

Aufgabe 2:

Sei G ein Eulerscher Graph. Zeigen Sie, dass mind. ein Kreis C in G existiert mit $n(C) > \left\lceil \frac{n(G)-1}{d(G)} \right\rceil$.

Lösung:

G Eulersch $\Leftrightarrow$ Zerlegung von G in t kantendisjunkte Kreise $C_1, \dots, C_t$.

$t \leq d(G)$:

Sei $k_i \in K(C_i)$ bel. $\forall 1 \leq i \leq t$.

$$G' = G - \{k_1, \dots, k_t\} \Rightarrow \chi(G) = \chi(G') = 1$$

$$n(G') = n(G), m(G') = m(G) - t$$

$$\Rightarrow n(G) = m(G) - n(G') + \chi(G)$$

$$= (m(G) + t) - n(G') + \chi(G') = n(G') + t \geq t$$

$$n(G) \leq \sum_{i=1}^t (n(C_i) - 1) + 1$$

$$t=1: n(G) = n(C_1) \checkmark$$

$t \mapsto t+1$: Sei G ein Graph, der sich in genau $t+1$ kantendisjunkte Kreise $C_1, C_2, \dots, C_t, C_{t+1}$ zerlegen lässt.

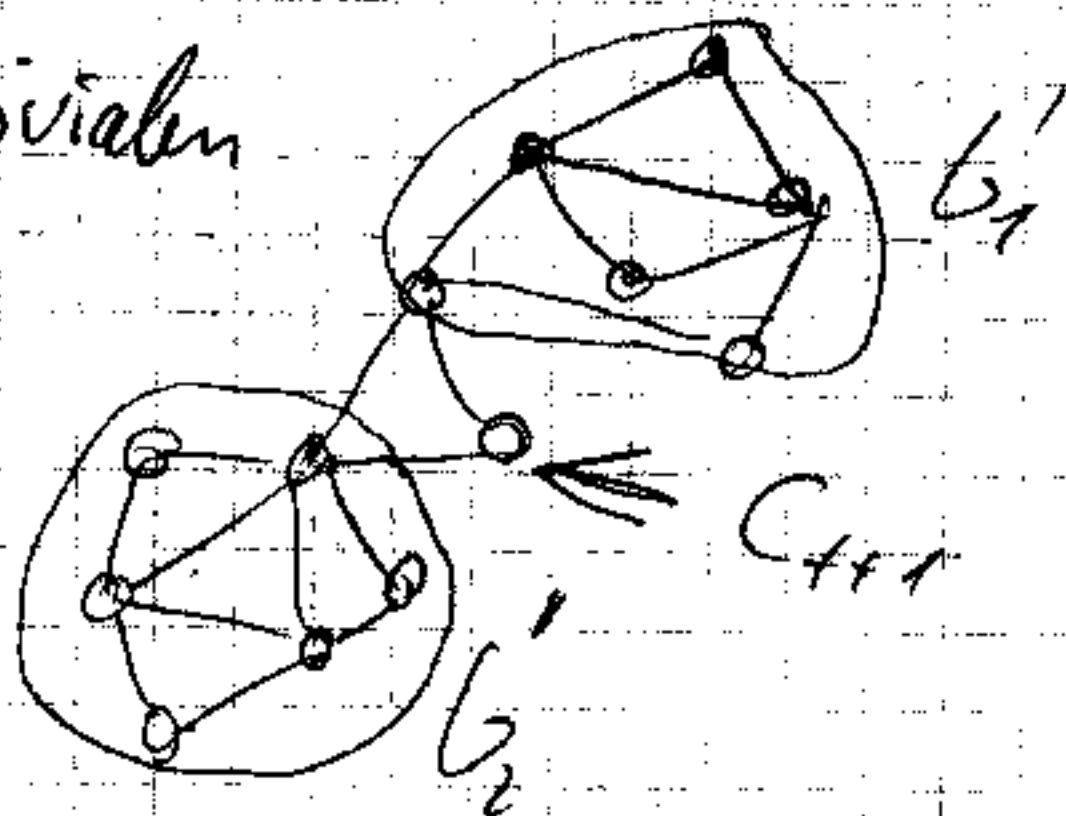
Seien $G'_1, \dots, G'_\infty$ die nicht trivialen Komp. von $G - K(C_{t+1})$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G'_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i. \quad \forall 1 \leq i \in \mathbb{N} \text{ gilt}$$

G'_i ist Eulersch und lässt sich in die kantendisjunkten Kreise

$$C_{s_{i-1}+1}, \dots, C_{s_i} \quad s_0 = 0 < s_1 < \dots < s_\infty = t$$

s_i gemeinsamer χ -Index pro Komp. G'_i



Ind. ann.

-2-

$$\Rightarrow n(G_i') \leq \sum_{i=S_{i-1}+1}^{S_i} (n(C_i) - 1) + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k n(G_i') \leq \sum_{i=1}^k (n(C_i) - 1) + k$$

$$\forall 1 \leq i \leq k \quad \exists x_i \in E(G_i') \cap E(C_{t+1})$$

$$\Rightarrow E(G) - \bigcup_{i=1}^k E(G_i') \subseteq E(C_{t+1}) - \{x_1, \dots, x_k\}$$

$$\begin{aligned} n(G) &= |E(G) - \bigcup_{i=1}^k E(G_i')| + |\bigcup_{i=1}^k E(G_i')| \\ &\leq n(C_{t+1}) - k + \sum_{i=1}^k (n(C_i) - 1) + k \\ &= \sum_{i=1}^{t+1} (n(C_i) - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow n(G) \leq \sum_{i=1}^k (n(C_i) - 1) + 1$$

$$\text{Ang. } \forall 1 \leq i \leq k \quad n(C_i) \leq \left\lceil \frac{n(G) + 1}{k} \right\rceil$$

$$\lceil x \rceil - 1 < x$$

$$\Rightarrow n(G) \leq k \left(\left\lceil \frac{n(G) + 1}{k} \right\rceil - 1 \right) + 1$$

$$\left\lceil \frac{n(G) + 1}{k} \right\rceil - 1 < \frac{n(G) + 1}{k} \quad \forall k \leq n(G)$$

$$\leq k \cdot \frac{n(G) + 1}{k} + 1 = n(G) + 1 \quad \nabla$$

$$\Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, k\} \text{ mit } n(C_i) > \left\lceil \frac{n(G) + 1}{k} \right\rceil$$

□

1. → wir | } → wir, → Hamilton-Kreis

Aufgabe 5:

$$r_3 = r_2 + r_1$$

Seien $r_3 > r_2 > r_1 \Rightarrow$ 2-fund $G = K_{r_1, r_2, r_3}$ - PM
(PM sei perfektes Matching von K_{r_1, r_2, r_3})

Zeigen Sie, dass G Hamiltonsch ist.

$$r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_p \quad \text{Ham} \Leftrightarrow r_p \leq \sum_{i=1}^{p-1} r_i$$

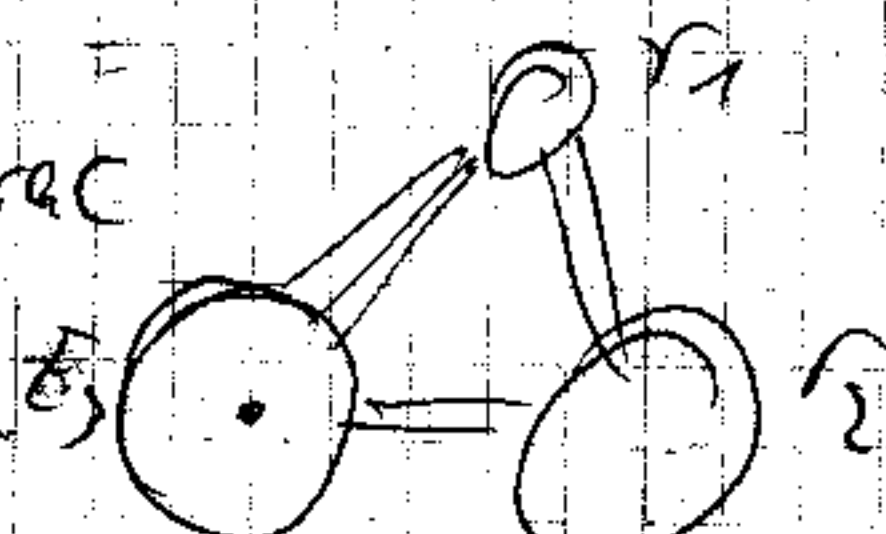
$$r_3 \leq r_1 + r_2 \Rightarrow K_{r_1, r_2, r_3} \text{ ist Hamiltonsch.}$$

$$d(b) = r_1 + r_2 - 1 < \frac{n(b)}{2} \Rightarrow \text{nicht Dirac}$$

$$n(b) = r_1 + r_2 + r_3 = 2(r_1 + r_2)$$

$$a, b \text{ nicht adj.} \Rightarrow d(a, b) + d(b, b) \geq n(b)$$

$$\exists a, b \in E_3 \text{ mit } d(a, b) + d(b, b) = 2d(b) < n(b)$$



Sei $ab \in PM \subseteq K(K_{r_1, r_2, r_3})$

$$\Rightarrow |\{a, b\} \cap E_3| \leq 1$$

$$\Rightarrow \text{O.B.d.A. } b \notin E_3: d(b, b) \geq r_3 + r_1 - 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d(a, b) + d(b, b) &\geq (r_1 + r_2 - 1) + (r_3 + r_1 - 1) \\ &= (r_1 + r_2 + r_3) + r_1 - 2 \\ &\geq n(b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G \text{ Hamiltonsch} \Leftrightarrow G + ab \text{ Hamiltonsch}$$

$$\Rightarrow \text{successive } G \text{ Ham.} \Leftrightarrow G + PM = K_{r_1, r_2, r_3} \text{ Ham.}$$

$$\Rightarrow G \text{ Hamiltonsch}$$

A7: wir, $A8: b \in a$

-4-

Aufgabe 8:

Ist G ein schlichter planarer Graph mit $d(G) \geq 3$.

$$a) J_5 + 2J_4 + 3J_3 \geq 12 + \sum_{i=7}^{\Delta(G)} (i-6) J_i$$

$$m(G) \leq 3n(G) - 6$$

$$\sum_{i=d(G)}^{\Delta(G)} J_i \cdot i = 2m(G) \leq 6n(G) - 12 = 6 \sum_{i=d(G)}^{\Delta(G)} J_i - 12$$

$$12 + \sum_{i=7}^{\Delta(G)} (i-6) J_i \leq \sum_{i=3}^6 (6-i) J_i = 3J_3 + 2J_4 + J_5$$

$$c) \delta(G) \geq 4 \Rightarrow J_3 \geq 8$$

$$\text{Satz 4.26: } m(G) \leq \frac{\delta(G)}{\delta(G)-2} (n(G)-2) \leq 2(4n(G)-2)$$

$$3J_3 + (n - J_3)4 \leq \sum_{x \in V(G)} d(x, G) = 2m(G) \leq 4n(G) - 8$$

$$\Rightarrow -J_3 + 4n \leq 4n(G) - 8$$

$$\Rightarrow J_3 \geq 8$$

A9: wir: (Ang. $\exists$ Eckknoten ungeraden Grades $\Rightarrow \underline{\text{falsch}}$)

Aufgabe 11:

Gegeben sei eine Permutation f von $\{1, 2, \dots, n\}$.

Eine Inversion von f ist ein Paar (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, mit $f(i) > f(j)$.

$$\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow (2, 3, 1, 4) \quad | 7 \text{ oder } \binom{n}{2} \text{ Inversionen!}$$

Mit $I_{n,k}$ bezeichnet man die Anzahl Permutationen von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen.

a) $I_{n,0} = 1 \quad \checkmark$

b) $I_{n,k} = I_{n, \binom{n}{2} - k} \quad \text{|| Anzahlenvergleich: häufig mit bij. Abb. ||}$

Sei $P(n,k)$ die Menge der Permutationen auf $\{1, 2, \dots, n\}$ mit genau k Inversionen.

$\exists$ bijektive Abb. $h: P(n,k) \rightarrow P(n, \binom{n}{2} - k)$

Sei π Permutation auf $\{1, 2, \dots, n\}$ mit

$$\pi(i) = (n+1) - i \Rightarrow (\pi \circ \pi)(i) = i \Rightarrow \pi \circ \pi = \text{Id}$$

$\Rightarrow$ Für eine bel. Permutation $f \in P(n,k)$ und für jedes Paar (i,j) mit $i < j$ und $f(i) > f(j)$

$$\Leftrightarrow \pi(f(i)) < \pi(f(j))$$

Sei $h: P(n,k) \rightarrow P(n, \binom{n}{2} - k)$ durch $h(f) = (\pi \circ f)$

$$\forall f_1, f_2 \in P(n,k) \text{ und } h(f_1) = h(f_2)$$

$$\Leftrightarrow \pi(f_1(i)) = \pi(f_2(i)) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

$$\Rightarrow f_1(i) = f_2(i)$$

$$\Rightarrow f_1 = f_2$$

$$\Rightarrow h \text{ injektiv}$$

Sei $g \in P(n, \binom{n}{k} - k)$ bel.

-6-

$$\pi \circ \pi \circ g = g = \pi(f) \quad \text{mit } f = \pi \circ g \in P(n, k)$$

$\Rightarrow h$ ist bijektiv

$$\Rightarrow I_{n,k} = |P(n, k)| = |P(n, \binom{n}{k} - k)| = I_{n, \binom{n}{k} - k} \quad \square$$

$$c) I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}, \quad k < n$$

$$P(n, k) = P^1(n, k) \cup P^2(n, k)$$

$P^1(n, k)$ sei die Menge aller $f \in P(n, k)$ mit $f(n) = n$
 $P^2(n, k)$ sei die Menge aller $f \in P(n, k)$ mit $f(j) = n$
für ein $j < n$.

