i=0}^{n} a_i x^{-i}.$$

6. $$(f^R)^R \stackrel{?}{=} f \qquad \text{Nein, da für } \underbrace{f = x}_{(0,1,\ldots)} : \quad \underbrace{f^R = 1}_{(1,0,\ldots)} \Rightarrow (f^R)^R = 1 \neq f$$

8.3 Aufgabe P15

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt ...

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{1}{n}, \quad \alpha^{\underline{n}} = \frac{1}{n!}\ \alpha\,(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!}\ x\,(x-1)\dots(x-n+1)$$

1.

$$\binom{\alpha}{n} \stackrel{?}{=} \binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} \qquad \text{Ja, siehe Vorlesung.}$$

2.

$$\binom{\alpha}{n} \stackrel{?}{=} \binom{\alpha}{\alpha-n} \qquad \text{Nein, da } \alpha - n \notin \mathbb{N} \text{ in } \binom{\alpha}{\alpha-n}.$$

3.

$$\alpha^n \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} k! \binom{\alpha}{k} \qquad \text{Ja, da laut Vorlesung:}$$

$$\alpha^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}\ \alpha^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} k! \frac{1}{k!}\ \alpha^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} k! \binom{\alpha}{k}.$$

4.

$$\binom{\alpha}{n} \stackrel{?}{=} 0 \text{ für } n > \alpha \qquad \text{Nein, } \alpha \in \mathbb{R} : n > \alpha,\ \alpha = \frac{1}{2},\ n = 1 : \binom{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

9 Übung 5

9.1 Aufgabe 16

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$D(A \cdot B) = D\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}\right) x^n\right) = \underline{\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\sum_{i=0}^{n+1} a_i b_{n+1-i} x^n}$$

$$D(A)B + A \cdot D(B) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\ a_{n+1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty}(n+1) b_{n+1} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n}(j+1)\ a_{j+1} b_{n-j} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n} a_i (n-i+1) b_{n-i+1} x^n$$

mit i=j+1

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{n+1} i\ a_i b_{n+1-i} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}(n+1-i)\ a_i b_{n+1-i} x^n$$

$$= \underline{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n+1}(n+1)\ a_i b_{n+1-i} x^n}$$

9.2 Aufgabe 17

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gegeben durch $a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für $n \geq 2$

$$A = a_0 + a_1 x^1 + \sum_{n=2}^{\infty}(a_{n-1} + 2a_{n-2}) x^n$$

$$= 2x + x\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Da $a_0 = 0$

$$= 2x + x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$A = 2x + xA + 2x^2 A$$
$$\implies A(1 - x - 2x^2) = 2x$$
$$A = \frac{2x}{1 - x - 2x^2} = \frac{2x}{(1+x)(1-2x)} = \frac{a}{1+x}\frac{b}{1-2x}$$
$$= \frac{(a+b)(-2a+b)x}{1-x-2x^2} \implies \begin{array}{c} a+b=0 \\ -2a+b=2 \end{array}$$
$$a = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{2}{3}$$
$$A = -\frac{2}{3}\frac{1}{1+x} + \frac{2}{3}\frac{1}{1-2x} = -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n + \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}(2^n - (-1)^n)\right)}_{a_n} x^n$$

9.3 Aufgabe 18

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

mit $a_0 = 1,\ b_0 = 0,\ a_n = 3a_{n+1} + 2b_{n-1},\ b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ für $n \geq 1$

$$A = a_0 + \sum_{n+1}^{\infty}(3a_{n-1} + 2b_{n-1})x^n$$
$$= 1 + 3x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + 2x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$\implies A \overset{*}{=} 1 + 3xA + 2xB$$

$$B = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + b_{n-1})x^n$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$
$$\implies B \overset{**}{=} xA + B$$

aus *: $(3x-1)A + 2xB = -1 \quad | \cdot (x-1)$
aus **: $xA + (x-1)B = 0 \quad | \cdot 2x$

$(x-1)(3x-1)A + 2x(x-1)B = 1-x$
$2x^2A + 2x(x-1)B = 0$

$(3x^2 - 4x + 1 - 2x^2)A = 1 - x$

$$A = \frac{1-x}{x^2-4x+1}, \quad B = \frac{x}{x^2-4x+1}$$

$$B(1-x) = xA \Rightarrow B = \frac{xA}{1-x}$$

gesucht: $f = x^2 - 4x + 1 = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)$
Die α_i sind die Nullstellen des reflektierten Polynoms
$f^R = 1 - 4x + x^2 \qquad \alpha_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$

Ansatz:

$$B = \frac{x}{x^2-4x+1} = \frac{a}{1-(2+\sqrt{3})x} = \frac{(a+b) - ((2-\sqrt{3})a + (2+\sqrt{3})b)x}{\ldots}$$

$$\Longrightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad b = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\Longrightarrow B = \frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2+\sqrt{3})^n x^n - \frac{\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n x^n$$

$$b_n = \frac{\sqrt{3}}{6}\left((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n\right)$$

Entsprechend für A:

$$a = \frac{3+\sqrt{3}}{6}, \quad b = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$A = \frac{3+\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2+\sqrt{3})^n x^n + \frac{3-\sqrt{3}}{6}\sum_{n=0}^{\infty}(2-\sqrt{3})^n x^n$$

$$a_n = \ldots$$

9.4 Aufgabe 19 (vom Lösungsblatt übernommen)

1. Ist $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so gilt offensichtlich

$$\frac{A}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot 1 \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

2. Mit Hilfe der Folgerung 2 aus 4 erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} &= (x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \cdot x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+1}{2} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+1}{2} + \binom{n}{2} \right) x^n \quad (\text{wegen } \binom{k}{2} = 0 \text{ für } k < 2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1) + n(n-1)}{2} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n.
\end{aligned}$$

3. Setzen wir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $a_n = n^2$ und $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} a_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$, so folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n &= \frac{A}{1-x} \quad (\text{nach 1.}) \\
&= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n}{1-x} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^4} \quad (\text{nach 2.}) \\
&= (x+x^2) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+3}{3} x^n \quad (\text{nach 4 Folgerung 2}) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+2}{3} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \binom{n+1}{3} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} \right) x^n \quad (\text{wegen } \binom{k}{3} = 0 \text{ für } k < 3)
\end{aligned}$$

und damit $\sum_{k=0}^{n} k^2 = s_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n+1}{3} = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$