Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 23.06.2000

1. Übungsscheinklausur Diskrete Strukturen SS 2000

---

1) (4 Punkte)

   Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m, n) = 1$ gilt $(m + n)|mn$?

2) (4 Punkte)

   Man bestimme alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ mit

$$2 \cdot (n-2)! + \binom{n}{2} - 2 \equiv 0 \pmod{n}$$

3) (4 Punkte)

   Für welche $n \in \mathbb{N}$ läßt sich die Folge $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ durch einen Graphen realisieren?

4) (4 Punkte)

   Es sei G ein bipartiter Graph mit der Bipartition A, B. Man zeige: Ist $|A| = |B| \geq 2$, und gilt für alle $S \subseteq A$ mit $S \neq \emptyset, A$ die Ungleichung

$$|S| + 1 \leq |N(S, G)|,$$

   so gehört jede Kante von G zu einem perfekten Matching.

5) (4 Punkte)

   Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

   a) Wieviele Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es, so daß $\{1, 2\} \not\subseteq A$ gilt?
      Ist die Anzahl dieser Teilmengen durch 3 teilbar?

   b) Wieviele $(n-2)$-elementige Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es, so daß $\{1, 2\} \not\subseteq A$ gilt?
      Gibt es mehr oder weniger als $2n$ solcher Teilmengen?

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 07.07.2000

2. Übungsscheinklausur Diskrete Strukturen SS 2000

Name: ________________ Vorname: ________________ Matr.Nr.: ________________

Bestanden: ja ( ) nein ( )	1)	2)	3)	4)	5)	Σ
Punkte:	( )	( )	( )	( )	( )	( )

---

1) (4 Punkte)

   Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

   $$m + n \leq \mathrm{ggT}(m, n) + \mathrm{kgV}(m, n)$$

   Für welche m, n gilt Gleichheit?

2) (4 Punkte)

   Es sei p eine Primzahl. Man bestimme alle Restklassen $[x] = [x]_p$ modulo p mit

   $$[x][x] = [1].$$

3) (4 Punkte)

   Sei G ein p-partiter Graph, $p \geq 2$, mit der Partition $E_1, E_2, \ldots, E_p$ und sei $|E_1| \leq |E_2| \leq \ldots \leq |E_p|$. Zeigen Sie:

   a) Falls für jede Menge $S \subseteq E_p$ die Ungleichung $|S| \leq |N(S, G)|$ gilt, so existiert ein Matching M von G mit $|M| = |E_p|$.
   b) Aus $(p-1)|E_p| \leq |N(E_p, G)|$ folgt $|E_1| = |E_2| = \ldots = |E_p|$.

4) (4 Punkte)

   Es sei G ein schlichter und r-regulärer Graph gerader Ordnung $n \geq 4$. Man zeige, dass G oder sein Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

5) (4 Punkte)

   Es sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wieviele geordnete k-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$ existieren, die genau t-mal die eins enthalten für $0 \leq t \leq k$?

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

1. Übung Diskrete Strukturen

Themen: Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Ist $n \in \mathbb{N}$, so zeige man:
a) $3|(n^3 + 2n)$ b) $5|(n^5 + 4n)$
c) $5|(n^4 - 1) \Leftrightarrow 5 \nmid n$

Aufgabe 2.
Ist $p \geq 5$ eine Primzahl, so gilt $24|(p^2 - 1)$.

Aufgabe 3.
Es sei $f_1 = f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$ (Fibonacci-Folge). Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man:

$$ggT(f_n, f_{n+1}) = 1$$

Aufgabe 4.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Man zeige, daß unter n ganzen Zahlen a_i mit $2 \leq a_i \leq 2n - 1$ ein Paar a_s, a_t existiert mit $ggT(a_s, a_t) = 1$.

Aufgabe 5.
Es sei $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ das Produkt der ersten n Primzahlen. Man zeige:
Ist $a = dd'$ mit $1 < d' - d < (p_n + 2)^2$, so ist $d' - d$ eine Primzahl mit $d' - d > p_n$.

Aufgabe 6.
Man zeige: Das Quadrat einer ungeraden Zahl läßt bei Division durch 8 den Rest 1.