Jedes $f \in P(n-1, k)$ entspricht einem $f' \in P^1(n, k)$
und umgekehrt $(f'(1), f'(2), \dots, f'(n-1), n)$

$$\Rightarrow |P(n-1, k)| = |P^1(n, k)|$$

zeige: $\exists$ bijektive Abbildung $h: P^2(n, k) \rightarrow P(n, k-1)$

Sei $f \in P^2(n, k) \Rightarrow f(j) = n, j < n$
 $(f(1), \dots, f(j-1), n, f(j+1), \dots, f(n))$

$$h(f(i)) = f(i) \quad \forall i \neq j, j+1$$

$$h(f(j)) = f(j+1) \quad \wedge \quad h(f(j+1)) = f(j)$$

Sei $f_1, f_2 \in P^2(n, k)$ und $h(f_1(i)) = h(f_2(i)) \quad \forall i$
 $\Rightarrow f_1(i) = f_2(i) \quad \forall i$

$\Rightarrow f_1 = f_2 \Rightarrow$ injektiv

Sei $g \in P(n, k-1)$ bel. $g(j) = n$ ($k < n \Rightarrow j > 1$)
 $[k = n \quad g = (1, 2, \dots, n) \rightarrow (n, 1, 2, \dots, n-1) \notin]$

$k < n \Rightarrow$ def. $f(i) = g(i) \quad \forall i \neq j, j-1$
 $f(j) = g(j-1) \quad \wedge \quad f(j-1) = g(j)$

$\Rightarrow f \in P^2(n, k), \quad \text{tr}(f) = g$

$\Rightarrow$ tr surjektiv $\Rightarrow$ bijektiv

$\Rightarrow |P^2(n, k)| = |P(n, k-1)|, \quad k < n$

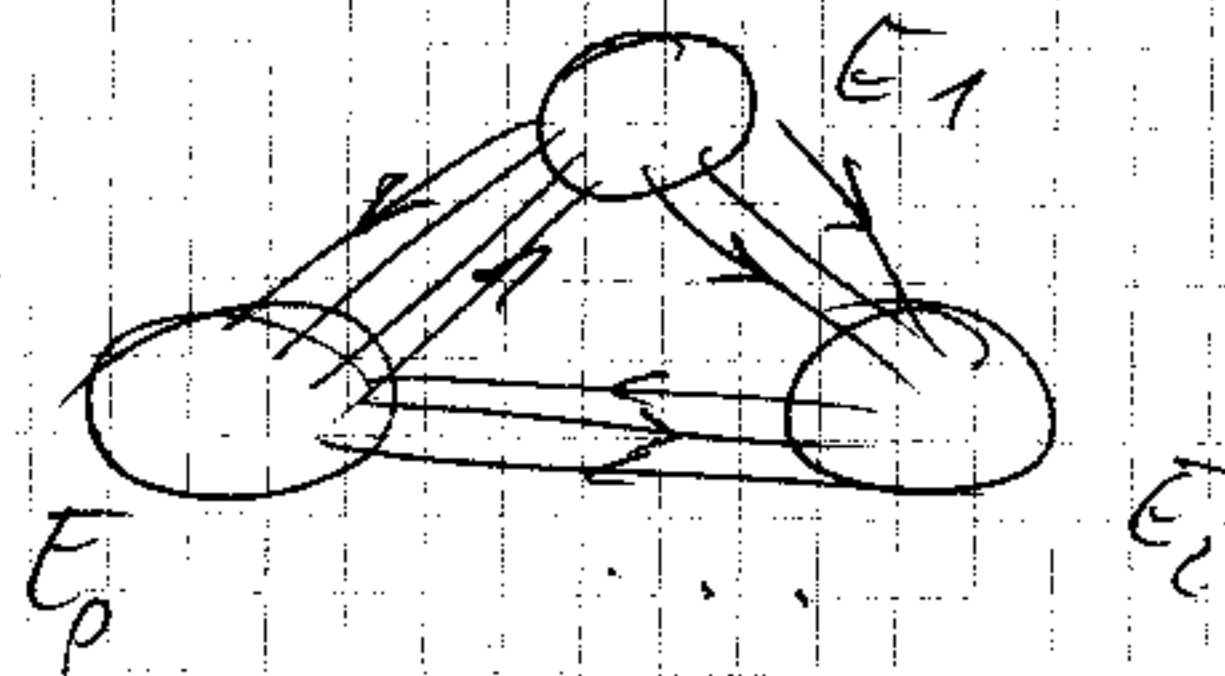
$\Rightarrow I_{n,k} = |P(n, k)| = |P^1(n, k)| + |P^2(n, k)|$
 $= |P(n-1, k)| + |P(n, k-1)| = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$

Aufgabe 4:

Sei G ein vollständiger p -partiter Graph mit der Partition $E_1, E_2, \dots, E_p, \quad p \geq 2$.

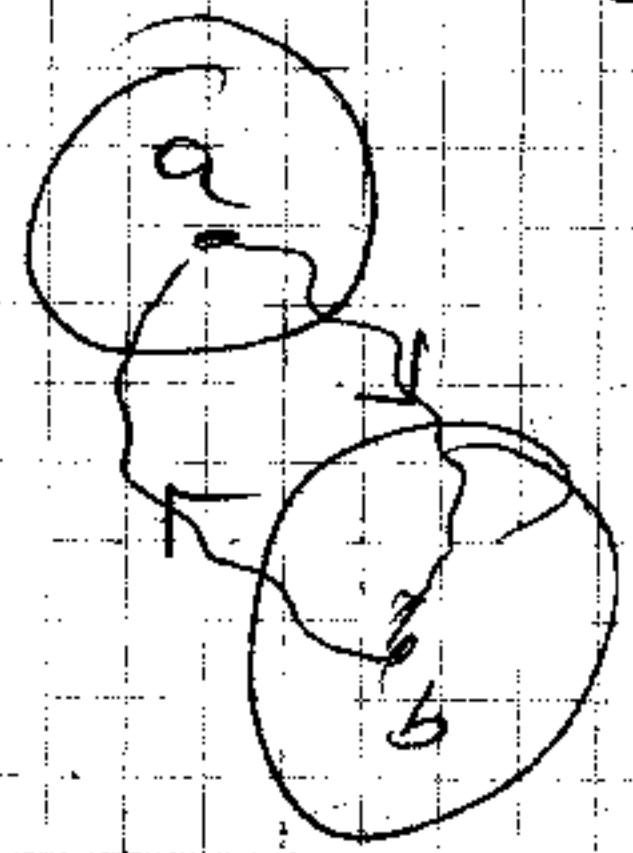
Ist D eine starke zusammenhängende Orientierung von G . Zeigen Sie:

Jede Ecke $a \in E(D)$ liegt entweder auf einem 3-Kreis oder auf einem 4-Kreis.



$a \in E(D)$ bel. Sei $0 \leq \alpha < \beta$ $a \in E_1$

Da D ~~stark~~ zusammenhängend und $n(D) \geq 2$, liegt a auf einem orientierten Kreis.



Sei nun $C = a_1, a_2, \dots, a_l, a_1$ ein kleinster orientierter Kreis, der die Ecke $a = a_1$ enthält.

$l = 3: \checkmark$

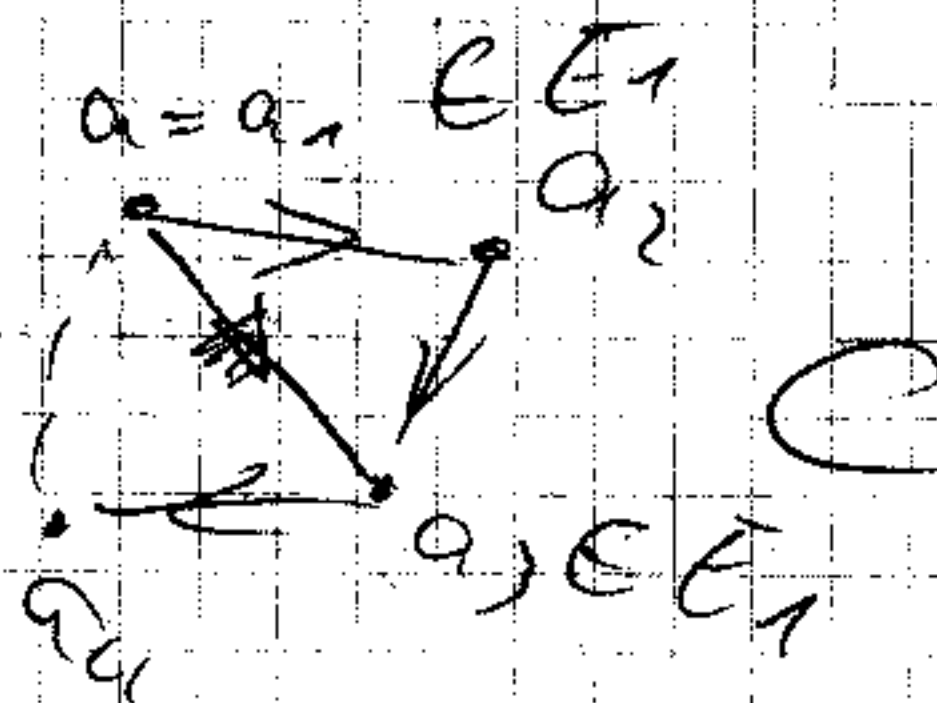
Sei nun $l \geq 4$:

$(a_1, a_3) \notin B(D)$

$(a_3, a_1) \notin B(D)$

da sonst kleinerer Kreis

$\Rightarrow a_3 \in E_1$



Da $(a_3, a_4) \in B(D) \Rightarrow a_4 \notin E_1 \Rightarrow$ entweder $(a_1, a_4) \in B(D)$ oder $(a_4, a_1) \in B(D)$

$(a_1, a_4) \in B(D)$

$\Rightarrow (a_1, a_4, \dots, a_l, a_1)$ kleinerer Kreis, der $a_1 = a$ enthält.

$\Rightarrow (a_4, a_1) \in B(D) \Rightarrow a = a_1$ liegt auf dem $\checkmark$ Kreis $a_1, a_2, \dots, a_l, a_1$.

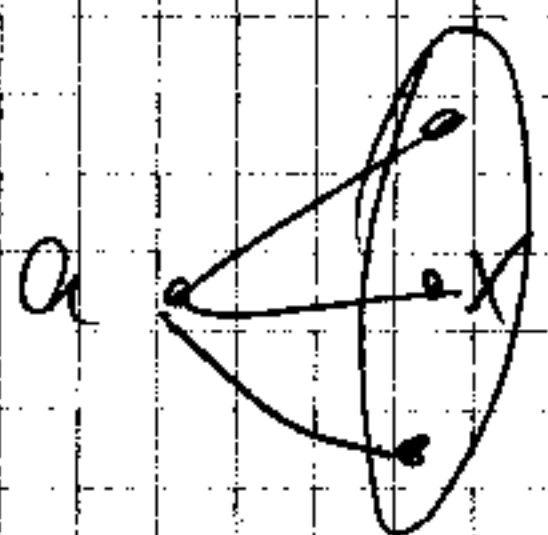
Miranca Fischermann:

SG 11A

A2:

Sei G ein einfacher Graph ohne Kreise der Länge 3.Man zeige: $m(G) \leq \left(\frac{n(G)}{2}\right)^2$ (ohne 3-Kreise)

(Lösung:

Sei $a \in E(G)$ beliebig mit $d(a, G) = \Delta = \Delta(G)$
 $= |N(a)|$  $\forall x \in N(a)$ gilt $N(x) \subseteq E(G) - N(a)$ (denn keine 3-Kreise
können vor! $\Rightarrow d(x, G) \leq n - \Delta$ Alle Nachbarn von x
sind also untereinander
nicht adjazent. $\Rightarrow \forall x \in E(G) - N(a)$ gilt $d(x, G) \leq \Delta$

Handschlaglemma:

$$m(G) = \frac{1}{2} \sum_{x \in E(G)} d(x, G) = \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in N(a)} d(x, G) + \sum_{x \in E(G) - N(a)} d(x, G) \right]$$

Δ Elemente

$$\leq \frac{1}{2} \left[\sum_{x \in N(a)} (n - \Delta) + \sum_{x \in E(G) - N(a)} \Delta \right] = \frac{1}{2} [\Delta(n - \Delta) + (n - \Delta)\Delta]$$

$$\Rightarrow m(G) \leq \Delta(n - \Delta) = f(\Delta)$$

$$f'(\Delta) = n - 2\Delta = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{n}{2} \text{ Extremum}$$

$$f''(\Delta) = -2 < 0 \Rightarrow \text{ober Max. bei } \Delta = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow m(G) \leq f\left(\frac{n}{2}\right) = \left(\frac{n}{2}\right)^2$$

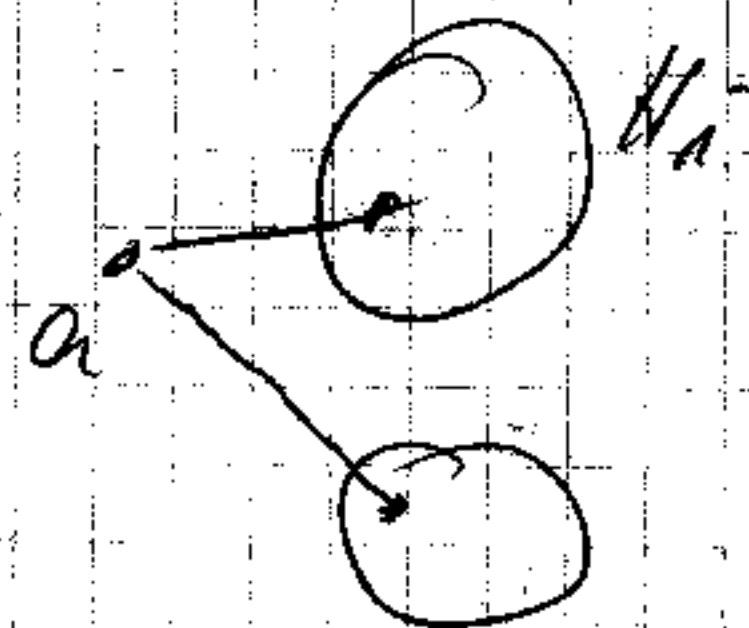
A4:

Sei G ein zusammenhängender Graph der Ordnung ≥ 2 .a) Zeigen Sie: $k(G-a) \leq d(a, G) \quad \forall a \in E(G)$

Lösung:

Sei $a \in E(b)$ bel. und seien $H_1, \dots, H_K$ die Komponenten des $b-a$ ($K = K(b-a)$). Sei $m(a, H_i) =$ Anzahl Kanten, die a mit einer Ecke aus H_i verbinden, $\forall 1 \leq i \leq K$.

$$\Rightarrow m(a, H_i) \geq 1 \quad \forall 1 \leq i \leq K$$



$$\Rightarrow d(a, b) = \sum_{i=1}^K m(a, H_i) \geq K \cdot 1$$

$$\Rightarrow K(b-a) \leq d(a, b)$$

□

b) ähnlich, gerader Grad, $K \leq \frac{1}{2} d(a, b)$

Tipp: Handschlaglemma

A8:

(wichtig)

a) 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7

Ist diese Folge schlicht realisierbar?

