Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 20.09.2000

DIPLOMVORPRÜFUNG

Mathematik II (Diskrete Strukturen)

Aufgabe 15: (7 Punkte)

Es sei $n \geq 3$ eine natürliche Zahl. Bestimmen Sie alle $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t \leq n$, die folgende Kongruenz erfüllen:

$$(2^t - 1)^2 \equiv 1 \pmod{2^n}.$$

Aufgabe 16: (8 Punkte)

Es sei G ein schlichter und zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) \geq 3$. Zeigen Sie: Gilt $\mathrm{dm}(G) = r(G)$, so besitzt G keine Brücke.

Aufgabe 17: (9 Punkte)

Es sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n(G) \geq 4$ mit Maximalgrad $\Delta(G) \leq \frac{n(G)}{2}$, und es sei M ein perfektes Matching von G mit $d(x, G) + d(y, G) \leq n(G) - 2$ für jede Kante $xy \in M$. Zeigen Sie, daß der Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 18: (8 Punkte)

Es sei φ die Eulersche φ-Funktion.

a) Bestimmen Sie $\varphi(2000)$.

b) Bestimmen Sie diejenige ganze Zahl x mit $0 \leq x \leq 1999$, die folgende Kongruenz erfüllt:

$$(123)^{802} \equiv x \pmod{2000}.$$

Aufgabe 19: (9 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ und $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + 2$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der a_n.
Hinweis: Benutzen Sie die Reihendarstellungen aus den Beispielen 6.1 a) und 6.1 d).

Aufgabe 20: (9 Punkte)

Bestimmen Sie für $n \geq 4$ die Anzahl $F(n, n-3)$ der Permutationen aus S_n mit mindestens $n - 3$ Fixpunkten.
Gibt es mehr oder weniger als $2\binom{n+1}{3}$ solcher Permutationen?

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 27.03.2001

DIPLOMVORPRÜFUNG

Diskrete Strukturen

Aufgabe 1: (9 Punkte)

Es sei p eine Primzahl, $a \in \mathbb{N}$ und $m = \sum\limits_{i=0}^{p-2} a^i$. Für welche a mit $1 \leq a \leq p$ ist p ein Teiler von m ?

Aufgabe 2: (8 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

a) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $> \frac{n}{2}$, dann hat T_n einen orientierten Hamiltonkreis.

b) Liegt jede Ecke eines Turniers T_n der Ordnung n auf einem orientierten Kreis der Länge $\geq \sqrt{2n}$, dann ist T_n stark zusammenhängend.

Aufgabe 3: (8 Punkte)

Es sei G ein schlichter, Eulerscher Graph und $\mu(G)$ sein Index.

a) Zeigen Sie, dass es eine Menge $K' \subseteq K(G)$ von $\frac{\Delta(G)}{2}$ verschiedenen Kanten gibt, so dass $G \setminus K' = (E(G), K(G) \setminus K')$ zusammenhängend ist.

b) Ist es möglich, dass $\mu(G) < \frac{\Delta(G)}{2}$ gilt? *(Begründen Sie Ihre Antwort!)*

c) Bestimmen Sie alle schlichten, Eulerschen Graphen G mit $\mu(G) = 1$.

Aufgabe 4: (8 Punkte)

Es seien k und n zwei natürliche Zahlen mit $k \leq n$. Eine *k-Zahlpartition der Zahl n ohne Wiederholung* ist eine Darstellung von n als Summe von k paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen. Wird die Anordnung der Summanden nicht berücksichtigt, so bezeichnen wir die Anzahl der verschiedenen k-Zahlpartitionen von n ohne Wiederholung mit $w(n, k)$.

a) Bestimmen Sie $w(n, 2)$ für $n \geq 2$.

b) Bestimmen Sie *(ohne Beweis)* für festes gegebenes $k \in \mathbb{N}$ alle $n \geq k$ mit $w(n, k) = 1$.

c) Es sei $n = 2t^2 + 2t - 2$ mit $t \in \mathbb{N}$. Für welche t gilt $w(n, 2t) \geq 2$?
(Begründung mit b) oder direkt.)

Aufgabe 5: (8 Punkte)

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei rekursiv definiert durch $a_0 = 0,\ a_1 = 2$ und $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ für alle $n \geq 2$. Bestimmen Sie mit Hilfe der erzeugenden Funktion die explizite Darstellung der Folgenglieder a_n.

Aufgabe 6: (9 Punkte)

a) Wieviele ungeordnete 3-Zahlpartitionen $p(100, 3)$ gibt es?

b) Wieviele verschiedene natürliche Zahlen $n \geq 1\,000\,000$ gibt es, die die gleichen Ziffern wie die Zahl $6\,111\,670$ besitzen?

c) Es sei μ die Möbiussche μ-Funktion. Berechnen Sie $\sum\limits_{d/1092} 2(1 + \mu(d))$.