Aufgabe 7.

a) Man zeige: Jede ungerade Zahl $n \geq 3$ läßt sich als Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen darstellen.

b) Man zeige: Eine ungerade Zahl $n \geq 3$ ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur eine Darstellung als Differenz von zwei Quadratzahlen besitzt.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

2. Übung Diskrete Strukturen

Themen: Zahlentheorie

Aufgabe 1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Gilt $a|c$ und $b|c$ mit $\operatorname{ggT}(a, b) = 1$, so gilt $(ab)|c$;

b) $\operatorname{ggT}(a + b, a - b) \geq \operatorname{ggT}(a, b)$;

c) Sind $a, b > 0$, so gilt $\operatorname{ggT}(a, b) | \operatorname{kgV}(a, b)$.

Aufgabe 2. Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Wieviele Primzahlen existieren in dem abgeschlossenen Intervall $[m! + 2, m! + m]$?

Aufgabe 3. Beweisen Sie den Quersummentest für 3 und 9:
Es sei $A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ und $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 9$. Dann gilt
a) $A \equiv S \pmod 3$, und b) $A \equiv S \pmod 9$.

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $n < p \leq 2n$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod p,$$

aber

$$\binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Aufgabe 5. Sind die folgenden Gleichungen mit $x, y \in \mathbb{Z}$ lösbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine Lösung.
a) $481x + 299y = 13$; b) $301x + 129y = 27$; c) $297x + 189y = 23$.

Aufgabe 6. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl. Zeigen Sie $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
a) über den Binomischen Lehrsatz, b) über den kleinen Satz von Fermat.

Aufgabe 7. Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Gilt $p \equiv 3 \pmod 4$, so existiert kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $p|(n^2 + 1)$.

b) Gilt $p \equiv 1 \pmod 4$, so existieren solche n.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, daß n und $n + 2$, mit $n \geq 2$ ungerade, genau dann Primzahlen sind (sog. Primzahlzwilling), wenn gilt

$$4((n - 1)! + 1) + n \equiv 0 \pmod{n(n + 2)}.$$

Information:

Die Termine für die Diskussionsstunden sind:

Herr Christoph Schmitz,	Mi. 12.25-13.55 Uhr,	SG 23;
Frau Isabel Ribeiro	Mi. 15.45-17.15 Uhr,	SG 23.

Die Diskussionsstunden beginnen am 03.05.2000.

Die Termine für Sprechstunden sind:

Frau Miranca Fischermann,	nach Vereinbarung,	SG 21a;
Herr Arne Hoffmann,	Do. 10.00-11.00 Uhr,	Raum 218 Hauptgebäude.

Die Übungsblätter gibt es auch im Internet auf der Seite
www.math2.rwth–aachen.de.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

3. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Sei G ein schlichter, zusammenhängender und nicht vollständiger Graph der Ordnung ≥ 3. Man zeige, daß es 3 verschiedene Ecken $a, b, c \in E(G)$ gibt mit $ab, bc \in K(G)$ aber $ac \notin K(G)$.

Aufgabe 2. Sei G ein schlichter Graph ohne Kreise der Länge 3. Man zeige: $m(G) \leq (\frac{n(G)}{2})^2$.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie den folgenden Satz:
Seien G ein schlichter Graph, $a, b \in E(G)$ mit $a \neq b$ und C ein Kreis in G durch a und b minimaler Länge. Seien W_1 und W_2 die Wege von a nach b mit $K(W_1) \cup K(W_2) = K(C)$. Dann gilt: $d(a, b) = \min\{L(W_1), L(W_2)\}$.

Aufgabe 4. Sei G ein zusammenhängender Graph der Ordnung ≥ 2. Man zeige:
a) $\kappa(G - a) \leq d(a, G)$ für jede Ecke a aus G.
b) Ist $d(a, G)$ gerade für jede Ecke a aus G, so gilt $2\kappa(G - a) \leq d(a, G)$ für jede Ecke a.

Aufgabe 5. Sei G ein schlichter Graph mit $\kappa = \kappa(G)$ vollständigen Komponenten und sei $n(G) \equiv r \pmod{\kappa}$ mit $0 \leq r < \kappa$. Man zeige:

$$m(G) \geq \tfrac{1}{2\kappa}(n - r)(n + r - \kappa).$$

Aufgabe 6. Sei G ein schlichter Graph der Ordnung n, $q \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq q \leq n$ und $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$. Man zeige, daß $\kappa(G) \leq q - 1$.

Aufgabe 7. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung n mit $\delta(G) \geq 2$. Besitzt G eine Brücke, so zeige man: $2m(G) \leq (n - 3)(n - 4) + 8$.