Satz 3.9: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7

1, 2, 3, 3, 3, 5, 6

2, 3, 3, 3, 4, 5

3, 3, 3, 3, 4

2, 2, 3, 3

2, 2, 2

1, 2, 2, 3

K_3

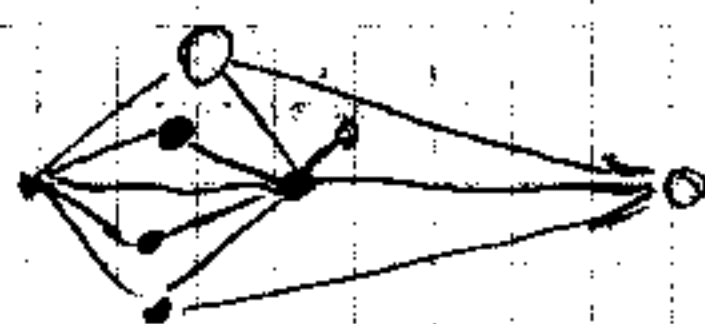
beim Graphenbau von unten nach oben werden links nicht der Grad der neuen Ecke

$\Rightarrow 2, 2, 2$ ist durch schlichten Graphen realisierbar

$\Rightarrow 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7$ ist durch schlichten Graphen real.

Alts.: 1) $\sum$ Folgenglieder gerade, sonst nicht realisierbar (Handschlaglemma)

2) $\max_{i=1}^n d_i \Rightarrow$ kein schlichter Graph



b) $1, 2, 3, \dots, n$

$\Rightarrow$ diese Folge ist nicht durch einen schlichten Graphen realisierbar.

Satz 3.8. $1, 2, 3, \dots, n$ ist realisierbar

$$\Leftrightarrow n \leq \sum_{i=1}^{n-1} i \quad \vee \quad 1 \leq \sum_{i=1}^n i \text{ gerade}$$

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} = 2f, f \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) = 4f \Leftrightarrow 4|n \text{ oder } 4|(n+1)$$

$$\Leftrightarrow n \equiv 0 \pmod{4} \text{ oder } n \equiv 3 \pmod{4}$$

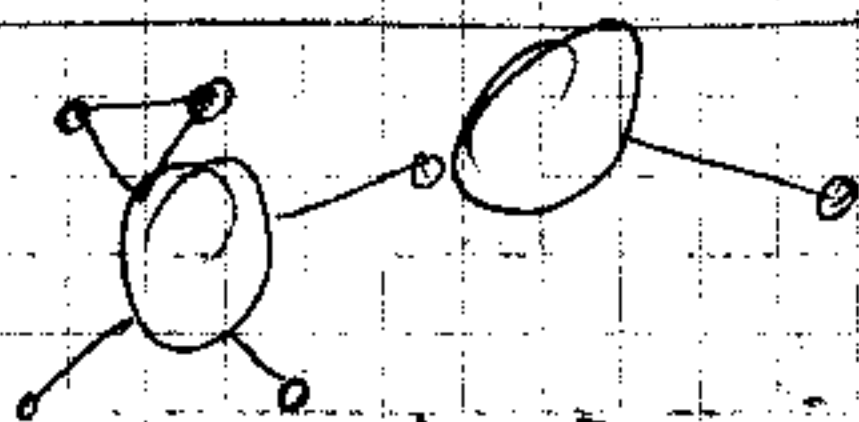
$\Rightarrow 1, 2, 3, \dots, n$ ist realisierbar.



c) $1, 1, 2, \dots, n-1$

d) $\rightarrow$ max grad

19



Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph und seien alle Kreise in G kantendisjunkt. zeigen Sie:

Sind a und b zwei bel. Ecken aus G mit $d(a, b) = d_m(b)$, so gilt $\max\{d(a, b), d(b, b)\} \leq 2$.

Lösung

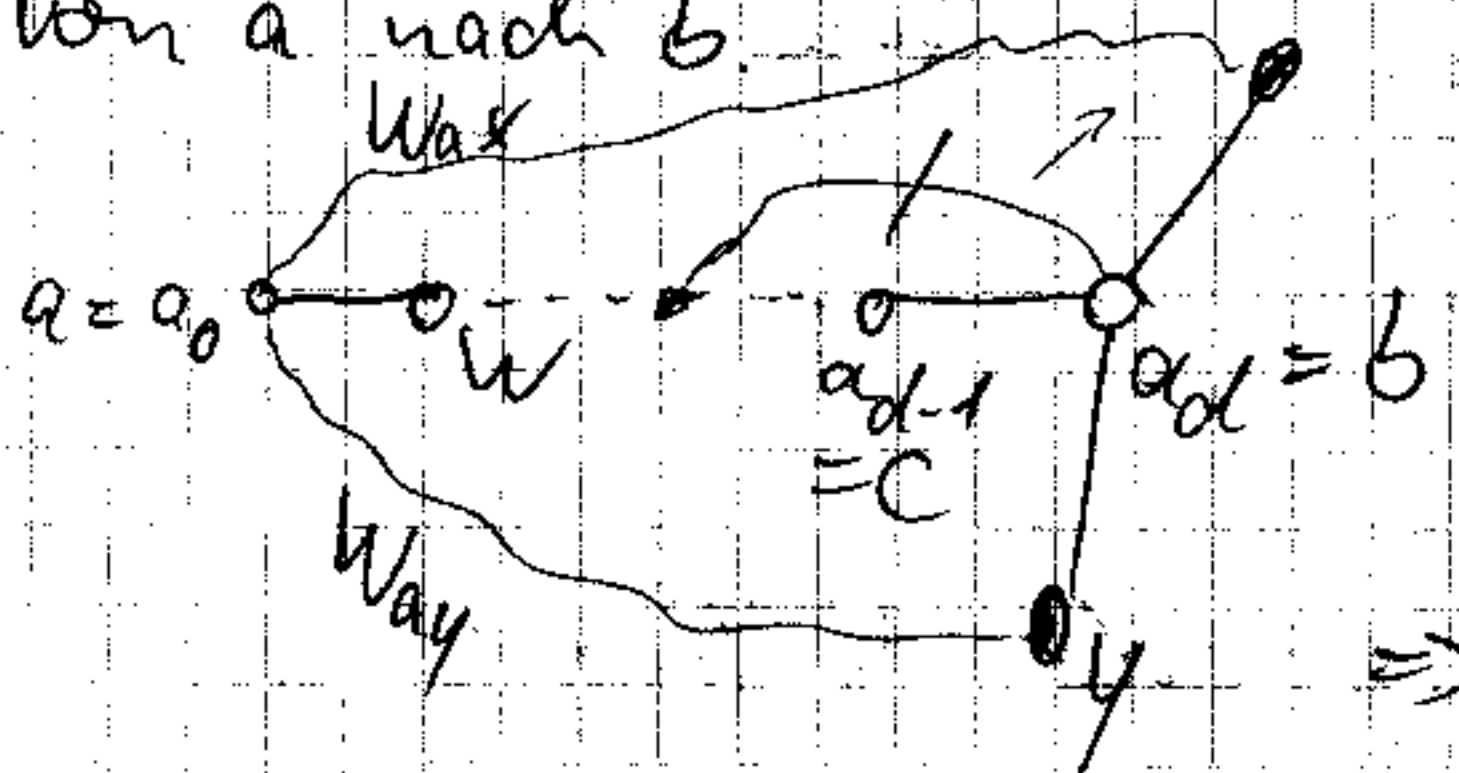
Falls $\text{dim}(b) \leq 1 \Rightarrow b$ vollst. $\Rightarrow n(b) \leq 1$
 $\Rightarrow \Delta(b) \leq 2$



Sei $\text{dim}(b) \geq 2$.

Ang. $\exists a, b \in E(b)$ mit $d(a, b) = \text{dim}(b)$ und
 $\circ \exists d \in A \ d(b, b) \geq 3$.

Sei $W = a_0 a_1 \dots a_d$, $a_0 = a$, $a_d = b$ ein kürzester Weg
 von a nach b



Ang $\exists a_i \in N(b) \cap \{a_0, \dots, a_{d-1}\}$
 $\Rightarrow \exists$ kürzeren Weg $a_0 \dots a_i b$
 von a nach b

$\Rightarrow \exists x, y \in N(b) - E(W), x \neq y$

Seien W_x und W_y kürzeste Wege von a nach x bzw. y .

Da $x, y \notin E(W) \Rightarrow bx, by \notin K(W)$

Da $b \notin E(W_x), b \notin E(W_y)$ (sonst $d(a, x) > d(a, b)$
 bzw. $d(a, y) > d(a, b)$)

$\Rightarrow cb, bx, by \notin K(W_x) \cup K(W_y)$

$cb \notin \{a_0 a_1, \dots, a_{d-2} a_{d-1}\}$

Wegen der Wege W_x (bzw. W_y) und $a_0 a_1 \dots a_{d-1}$
 existieren Kantensfolgen von y (bzw. x) nach c
 und nach Hilfssatz 3.1 existieren Wege V_y (bzw. V_x)
 von y bzw. x nach c mit $K(V_y) \subseteq K(W_y) \cup \{a_0 a_1, \dots, a_{d-2} a_{d-1}\}$
 und $K(V_x) \subseteq K(W_x) \cup \{a_0 a_1, \dots, a_{d-2} a_{d-1}\}$

Disso - U

12.05.00

$b_x, b_y, c_b \notin \{a_0 a_1, \dots, a_{d-2} a_{d-1}\}$

$b_x, b_y, c_b \notin K(W_{ax}) \cup K(W_{ay})$

$\Rightarrow V_x \cup c_b x = C_x$ ist Kreis und $x \in E(C_x)$

$V_y \cup c_b y = C_y$ ist Kreis und $y \in E(C_y)$

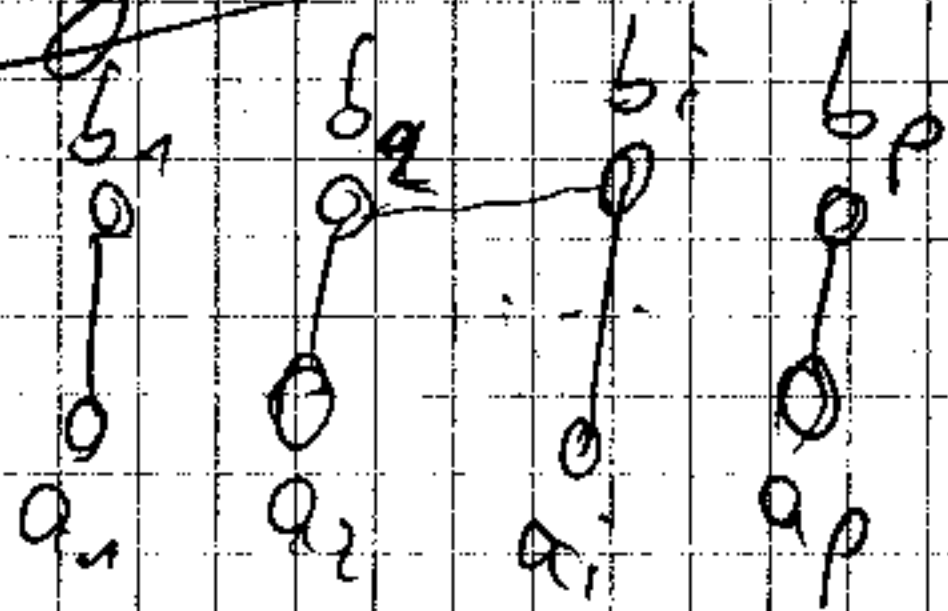
$\Rightarrow C_x \neq C_y$ aber $c_b \in K(C_x) \cap K(C_y)$

11.11:

Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit $n(G) = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, welcher p paarweise nicht inzidente Brücken enthält.

a) zeigen sie: $m(G) \leq \binom{p+1}{2}$

Lösung:



$$m(\{a_i, b_i\}, \{a_i, b_i\}) \leq 1$$

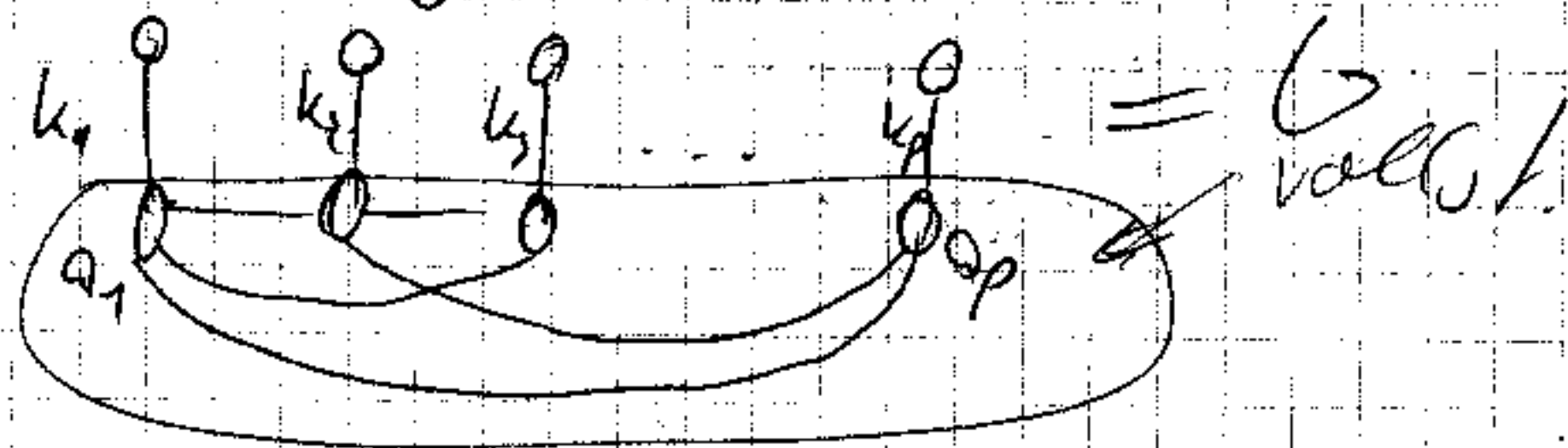
$$d(a_i, b) + d(b_i, b) \leq 2 + p - 1 = p + 1$$

Handschlagl.k.

$$m(G) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^p (d(a_i, b) + d(b_i, b)) \right) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p (p+1) = \frac{p(p+1)}{2} = \binom{p+1}{2}$$

□

b) der einzige:



$$m(b) = p + m(K_p) = p + \binom{p}{2} = \binom{p+1}{2}$$

AS:

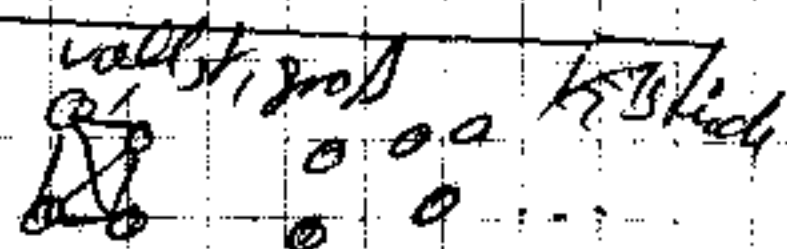
Sei b ein einfacher Graph mit $K = K(b)$ Komp., die vollständige Graphen sind.

Sei $n \in n(b) \equiv r \pmod{K}$ mit $0 \leq r < K$.

Man zeige: $m(b) \geq \frac{1}{2K} (n-r)(n+r-K)$

Lösung:

// V : was mit K komposit ist



Sei b^* der Graph mit K vollständigen Komponenten und $n(b^*) = n$ mit minimaler Größe ($m(b^*)$ min.)

Sei $n = S \cdot K + r$, d.h. $S = \frac{n-r}{K} \in \mathbb{N}$

ang. $\exists$ Komponente b_i von b^* mit $n(b_i) < S$

$\Rightarrow \exists b_j$ mit $n(b_j) \geq S+1$ (sonst $n < S \cdot K \nmid$)

Sei nun b' der Graph, bestehend aus den Komp. von b^* außer b_i und b_j , und den die zwei Komp.

$$K_{n(b_i)+1}, K_{n(b_j)+1}$$

$\Rightarrow$ alle K Komp. von b' sind vollständig und $n(b') = n$.

$$\text{Also: } m(b') = m(b^*) - \underbrace{(n(b_i) - 1)}_{\leq S} + \underbrace{n(b_i)}_{\leq S}$$

$$< m(b^*) - S + S = m(b^*) \quad \begin{matrix} \swarrow \\ \square \end{matrix}$$

$$\rightarrow n(b_i) \in \{S, S+1\} \Rightarrow S \quad \forall 1 \leq i \leq K$$

Analog zeigt man $n(p_i) \in S+1 \quad \forall 1 \leq i \leq K$

$\Rightarrow$ Da $n = SK + r$, haben genau r Komp. Ordnung $S+1$

$$\Rightarrow m(b) \geq m(b^*) = \sum_{i=1}^K m(b_i) = (K-r) m(K_S) + r m(K_{S+1})$$

$$= (K-r) \frac{S(S-1)}{2} + r \frac{(S+1) \cdot S}{2}$$

$$= K \frac{S(S-1)}{2} - r \frac{S^2}{2} + \frac{rS}{2} + r \frac{S^2}{2} + \frac{r \cdot S}{2}$$

$$= K \frac{S(S-1)}{2} + 2 \frac{r \cdot S}{2}$$

$$= \frac{K}{2} \frac{n-r}{K} \left(\frac{n-r-K}{K} \right) + \frac{2r}{2} \frac{n-r}{K}$$

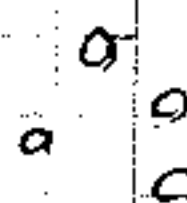
$$+ \frac{2r}{2} \frac{n-r}{K}$$

$$= \frac{1}{2K} (n-r)(n-r-K+2r)$$

$$= \frac{1}{2K} (n-r)(n+r-K) \quad \square$$



A7: Analog zu Sat



→ Beweis Sat 3.6

$\delta(G) \geq 2$ beachten

A10: ähnlich A9

Übung 6:

Aufgabe 2: $M_n = \{(F_1, F_2, F_3)\}$
 $|M_n| = S_{n,1} + S_{n,2} + S_{n,3}$

Übung 7:Aufgabe 1:

a) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

b) $f(x) = \frac{1}{1-2x} + \frac{1}{1-5x}$

$\hat{f}(x) = e^{2x} + e^{5x}$

Aufgabe 2: $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$
 $a_n = ?$

erzeugende Fkt: $h(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 1} a_n x^n$

[analog Fibonacci] $= a_1 x^1 + \sum_{n \geq 2} (2a_{n-1} - a_{n-2}) x^n$

$= x + 2 \sum_{n \geq 2} a_{n-1} x^n - \sum_{n \geq 2} a_{n-2} x^n$

$= x + 2 \sum_{i \geq 1} a_i x^{i+1} - \sum_{i \geq 0} a_i x^{i+2}$

$= x + 2x \underbrace{\sum_{i \geq 1} a_i x^i}_{h(x)} - x^2 \underbrace{\sum_{i \geq 0} a_i x^i}_{h(x)} = x + 2x h(x) - x^2 h(x)$

($\Rightarrow$) $h(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 1} = \frac{x}{(x-1)^2}$

Partialbruchzerlegung:

$h(x) = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)}$

$= \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}$

Beispiel (b, 1a, c)

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{n \geq 0} (n+1) x^n - \sum_{n \geq 0} x^n$

$= \sum_{n \geq 0} n x^n \Rightarrow a_n = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Bem: [direkter Beweis per Induktion]

Aufgabe 3: w Wort der Länge n , nur 0 oder 1 als Einträge

$w_n :=$ Anzahl der 0/1-Worte der Länge n , in denen niemals zwei Nullen hintereinander vorkommen.

$$n=1 \quad 0 \quad 1 \quad w_1 = 2$$

$$n=2 \quad \underline{00}, 01, 10, 11 \quad w_2 = 3$$

$n \geq 3$: • Sei w Wort der Länge n , w beginne mit Null.

$$w = 0 \underbrace{\hspace{2cm}}_{n-1}$$

$w = 01 \underbrace{\hspace{2cm}}_{n-2} \Rightarrow$ Wort der Länge $n-2$, in dem niemals zwei Nullen hintereinander vorkommen.

Es gibt w_{n-2} solcher Worte

• Sei w Wort der Länge n , w beginne mit Eins

$$w = 1 \underbrace{\hspace{2cm}}_{n-1} \Rightarrow \text{Es gibt } w_{n-1} \text{ solcher Worte}$$

$$\Rightarrow w_n = w_{n-1} + w_{n-2} \quad (\text{Fibonacci-Rekursion})$$

$$f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$$

$$f_0 = 1 \quad f_1 = 1$$

$$\Rightarrow w_n = f_{n+2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

Aufgabe 4: $S_n :=$ Anzahl der Funktionen von $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$, die mit dem Wert i jeden Wert j , $1 \leq j \leq i$ annehmen.

$$\text{Üb A4: } S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{n-k}, \quad S_0 = 1$$

z.z. $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{k^n}{2^{k+1}}$

dann:

$$S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \quad S_0 = 1$$

$$\Rightarrow 2S_n = S_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \quad \underline{n \geq 1}$$

Bilde exp. erz. Fkt.:

$$\hat{A}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n = \frac{1}{2} S_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow 2\hat{A}(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S_{n-k} \right) \frac{x^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} S_{n-k} \right) x^n$$

$$= 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{S_{n-k}}{(n-k)!} \right) x^n$$

$$= 1 + \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)}_{e^x} \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_n}{n!} x^n \right)}_{\hat{A}(x)}$$

*

$$= 1 + e^x \hat{A}(x)$$

$$\Rightarrow \hat{A}(x) = \frac{1}{2 - e^x} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{e^x}{2}} \quad \underline{y = \frac{e^x}{2}} \quad \frac{1}{2} \frac{1}{1 - y}$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^x}{2} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k^n)}{n!} \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}} \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} S_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$$

Insb.: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{2^{k+1}}$ konv. gegen Grenzwert $\in \mathbb{N}$

Aufgabe 5:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{|N(n)|}{n^s} = \prod_p (1 + p^{-s}) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft.

Def. 5.11:
$$N(n) = \begin{cases} (-1)^k & ; n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j \\ 1 & ; n = 1 \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ gilt $p^2 | n$ für eine Primzahl p , so folgt $N(n) = 0$

$$\Rightarrow \sum_{n \geq 1} \frac{|N(n)|}{n^s} = 1 + \sum_{\substack{n \geq 2 \\ n = p_1 \cdot \dots \cdot p_k \\ p_i \neq p_j}} \frac{1}{\underbrace{p_1^s \cdot \dots \cdot p_k^s}_{\frac{1}{p_1^s} \cdot \frac{1}{p_2^s} \cdot \dots \cdot \frac{1}{p_k^s}}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots$$

$$+ \frac{1}{2^s 3^s} + \frac{1}{2^s 5^s} + \dots$$

$$+ \frac{1}{3^s 5^s} + \frac{1}{3^s 7^s} + \dots$$

$$= \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right), \text{ wobei } p \text{ alle Primzahlen durchläuft.}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2^s} \right) \left(1 + \frac{1}{3^s} \right) \left(1 + \frac{1}{5^s} \right) \left(1 + \frac{1}{7^s} \right) \dots$$

$$\prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s} \right) = \prod_p \left(\frac{p^s + 1}{p^s} \right) = \prod_p \left(\frac{(p^s + 1)(p^s + 1)}{p^s (p^s + 1)} \right)$$

$$= \prod_p \frac{1 - p^{2s}}{p^s (1 - p^s)} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}$$

Eulersche Produktdarst. (Satz 6.6):

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}} \quad \zeta(2s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-2s}}$$

Aufgabe 6: Halbordnung $(H, \leq)$ Filter: $F \subset H$ mit:

$$x \in F, y \geq x \Rightarrow y \in F$$

 $\emptyset$ ist ein FilterZeigen Sie: In $(H, \leq)$ ex. genauso viele Filter wie Antiketten.Dazu: $\emptyset$ ist AntiketteSei $A \subseteq H$ eine Antikette, so bilde F wie folgt:

$$F = \{y \in H : \exists x \in A \text{ mit } x \leq y\}$$

$$i) A \subseteq F$$

nach Def. Filter ist F ein Filter.Sei umgekehrt F ein Filter. Bilde A wie folgt:

$$A = \{x \in F : x \text{ ist ein minimales Element in } F \text{ bzgl. } \leq\} \quad // \text{ unvergleichbare El. sind auch minimal}$$

Beh: A ist eine Antikettedazu: Ang., A keine Antikette, d.h. in A mind.

$$2 \text{ Elemente } x, y \in A \text{ mit } \exists x \leq y, x \neq y$$

~~$$\text{in } x \leq y, y \in F \text{ mit } y \leq x$$~~

$$x, y \in F, \text{ jeweils min. in } F \text{ bzgl. } \leq$$

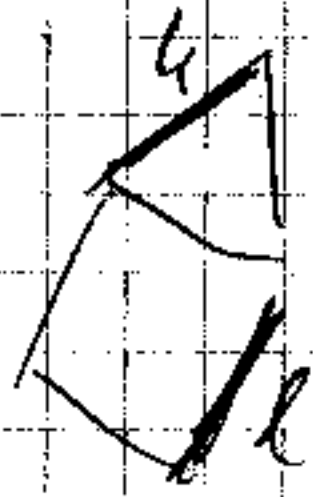
$$\Rightarrow y \text{ in } F \text{ min. bzgl. } \leq$$

$$\text{aber } x \leq y \quad \Downarrow$$

Somit ex. bijektive Abbildung zwischen den Filtern und den Antiketten in $(H, \leq)$, also ist deren Anzahl identisch.