Aufgabe 8. Untersuchen Sie, welche der Folgen als Gradsequenzen realisierbar sind, und welche sich sogar durch schlichte Graphen realisieren lassen.
a) $1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7$ b) $1, 2, 3, \ldots, n$
c) $1, 1, 2, 3, \ldots, n - 1 \quad (n \geq 2)$ d) $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-3}, 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$

Aufgabe 9. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph und seien alle Kreise in G kantendisjunkt (G heißt dann Kaktusgraph). Zeigen Sie: Sind a und b zwei beliebige Ecken aus G mit $d_G(a, b) = \mathrm{dm}(G)$, so gilt $\max\{d(a, G), d(b, G)\} \leq 2$.

Aufgabe 10. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit $\mathrm{dm}(G) \geq 3$. Zeigen Sie:
$\mathrm{dm}(G) \leq n(G) - 2\delta(G) + 1$.

Aufgabe 11. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit $n(G) = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, welcher p paarweise nicht inzidente Brücken enthält (d.h., die Brücken bilden ein perfektes Matching von G). Zeigen Sie:

$$m(G) \leq \binom{p+1}{2}.$$

Geben Sie für allgemeines p ein Beispiel mit $m(G) = \binom{p+1}{2}$ an.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

4. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Sei G ein Graph und $x \in E(G)$ beliebig mit $d(x, G) \geq 1$. Zeigen Sie, daß ein maximales Matching M existiert mit $x \in E(M)$.

Aufgabe 2. Sei G ein schlichter Graph und $a, b \in E(G)$ nicht adjazent. Zeigen Sie:
a) Ist M ein maximales Matching von G mit $a, b \notin E(M)$, so gilt für jede Kante $k = cd \in M$: $m_G(\{a, b\}, \{c, d\}) \leq 2$.
b) Gilt $d(a, G) + d(b, G) \geq n(G) - 1$, so besitzt G genau dann ein perfektes Matching, wenn $G + ab$ ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 3. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B. Zeigen Sie, daß ein Matching M von G existiert mit $|M| \geq \min\{|A|, |B|, 2\delta(G)\}$.

Aufgabe 4. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
a) Es existiert eine Menge $W = \{P_a | a \in A\}$ bestehend aus $|A|$ eckendisjunkten Wegen P_a der Länge zwei, so daß $d(a, P_a) = 2$ für jede Ecke $a \in A$.
b) Für alle Teilmengen $S \subseteq A$ gilt $|N(S, G)| \geq 2|S|$.

Aufgabe 5. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Ecken eines n-Turnieres T_n. Beweisen Sie:
a) $\Sigma_{i=1}^{p} d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2}$ für alle $1 \leq p \leq n$.
b) Ist T_n stark zusammenhängend mit $n \geq 3$, so gilt $\Sigma_{i=1}^{p} d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2} + 1$ für alle $1 \leq p \leq n - 1$.

Aufgabe 6. Es sei T ein Turnier mit $n(T) \geq 4$. Zeigen Sie:
a) Es existieren höchstens 3 Ecken x mit $d^+(x, T) = 1$.
b) Ist T stark zusammenhängend, so gibt es höchstens 2 Ecken x mit $d^+(x, T) = 1$.

Aufgabe 7. Sei T ein p-reguläres Turnier ($d^+(x, T) = d^-(x, T) = p$ für jedes $x \in E(T)$) mit $n(T) \geq 5$. Zeigen Sie, daß jeder Bogen von T auf einem orientierten Kreis der Länge 3 und auf einem orientierten Kreis der Länge 4 liegt.

Aufgabe 8. Sei T_n ein stark zusammenhängendes Turnier mit $n \geq 3$. Zeigen Sie, daß T_n mindestens $n - 2$ verschiedene 3-Kreise enthält.

Aufgabe 9. Sei T ein Baum mit $\Delta(T) \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq p \leq \Delta(T)$ und $E_p = \{x \in E(T) \mid d(x, T) \geq p\}$. Ist der von E_p induzierte Teilgraph $T[E_p]$ ein Nullgraph, so zeigen Sie $|N(E_p, T)| \geq (p - 1)|E_p| + 1$.