→ 4. Übung

Man nennt $M \subseteq K(G)$ ein Matching von G , wenn keine zwei Kanten aus M ~~ind~~ inzident sind.



Aufgabe 3:

Sei G ein schlichter bipartiter Graph mit Partitionen A, B .
Zeigen Sie, dass ein Matching M existiert mit $|M| \geq \min\{|A|, |B|, 2\delta(G)\}$.

Lösung:

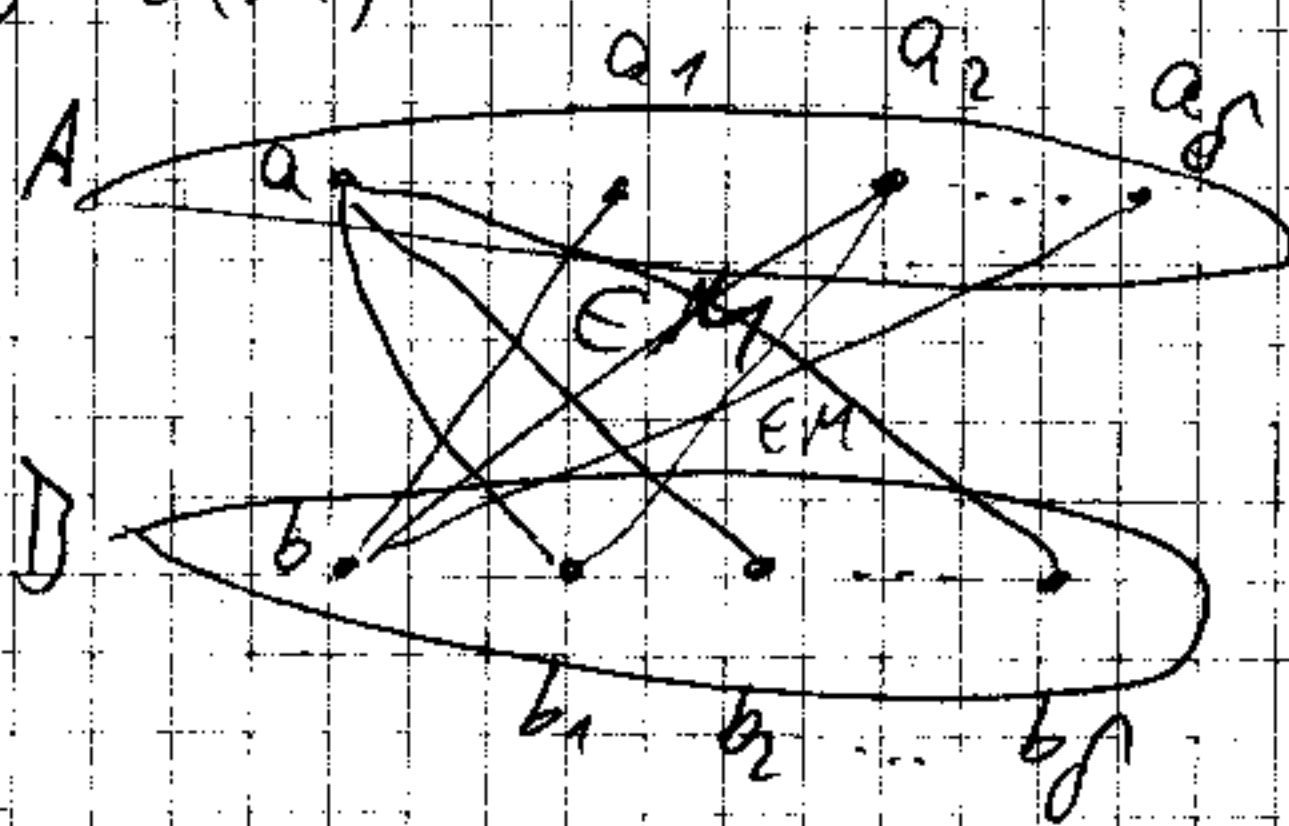
Sei M ein maximales Matching von G .

Falls $|M| \geq \min\{|A|, |B|\} \geq \min\{|A|, |B|, 2\delta(G)\} \checkmark$

Sei nun $|M| < \min\{|A|, |B|\}$

$\Rightarrow \exists a \in A - E(M), b \in B - E(M)$

M max. $\Rightarrow ab \notin K(G)$



statt-
lie b_{a_j} und
 a_j
zum
Matching

$\exists$ mind. $\delta = \delta(G)$

verschiedene Ecken

$a_1, a_2, \dots, a_j \in N(b) \subseteq A$

$b_1, b_2, \dots, b_j \in N(a) \subseteq B$

Ang. $a_i \in E(M) \Rightarrow \{a, a_i\} \cup M$ ist größere Matching $\checkmark$

$\Rightarrow \{a_1, \dots, a_j, b_1, \dots, b_j\} \subseteq E(M)$

Ang. $\exists a, b_j \in M \Rightarrow b, a, b_j, a$ ist M -zunehmender Weg
 $\checkmark$ zu Satz 3.14 (Berge)

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq d \quad \exists c_i, d_i \in E(G) \text{ sodass}$$

$$a_i, c_i, b_i, d_i \in M \text{ und } c_i, d_i \notin \{a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d\}$$

$$\Rightarrow |M| \geq |\{a_i, c_i, b_i, d_i \mid 1 \leq i \leq d\}| = 2d(G)$$

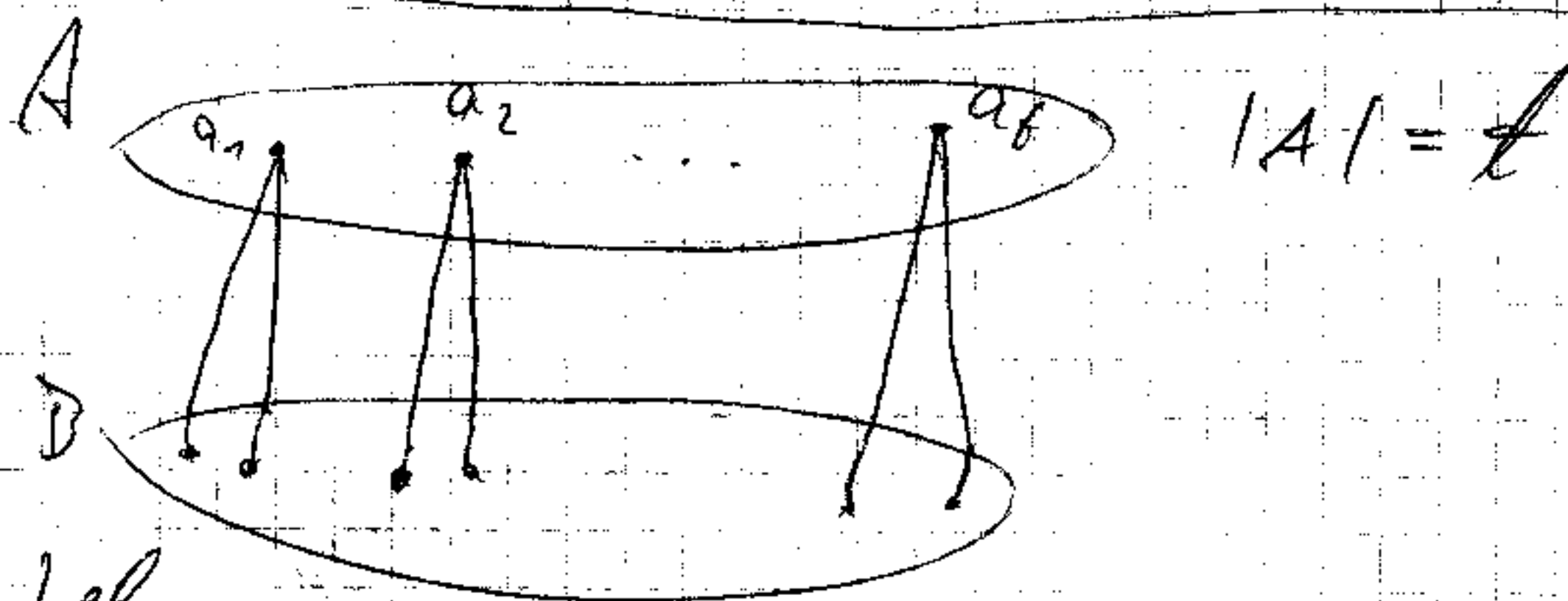
Aufgabe 1:

Sei G ein schlichter bipartiter Graph mit Bipart. A, B .

Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- a) Es ex. eine Menge $W = \{P_a \mid a \in A\}$ bestehend aus $|A|$ paarweise disjunkten Wegen P_a der Länge 2, so dass $d(a, P_a) = 2$ für jede Ecke $a \in A$.
- b) Für alle Teilmengen $S \subseteq A$ gilt $|N(S, G)| \geq 2|S|$.

a) $\Rightarrow$ b):



Sei $S \subseteq A$ bel.

$$\bigcup_{a \in S} N(a, P_a) \subseteq \bigcup_{a \in S} N(a, G) = N(S, G)$$

$$N(a, P_a) \cap N(a', P_{a'}) = \emptyset \quad \forall a \neq a'$$

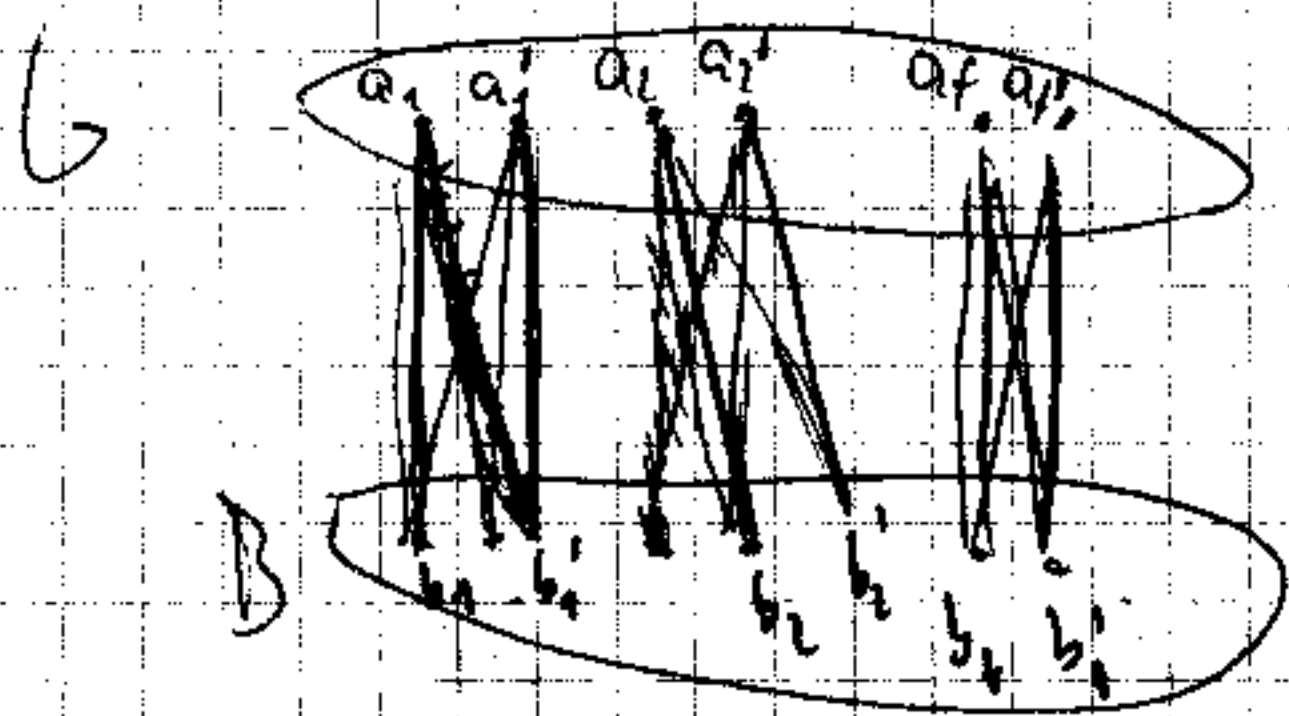
$$\Rightarrow \left| \bigcup_{a \in S} N(a, P_a) \right| = \sum_{a \in S} |N(a, P_a)| = \sum_{a \in S} d(a, P_a) = |S| \cdot 2$$

$$\leq |N(S, G)|$$

□

b) $\Rightarrow$ a)

Konstruiere aus G den bipartiten Graphen G' .



Sei C, D die Bipart.
von G' mit $C = \{a_i, a_i' \mid a_i \in A\}$
und $K(G') = \{a_i b, a_i' b \mid a_i b \in E(G)\}$

Sei nun $\tilde{S} \subseteq C$ bel. und sei

$$S = \tilde{S} \cap \{a_1, \dots, a_t\} \text{ und } S' = \tilde{S} \cap \{a_1', \dots, a_t'\}$$

$$\text{ObdA } |S| \geq |S'|, S \subseteq A \subseteq C, N(S, b) = N(S, b')$$

$$\Rightarrow |\tilde{S}| = |S| + |S'| \leq 2|S| \leq |N(S, b)| = |N(S, b')| \leq |N(\tilde{S}, b')|$$

König-Hall

Satz 3.16

$$\exists \text{ Matching } M' \text{ von } G' \text{ mit } E(M') \cap C = C = \{a_i, a_i' \mid 1 \leq i \leq t\}$$

$$\Rightarrow \forall 1 \leq i \leq t \exists b_i, b_i' \in N(a_i, G) \quad (N(a_i, G) = N(a_i, G) = N(a_i', G'))$$

$$M' = \{a_i b_i, a_i' b_i' \mid 1 \leq i \leq t\} \subseteq K(G')$$

$b_1, \dots, b_t, b_1', \dots, b_t'$ paarweise verschieden.

$$\Rightarrow W = \{b_i a_i b_i' \mid 1 \leq i \leq t\} \text{ besteht aus } t = |A| \text{ Eckendg.}$$

Wegen der Länge 2 und $\forall 1 \leq i \leq t$ hat a_i Grad 2 in $b_i a_i b_i'$.

$\Rightarrow$ a)

□

Aufgabe 5:

Seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ die Ecken des n -Turniers T_n .

Beweisen Sie:

a) $\sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2} \quad \forall 1 \leq p \leq n$

b) Ist T_n stark zusammenhängend, $n \geq 3$, so gilt

$$\sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2} + 1 \quad \forall 1 \leq p \leq n-1.$$

Lösung:

der davon induz. Teilgraph



a) Sei $T_p = T_n[\{x_1, \dots, x_p\}]$

$\Rightarrow T_p$ ist wieder Turnier

$$\sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) \geq \sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_p) = m(T_p) = m(K_p) = \binom{p}{2}$$

// Handoddslemma, $\rightarrow$ Skript

Sei $1 \leq p \leq n-1$

b) Da T_n stark zusammenhängend ist, muss mind. ein Bogen (x_i, x_j) ex., so dass $x_i \in E(T_p)$, d.h. $i \leq p$, und $x_j \in E(T_n) - E(T_p)$, d.h. $j > p$.

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_n) \geq \sum_{i=1}^p d^+(x_i, T_p) + 1 = \binom{p}{2} + 1 \quad \square$$

A
1.6.8: selber machen

Aufgabe 7:

- Sei T ein p -reguläres Turnier, d.h. $d^+(x, T) = p = d^-(x, T)$
 $\forall x \in E(T)$, $n(T) \geq 5$. Zeigen Sie, dass jeder Bogen
 von T auf einem 3-Kreis und auf einem
 4-Kreis liegt.

Lösung: $\forall x \in E(T)$

$$d^+(x, T) + d^-(x, T) = n(T) - 1 = 2p$$

- 3-Kreis: Sei $(a, b) \in D(T)$ bel.

$$\Rightarrow N^-(a) \cup N^+(b) \subseteq E(T) - \{a, b\}$$

$$|N^-(a) \cap N^+(b)| = |N^-(a)| + |N^+(b)|$$

$$- |N^-(a) \cup N^+(b)| \geq 2p - (n(T) - 2) = 1$$

$\Rightarrow \exists c \in N^-(a) \cap N^+(b)$ und (a, b) liegt auf 3-Kreis abca.

- 4-Kreis: Sei $(a, b) \in D(T)$ bel.

$$1.) \exists d \in N^-(a) \cap N^-(b)$$

(d, b) liegt auf 3-Kreis dbxd

$\Rightarrow (a, b)$ liegt auf 4-Kreis abxd

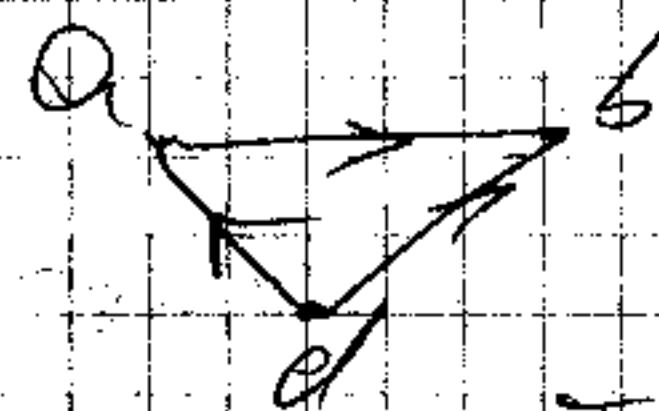
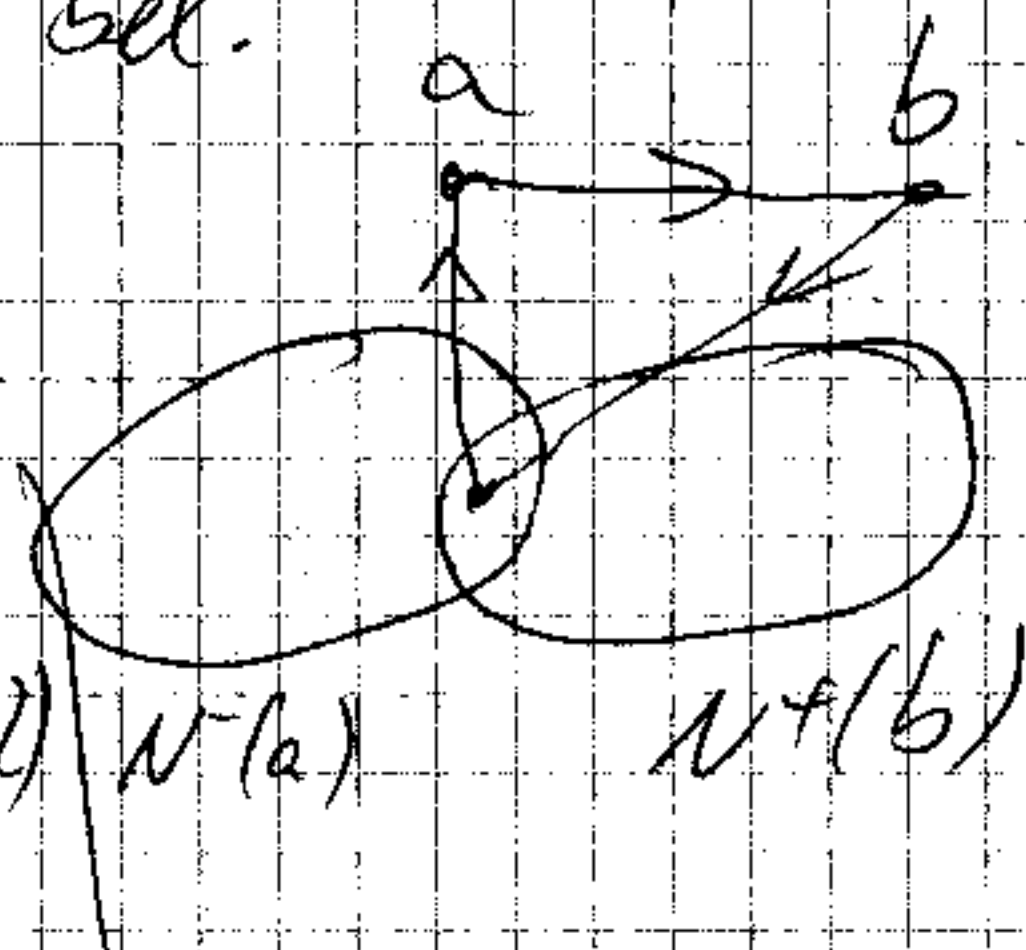
$$2.) N^-(a) \subseteq N^+(b) \cup \{b\} = E(T) - (N^-(b) \cup \{b\})$$

$$n(T) \geq 5, n(T) = 2p + 1 \Rightarrow p \geq 2$$

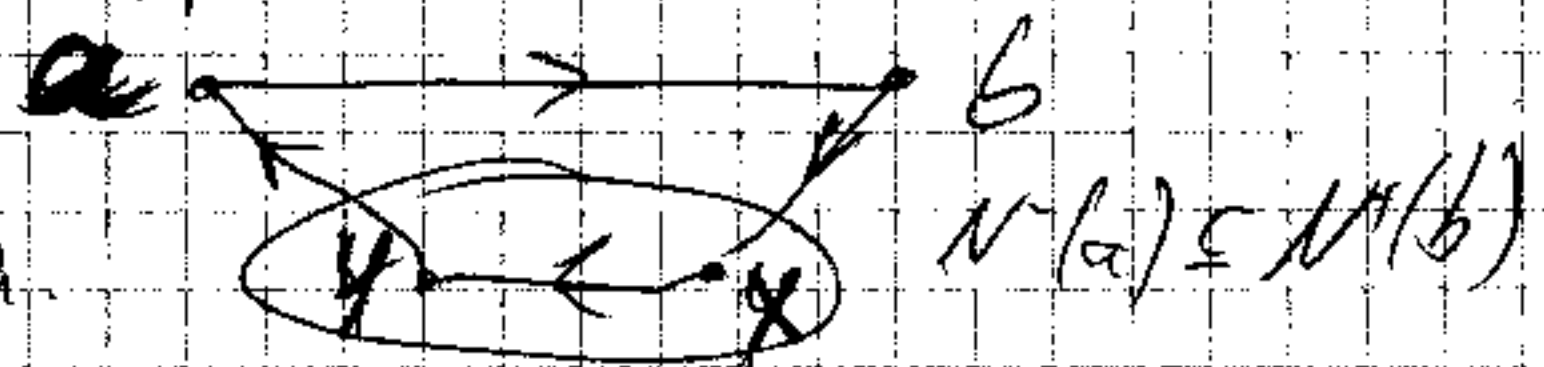
$\Rightarrow \exists x, y \in N^-(a), x \neq y \Rightarrow x, y \in N^+(b)$

Sei obda $(x, y) \in D(T)$

$\Rightarrow (a, b)$ liegt auf 4-Kreis abxya.



Turniere:
 (3 immer Bogen zw. 2 Ecken, richtungsabhängig)
 Fallunterscheidung



Aufgabe 9:

Sei T ein Baum mit $\Delta(T) \geq 2$

$p \in \mathbb{N}$, $2 \leq p \leq \Delta(T)$ und $E_p = \{x \in E(T) \mid d(x, T) \geq p\}$.

Ist der von E_p induzierte Teilgraph $T[E_p]$ der Nullgraph, so zeigen ~~man~~ Sie: $|N(E_p, T)| \geq (p-1)|E_p| + 1$

Lösung

Sei $H = T[E_p \cup N(E_p, T)] \subseteq T$.

$\Rightarrow H$ ist Wald

$$\Leftrightarrow \chi(H) = m(H) - n(H) + \mathcal{L}(H) = 0$$

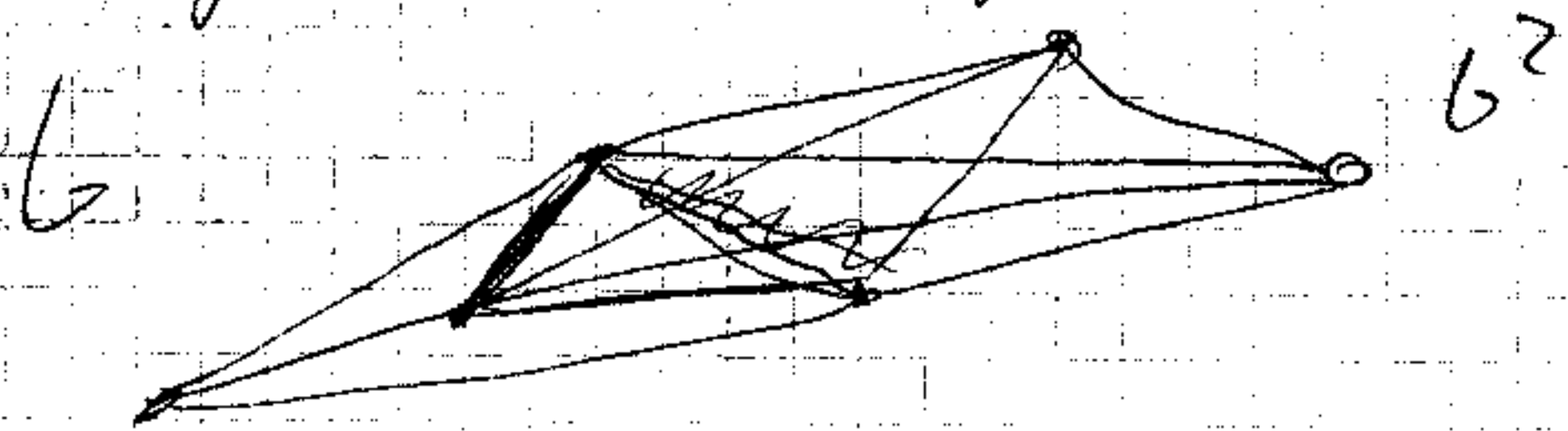
$$\begin{aligned} \Rightarrow |E_p| + |N(E_p, T)| &= |E_p \cup N(E_p, T)| = n(H) = m(H) + \mathcal{L}(H) \\ &\geq m_H(E_p, N(E_p, T)) + 1 \\ &\geq |E_p| \cdot p + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |N(E_p, T)| \geq |E_p|(p-1) + 1$$

A 10a) nicht schwer, genauer anschauen

Aufgabe 10:

Sei G ein ~~schlichter~~ Graph, so ist der ~~der~~ Potenzgraph G^2 def. durch $E(G^2) = E(G)$ und zwei Ecken sind in G^2 genau dann adjazent, wenn $d_G(a, b) \leq 2$.



a) b nicht zusammenhängend

$b \not\rightarrow \cdot \Rightarrow b = b^2$ enthält Brücke.

b) Zeigen Sie, dass für einen Baum T gerade der Ordnung $n(T)$ der Potenzgraph T^2 ein perfektes Matching besitzt.