Aufgabe 10.
<u>Definition:</u> Der *Potenzgraph* G^2 eines schlichten Graphen G besteht aus der Eckenmenge $E(G)$, und zwei verschiedene Ecken a und b sind genau dann adjazent in G^2, wenn $d_G(a, b) \leq 2$ gilt.
a) Zeigen Sie, daß für einen schlichten Graphen G mit $n(G) \geq 3$ der Potenzgraph G^2 keine Brücke enthält.
b) Zeigen Sie, daß für einen Baum T mit gerader Ordnung $n(T)$ der Potenzgraph T^2 ein perfektes Matching besitzt.
(Folglich gilt b) auch für beliebigen schlichten Graphen G.)

Aufgabe 11. Sei G ein zusammenhängender Graph und $a \in E(G)$ beliebig aber fest gewählt. Zeigen Sie, daß es ein Gerüst T von G gibt mit $d(a, T) = \kappa(G - a)$.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

5. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Es sei k eine Kante des vollständigen Graphen K_n. Für welche $n \geq 3$ ist der Graph $K_n - k$ semi-Eulersch?

Aufgabe 2. Sei G ein Eulerscher Graph. Beweisen Sie, daß ein Kreis C in G existiert mit $n(C) > \lceil \frac{n(G)-1}{\mu(G)} \rceil$.

Aufgabe 3. Sei $q \geq 2$ eine natürliche Zahl und G ein schlichter $(2q+1)$-regulärer Graph der Ordnung $n(G) \leq 4q+1$. Zeigen Sie, daß G einen Eulerschen Faktor G' mit $\delta(G') > 2$ besitzt.

Aufgabe 4. Sei G ein vollständig p-partiter Graph mit der Partition $E_1, E_2, \ldots, E_p$, $p \geq 2$ und mit $n(G) \geq 3$. Ist D eine stark zusammenhängende Orientierung von G, so zeigen Sie, daß jede Ecke $a \in E(D)$ in D auf einem orientierten Kreis der Länge 3 oder 4 liegt.

Aufgabe 5. Seien $r_3 \geq r_2 \geq r_1 \geq 2$ natürliche Zahlen mit $r_3 = r_1 + r_2$ und $G = K_{r_1,r_2,r_3} - PM$ ein 3-partiter Graph, wobei PM ein perfektes Matching des vollständig 3-partiten Graphen K_{r_1,r_2,r_3} ist. Zeigen Sie, daß G Hamiltonsch ist.

Aufgabe 6. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B, wobei $|A| = |B| = n$ ist. Erfüllen die nicht adjazenten Ecken $a \in A$ und $b \in B$ die Bedingung $d(a,G) + d(b,G) \geq n+1$, so zeigen Sie, daß G genau dann Hamiltonsch ist, wenn $G + ab$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 7. Ist G ein schlichter planarer Graph der Ordnung $n \geq 11$, so zeigen Sie, daß der Komplementärgraph $\overline{G}$ nicht planar ist.

Aufgabe 8. Ist G ein schlichter, planarer Graph mit $\delta(G) \geq 3$, so zeigen Sie:
a) $\tau_5 + 2\tau_4 + 3\tau_3 \geq 12 + \Sigma_{i=7}^{\Delta(G)} (i-6)\tau_i$.
b) Es existieren mindestens 4 Ecken vom Grad kleiner oder gleich 5.
c) Ist die Taillenweite $t(G) \geq 4$, so gilt $\tau_3 \geq 8$.

Aufgabe 9. Sei G eine zusammenhängende, nicht triviale Landkarte ohne Brücken.
Zeigen Sie: Ist G 2-färbbar, so ist G Eulersch.

Aufgabe 10. Es sei W die Menge aller Worte aus 0 und 1, d.h. $w \in W \;\Leftrightarrow\; w = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_i \in \{0,1\}$, $n \geq 1$. $|w| = n$ heißt dann auch Länge von w.
a) Wieviele Worte $w \in W$ mit $1 \leq |w| \leq n$ gibt es?
b) Wieviele Palindrome der Länge n gibt es, d.h. $w \in W$ mit $(w_1, \ldots, w_n) = (w_n, \ldots, w_1)$.
c) Für zwei Worte $u, v \in W$ der Länge n definieren wir die AND-Verknüpfung wie folgt: $w = (u \ AND \ v) \;:\Leftrightarrow w_i = u_i \cdot v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wieviele Möglichkeiten existieren, ein Wort $w \in W$ der Länge n als AND-Verknüpfung zweier anderer Worte darzustellen?