Lösung: Induktion nach t , $n(T) = 2t$.

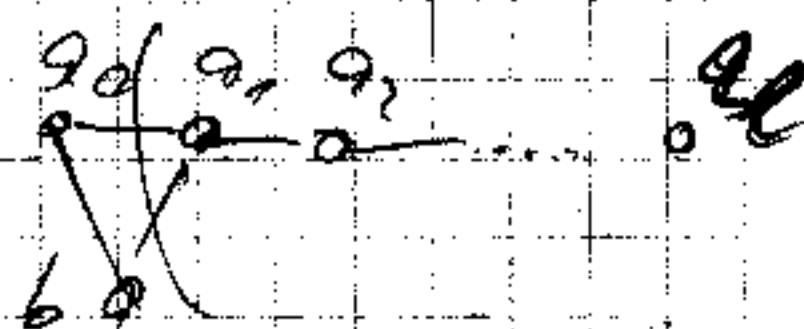
$n(T) = 2$: $T = T^2$ besitzt perf. Matching.

Ind. ann.: Für bel., aber fest gewähltes $t \in \mathbb{N}$ gilt:
Für jeden Baum der Ordnung $2t$ besitzt der Potenzgraph T^2 ein perf. Matching.

$t \mapsto t+1$: Sei T ein bel. Baum der Ordnung $2(t+1)$.

Sei $W = a_0 a_1 \dots a_t$ ein längster Weg in T .

$\Rightarrow N(a_0, T) \subseteq E(W)$ u. $N(a_0, T) = \{a_1\}$



1. Fall: $\exists b \in N(a_1, T) - E(W)$

$\Rightarrow d(b, T) = 1$, denn ang. es ex. $c \in N(b, T) - \{a_1\}$

$\Rightarrow c b a_1 \dots a_t$ ist längerer Weg als W ∇

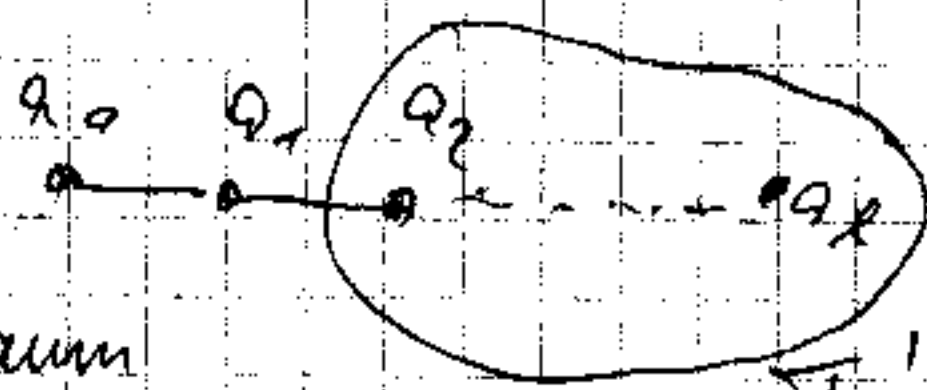
$\Rightarrow d_T(a_0, b) = 2 \Rightarrow a_0 b \in K(T^2)$

und $T - \{a_0, b\}$ ist Baum mit Ordnung $2t$

Ann. $(T)^2$ besitzt ein perfektes Matching M' .

$\Rightarrow M' \cup \{a_0 b\}$ ist perfektes Matching von T^2
($M' \subseteq K(T^2) \subseteq K(T^2)$)

2. Fall: $N(a_1, T) = \{a_0, a_2\}$



$\Rightarrow T' = T - \{a_0, a_1\}$ ist Baum

$\xRightarrow{\text{Ann.}} (T')^2$ besitzt perfektes Matching M' , da $n(T') = \text{f}$

$\Rightarrow M' \cup \{a_0 a_1\}$ ist perf. Matching von T ,
da $M' \subseteq K((T')^2) \subseteq K(T^2)$, $a_0 a_1 \in K(T) \subseteq K(T^2)$
 $\square$

Aufgabe 2:

Sei G ein einfacher Graph und $a, b \in E(G)$ nicht adjazent.
Zeigen Sie:

- a) Ist M ein max Matching von G und $a, b \notin E(M)$,
so gilt für jede Kante $k = cd \in M$: $m_G(\{a, b\}, \{c, d\}) \geq 2$.
//kurz. der Kanten von a/b zu c/d //

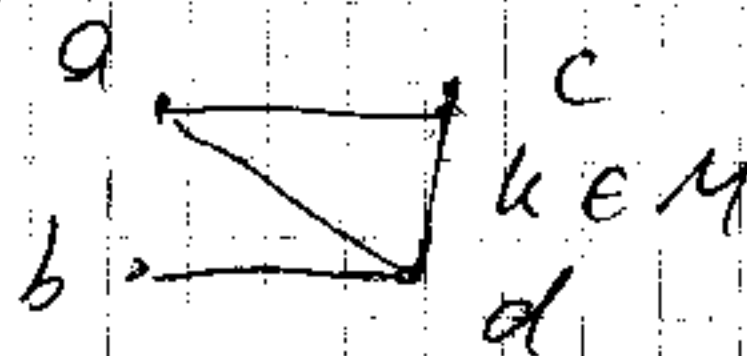
Lösung:

Ang: $\exists k = cd \in M$, so dass $m_G(\{a, b\}, \{c, d\}) \geq 3$

$\Rightarrow 0 \leq d \wedge ac, ad \in E(G)$

$\wedge m_G(\{b\}, \{c, d\}) \geq 1$

$0 \leq d \wedge bd \in E(G)$



$\Rightarrow (M - \{cd\}) \cup \{bd, ca\}$ ist größeres Matching als M . $\square$

- b) gilt $d(a, b) + d(b, b) \geq n(b) - 1$, so besitzt G genau dann ein perfektes Matching, wenn $G + ab$ ein perf. Matching besitzt.

Lösung:

Besitzt G ein perfektes Matching M , so ist M auch perfektes Matching von $G + ab$.

Sei nun M ein perfektes Matching von $G + ab$.

Falls $ab \notin M$, so ist M auch perfektes Matching von G .

Sei nun $ab \in M$. $M' = M - \{a, b\} \subseteq V(G)$

$\Rightarrow M'$ ist Matching von G und $a, b \notin E(M')$,
 $M' = \{a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_{\frac{n}{2}-1} b_{\frac{n}{2}-1}\} \quad (|M'| = \frac{n(b)}{2})$

Ang. M' sei max. Matching.

$\Rightarrow m_b(\{a, b\}, \{a_i, b_i\}) \leq 2 \quad \forall \quad 1 \leq i \leq \frac{n}{2} - 1$

$\Rightarrow d(a, b) + d(b, b) = m_b(\{a, b\}, E(G) - \{a, b\})$
 $= \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}-1} m_b(\{a, b\}, \{a_i, b_i\}) \leq \sum 2 = (\frac{n}{2} - 1) \cdot 2$

$< n - 1$ 

$\Rightarrow M'$ ist kein max. Matching

$\Rightarrow \exists$ Matching $\tilde{M}$ von G mit $|\tilde{M}| > |M'| = \frac{n}{2} - 1$

$\Rightarrow |\tilde{M}| = \frac{n}{2}$ und $\tilde{M}$ ist perfektes Matching
von G .

- Anne Hoffmann

- Sprechstunde: Do 10-11h, R2+8 Hauptg.

Übung I:

At: Ind. bzw. Div. mit Rest

Aufgabe 2 $p \geq 5$ Primzahl

$$\Rightarrow 24 \mid (p^2 - 1)$$

denn:

$$p^2 - 1 = (p+1)(p-1)$$

$\uparrow$
 $2 \mid (p+1)$

$\uparrow$
 $2 \mid (p-1)$

$$\text{d.h. } 4 \mid (p+1) \text{ oder } 4 \mid (p-1)$$

$$\Rightarrow 8 \mid (p^2 - 1)$$

$p-1, p, p+1$ sind 3 aufeinanderfolgende
ganze Zahlen

$$\text{d.h. } 3 \mid (p-1) \text{ oder } 3 \mid p \text{ oder } 3 \mid (p+1)$$

$$3 \mid (p^2 - 1)$$

$$\Rightarrow (3 \cdot 8) \mid (p^2 - 1)$$

□

Aufgabe 5: $a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ Produkt
der ersten n Primzahlen

Wenn $a = d \cdot d'$ mit $1 < d' - d < (p_n + 2)^2$

$\Rightarrow d' - d$ ist Primzahl mit $d' - d > p_n$

denn:

$$a = d \cdot d' = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

$p_i \nmid (d' - d)$ für $i = 1, \dots, n$

denn: Ang. $p_i | (d' - d)$ für ein i , $1 \leq i \leq n-2$

$$\Rightarrow p_i | d' \text{ und } p_i | d$$

$$\Rightarrow p_i^2 | dd' = a = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

aber

$$p_i \nmid (p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{i-1} \cdot p_{i+1} \cdot \dots \cdot p_n)$$

$$\Rightarrow \text{Ann. falsch, d.h. } p_i \nmid (d' - d)$$

Aber: $d' - d$ besitzt Primfaktorzerlegung
d.h. es besitzt einen kleinsten
Primfaktor $p \geq p_n + 2$

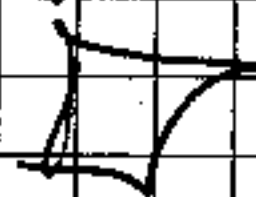
Beh 2.2:

$$p \leq \sqrt{d' - d} \Leftrightarrow p^2 \leq d' - d$$

$$\Rightarrow d' - d \geq p^2 \geq (p_n + 2)^2 \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$d' - d$ ist ~~nicht~~ Primzahl. $\Rightarrow d' - d < (p_n + 2)^2$

$$d' - d > p_n$$



zu Aufgabe 6:

$2k+1$ (ungerade)

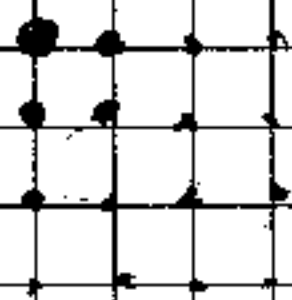
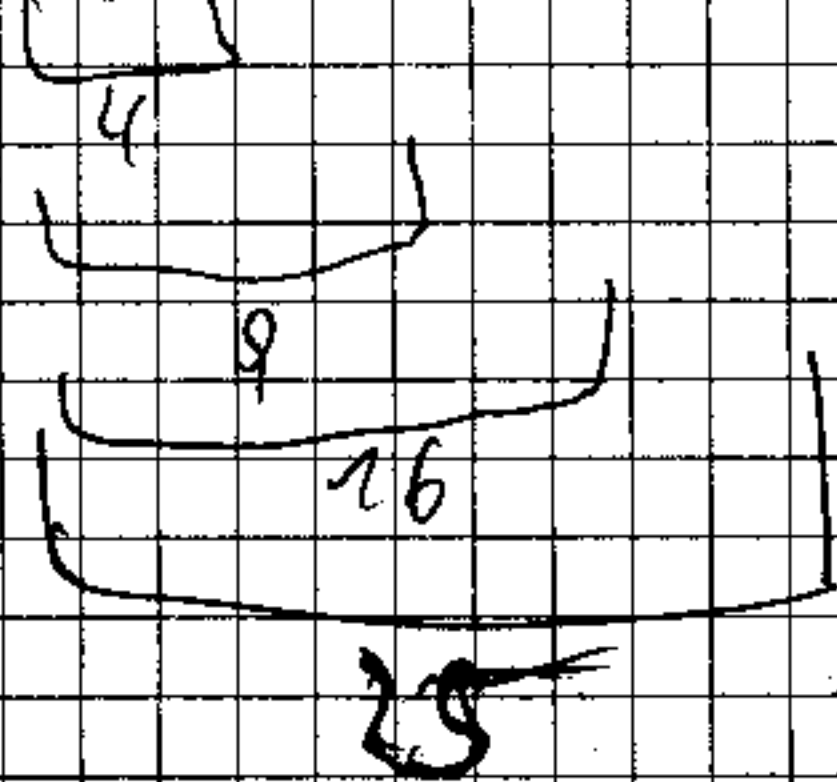
zu 4:

zeige merkt: es ex. $1 \leq i \leq n-1$
mit $a_{i+1} = a_i + 1$ per Induktion

Aufgabe 7:

a) Zeige: Jede unger. Zahl $n \geq 3$ lässt sich als
Differenz von zwei aufeinander folgenden
Quadratkahlen darstellen.

$$1+3+5+7+9+\dots$$



weil

Beweis: $n = 2k+1 = (k+1)^2 - k^2 \quad k \geq 1 \quad \square$

b) Zeige eine ungerade Zahl $n \geq 3$ ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur eine Darstellung als Differenz von zwei Quadratzahlen besitzt.

dazu: Ist $n = 2k+1$ Primzahl und
 $n = (k+1)^2 - k^2$ und weiter
 $n = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$
 $= 1, da$
 n Primzahl.

$$\Rightarrow x = y+1$$

$$\Rightarrow 2k+1 = (y+1)^2 - y^2 = 2y+1$$

" $\Leftarrow$ "

n keine Primzahl. Dann gilt $n = uv$
 mit $u, v \geq 2$

in ungerade
 u, v auch
 ungerade

$$uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \quad \text{ist 2. Darstellung}$$

$$\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} = v \geq 2 \quad (\neq 1)$$

$\Rightarrow$ weitere Darf. gefunden. $\square$

2. Übung

-4-

u2: $n \in [m!+1, m!+m]$ $n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow n = m! + k \text{ mit } 2 \leq k \leq m$$

u3:

$$10^n$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9}$$

$$\Rightarrow 10^n \equiv 1 \pmod{9} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

u5: Euklidischer Algorithmus

$$ax + by = c \quad \text{genau dann}$$

ganzzahlig lösbar, wenn $\text{ggT}(a,b) \mid c$.