Aufgabe 11. Gegeben sei eine Permutation f von $\{1, \ldots, n\}$. Eine *Inversion* von f ist ein Paar i, j mit $i < j$ aber $f(i) > f(j)$. Mit $I_{n,k}$ bezeichnen wir die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:
a) $I_{n,0} = 1$;
b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \ldots, \binom{n}{2}$;
c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

6. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Es sei $f_{n,0} = 1$ und $f_{n,k}$, für $k \geq 1$, die Anzahl aller Untermengen der Größe k von $\{1, \ldots, n\}$, welche kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthalten. Zeigen Sie:

a) $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} f_{n,k} = f_{n+2}$,

wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist (vgl. Übung 1: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$).

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{(F_1, F_2, F_3)\}$, wobei die Mengen F_i folgenden Bedingungen genügen:

i) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

ii) $\min F_1 \leq \min F_2 \leq \min F_3$, wobei wir $\min F_i := n + 1$ setzen, wenn $F_i = \emptyset$.

Bestimmen Sie $|M_n|$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgende geschlossene Darstellung für die Stirling-Zahlen 1. Art:

$$s_{n,k} = (n-1)! \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{k-1} \leq n-1} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \cdots i_{n-k}.$$

Aufgabe 4. Es sei $S_0 = 1$ und S_n, für $n \geq 1$, die Anzahl der Abbildungen $f : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ mit der Eigenschaft, daß f mit dem Wert i auch alle Werte j mit $1 \leq j \leq i$ annimmt. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$;

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! S_{n,k}$,

dabei sind $S_{n,k}$ die Stirling-Zahlen 2. Art.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß die Anzahl der Zahlpartitionen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$, deren Summanden alle nicht durch 3 teilbar sind, gleich derjenigen Anzahl ist, in denen kein Summand mehr als zweimal erscheint.

Aufgabe 6. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitze r verschiedene Primfaktoren. Zeigen Sie: $\varphi(n) \geq \frac{n}{r+1}$.

Aufgabe 7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) | (n-1)$. Zeigen Sie:

a) Es ex. keine Primzahl p mit $p^2 | n$.

b) Ist n keine Primzahl, so besitzt n mindestens 3 verschiedene Primfaktoren.

Aufgabe 8. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(k)}{k} + \frac{2k}{x}.$$

7. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1.
a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $a_0 = 1,\ a_n = 2$ für alle $n > 0$.
b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion und die exponentiell erzeugende Funktion von der Folge $a_n = 2^n + 5^n$.

Aufgabe 2. Gegeben sei die rekursive Folge $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, für $n \geq 2$, und $a_0 = 0,\ a_1 = 1$. Bestimmen Sie a_n mit Hilfe einer erzeugenden Funktion.

Aufgabe 3. Bestimmen Sie die Anzahl aller 0/1–Worte der Länge n (vgl. Übung 5, A.9), in denen niemals zwei Nullen hintereinander vorkommen.

Aufgabe 4. Kehren wir noch einmal zu den Funktionen aus Übung 6, Aufgabe 4 zurück: S_n sei die Anzahl der Funktionen von $\{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, die mit dem Wert i auch jeden Wert $j \leq i$ annehmen. Zeigen Sie mit Hilfe einer exponentiell erzeugenden Funktion:

$$S_n = \sum_{k \geq 0} \frac{k^n}{2^{k+1}}.$$

Hinweis: $2S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$ für $n \geq 1$.

Aufgabe 5. Zeigen Sie folgende Gleichheit:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_p (1 + p^{-s}) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)},$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft.

Aufgabe 6. Gegeben sei eine Halbordnung $(H, \preceq)$. Ein *Filter* F ist eine Menge $F \subset H$ mit der Eigenschaft: $x \in F$ und $y \succeq x$, dann gilt auch $y \in F$. Ferner ist $\emptyset$ ein Filter. Zeigen Sie, daß es in $(H, \preceq)$ genauso viele Filter wie Antiketten gibt.

Information:

Zu der Vordiplomklausur am 20.09.2000 werden in der vorlesungsfreien Zeit an folgenden Tagen zusätzliche Diskussionsstunden für die Diskreten Strukturen angeboten:

Dienstag, 12.09.00, bis Freitag, 15.09.00, jeweils 10.00–11.30 Uhr im SG 23.