4, 6 mittelschwer

7, 8 haben es in sich (Wilson)

Aufgabe 7: $\Rightarrow$ Wilson

Wilson: p ist Primzahl $\Leftrightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

p Primzahl

a) $p \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow$ es ex. kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid (n^2+1)$

b) $p \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow$ es ex. ein solches n .

[Frage: Für welche Primzahlen ex. $n \in \mathbb{Z}$,
so dass $p \mid (n^2+1)$ gilt?]

dazu:

$$a) p \equiv 3 \pmod{4} \Rightarrow p \text{ ungerade und } \frac{p-1}{2} \text{ ungerade}$$

wieso: $\frac{p-1}{2} = 2k \Leftrightarrow p-1 = 4k$
 $\Leftrightarrow p = 4k+1$
 $\Leftrightarrow p \equiv 1 \pmod{4}$

$$\Rightarrow (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)$$

Angenommen, es ex. $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid (n^2+1)$
 d.h. ~~$n^2+1 \equiv 0 \pmod{p}$~~ $n^2+1 \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow$
 $n^2 \equiv -1 \pmod{p}$

$$\Leftrightarrow (n^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

$\Leftrightarrow n^{p-1} \equiv -1 \pmod{p}$ ~~in~~
 kleinem Satz von Fermat ($n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ wenn $p \nmid n$)

$$1 \equiv (-1) \pmod{p}$$

$$\Leftrightarrow p=2; \text{ aber } p \equiv 3$$

d.h. Annahme falsch, d.h. es ex.
 kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid (n^2+1)$

$$b) p \equiv 1 \pmod{4} \Rightarrow \frac{p-1}{2} \text{ gerade}$$

$$k + (p-k) \equiv 0 \pmod{p} \Leftrightarrow k \equiv -(p-k) \pmod{p}$$

gesucht ist $n \in \mathbb{Z}$ mit $p \mid (n^2 + 1) \Leftrightarrow n^2 \equiv -1 \pmod{p}$

Beh: $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)!$ tut's.

dazu:

$$\begin{aligned}
 n^2 &\equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \left(\frac{p-1}{2}\right)! \\
 &= \left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \frac{p-1}{2} \\
 &\equiv \left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot (-1)(p-1) \cdot (-1)(p-2) \cdot \dots \cdot (-1)\left(p - \frac{p-1}{2}\right) \pmod{p} \\
 &= \left(\frac{p-1}{2}\right)! \cdot \underbrace{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}_{=1} \cdot \underbrace{(p-1)(p-2)\dots\left(p - \frac{p-1}{2}\right)}_{\text{Wilson}} \pmod{p} \\
 &\equiv (p-1)! \pmod{p} \equiv -1 \pmod{p} \\
 \Rightarrow p \mid (n^2 + 1) \text{ mit } n = \left(\frac{p-1}{2}\right)!
 \end{aligned}$$

□

Aufgabe 8: $(n, n+2)$ beide Primzahlen

$(3, 5), (5, 7), (11, 13), \dots$

$(n, n+2)$, n ungerade, sind Primzahlen

$\Leftrightarrow$

$$4 \mid (n-1)! + 1 + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

dazu:

" $\Rightarrow$ " $n, n+2$ Primzahlen

$$\begin{aligned}
 \text{Wilson: } (n-1)! + 1 &\equiv 0 \pmod{n} & \text{I} \\
 (n+1)! + 1 &\equiv 0 \pmod{n+2} & \text{II}
 \end{aligned}$$

$$\text{I} \cdot (n+2): \quad n! + 2(n-1)! + n + 2 \equiv 0 \pmod{n(n+2)} \quad | :2$$

$$2n! + 4(n-1)! + 2n + 4 \equiv 0 \pmod{n(n+2)} \quad | :2$$

DWA - 0

28.04.00

$$\text{II. } n: n(n+1)! + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$2n! + 4(n-1)! + n + 4 - n(n+1)! \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$\text{zz: } 2n! - n(n+1)! \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$\text{dazu: } 2n! - n(n+1)! = n! (2 - n(n+1))$$

$$= -n! (n^2 + n - 2) = -n! (n+2)(n-1)$$

$$\equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$\Rightarrow 4((n-1)! + 1) + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$\Leftarrow \text{jetzt gelte } 4((n-1)! + 1) + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}$$

$$n|n \text{ d.h. } n \equiv 0 \pmod{n}$$

$$\Rightarrow 4((n-1)! + 1) \equiv 0 \pmod{n}$$

$$n \text{ unger.} \Rightarrow \text{ggT}(4, n) = 1$$

$$\Rightarrow n | 4 \cdot ((n-1)! + 1) \text{ mit } \text{ggT}(4, n) = 1$$

$$\Rightarrow n | ((n-1)! + 1), \text{ oder } (n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

Wilson $\Rightarrow n$ Primzahl!

$$4((n-1)! + 1) + n = 2(2((n-1)! + 1) + n + 2) \equiv 0 \pmod{n+2}$$

$$\Rightarrow 4(n+1)! + 2 \equiv 0 \pmod{n+2} \quad | : n(n+1)$$

$$\Rightarrow n(n+1)(n-1)! \cdot 4 + 2n(n+1) \equiv 0 \pmod{n+2}$$

$x \equiv 0 \pmod{a}$
 $\downarrow$
 $x \equiv 0 \pmod{a}$
 $\wedge$
 $x \equiv 0 \pmod{b}$

$$[Wilson (n+2): (n+1)! + 1 \equiv 0 \pmod{(n+2)}]$$

$$\Leftrightarrow 4(n+1)! + \underbrace{2n^2 + 2n - 4 + 4}_{2(n+2)(n-1)} \equiv 0 \pmod{(n+2)}$$

$$2(n+2)(n-1) \equiv 0 \pmod{(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow 4((n+1)! + 1) \equiv 0 \pmod{(n+2)}$$

$$\text{ggT}(4, n+2) = 1$$

$$\Rightarrow (n+1)! + 1 \equiv 0 \pmod{(n+2)}$$

Wilson: (n+2) Primzahl.

$$\text{zu i): } \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} = \frac{(n+1) \cdot \dots \cdot (2n)}{n!} \in \mathbb{N} \quad \square$$

ii) p Primzahl mit $n < p \leq 2n$

// p taucht hier oben in dem Produkt auf

$$\rightarrow p \mid \binom{2n}{n} \Leftrightarrow \binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod{p^2}$$

$$p^2 \nmid \binom{2n}{n}$$

ub: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ p Primz.

b) Kl. Fermat $\Rightarrow n^p \equiv n \pmod{p}$

a) $(a+b)^p = \sum_{i=0}^p \binom{p}{i} a^i b^{p-i}$

$$\binom{p}{i} \equiv ? \pmod{p} \quad 0 \leq i \leq p.$$

Aufg. 1) $\{1, \dots, n\}$ $f_{n,0} = 1$ (leere Menge)

$f_{n,k}$ bezeichne die Anzahl (aller) der Untermengen von $\{1, \dots, n\}$ der Größe k , die die kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthält.

$\{1, 2, 3, 4\}$

$K=2$: $\{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$

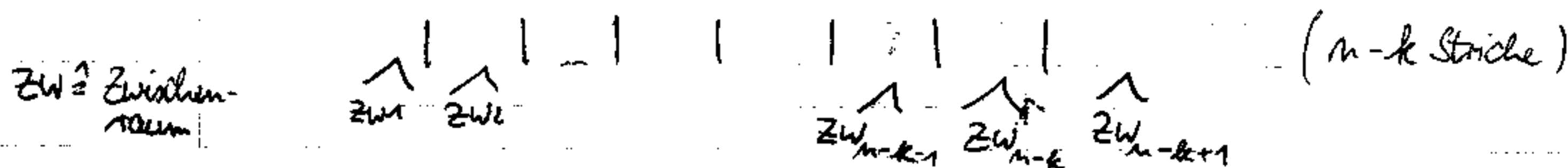
a) $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k} = C(n-k+1, k)$

dazu: Sei $A \subseteq \{1, \dots, n\}$ mit Größe k
ohne ein Paar aufeinanderfolgender Zahlen

Setze $B := \{1, \dots, n\} \setminus A$ $|B| = n-k$

schöne kombinator. Trick
(mit Balken)

Stelle B wie folgt dar:



k Elemente auf $n-k+1$ Zwischenräume verteilen

$\Rightarrow \binom{n-k+1}{k}$ Möglichkeiten ex. für A $\square$

b) per vollst. Induktion

Aufg 2) $M_m = \{(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3)\}$

$\overline{F}_i$ Mengen mit

i) $\overline{F}_1 \cup \overline{F}_2 \cup \overline{F}_3 = \{1, \dots, m\}$, $\overline{F}_i \cap \overline{F}_j = \emptyset$ $i \neq j$

ii) $\min \overline{F}_1 \leq \min \overline{F}_2 \leq \min \overline{F}_3$

$\min \overline{F}_i := m+1$, wenn $\overline{F}_i = \emptyset$

Bestimme $|M_m|$

i+ii) $\Rightarrow 1 \in \overline{F}_1$,

gilt $\{1, \dots, m\} = \overline{F}_1 \Rightarrow \overline{F}_2 = \overline{F}_3 = \emptyset$

Jetzt sei $|\overline{F}_1| = k$, mit $1 \leq k \leq m-1$

i) $\Rightarrow$ ist $\overline{F}_2$ gewählt, so liegt $\overline{F}_3$ fest

$1 \in \overline{F}_1$, $|\overline{F}_1| = k$, $j = \min \{ \{1, \dots, m\} \setminus \overline{F}_1 \}$ liegt in $\overline{F}_2$

$\Rightarrow |\overline{F}_2| \geq 1$

D.h.: $m-k-1$ Elemente können noch frei auf $\overline{F}_2$ und $\overline{F}_3$ verteilt werden

Dies liefert $\binom{m-k-1}{i-1}$ Möglichkeiten für $\overline{F}_2$, wenn

$\overline{F}_2$ genau i Elemente enthält

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m-k} \binom{m-k-1}{i-1} = \sum_{s=0}^{m-k-1} \binom{m-k-1}{s} = 2^{m-k-1}$$

$\Rightarrow 2^{m-k-1}$ Möglichkeiten für die Wahl von $\overline{F}_2$, wenn $|\overline{F}_1| = k$

Wieviele Möglichkeiten gibt es für $\overline{F}_1$?

$\binom{m-1}{k-1}$, wenn $|\overline{F}_1| = k$

$\overline{F}_1$ gegeben

da 1
immer drin
 $\rightarrow$ dann noch
(k-1) Elemente
übrig die rein müssen

$$\Rightarrow |M_m| = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{m-1}{k-1} 2^{m-k-1} + 1 = \sum_{s=k-1}^{m-2} \binom{m-1}{s} 2^{m-s-2} + 1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{s=0}^{m-2} \binom{m-1}{s} 2^{m-s-1} \right] + 1$$

$$= \frac{1}{2} \left[\sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} 2^{m-s-1} \right] - \binom{m-1}{m-1} 2^{m-m-1} + 1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{m-1} \binom{m-1}{s} 2^{m-s-1} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{(1+2)^{m-1}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^{m-1} + 1}{2}$$

Aufg 3) vollst. Induktion (über $n+k$)

Aufg 4) $S_0 = 1$, S_n ist die Anzahl aller Abbildungen

$$f: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$$

mit der Eigenschaft, daß f mit einem Wert i auch alle Werte j mit $1 \leq j \leq i$ annimmt.

a)
$$S_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S_{n-k}$$

dazu: $\mathcal{S}_n$ sei Menge aller Abbildungen mit der gewünschten Eigenschaft $|\mathcal{S}_n| = S_n$

Klassifiziere die Abbildungen in $\mathcal{S}_n$ nach der ~~Mächtigkeit~~ Mächtigkeit des Urbildes der 1:

$$k\mathcal{S}_n = \{f \in \mathcal{S}_n : |f^{-1}(1)| = k\}$$

$f \in k\mathcal{S}_n$, dann ex $x_1, \dots, x_k \in \{1, \dots, n\}$ mit
 $f(x_i) = 1 \quad i = 1, \dots, k$

Es gibt $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, diese x_i zu wählen. (k Elemente aus n auswählen)

Durch die Bedingung, daß f mit dem Wert i auch jedes j mit $2 \leq j \leq i$ annimmt gilt

$$\begin{aligned} & \max \{j \in \{2, \dots, n\} : f^{-1}(j) \neq \emptyset\} \quad (\Rightarrow \text{Max. Wert den } f \text{ noch annimmt}) \\ &= \max_{\text{Bildbereich}} f(\{1, \dots, n\}) \end{aligned}$$

$\leq n-k+1$, da schon k Elemente auf die 1 abgebildet werden!

D.h., die Anzahl der Möglichkeiten, die restl. ^{$n-k$} Elemente in die Menge $\{2, \dots, n\}$ abzubilden entspricht $\boxed{S_{n-k}}$, da die $n-k$ Elemente auf maximal $n-k$ verschiedenen

○ Elemente aus $\underbrace{\{2, \dots, n-k+1\}}_{n-k}$ abgebildet werden können.

$$\Rightarrow S_n = |\mathcal{S}_n| = \left| \bigcup_{k=1}^n k\mathcal{S}_n \right| = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \boxed{S_{n-k}}$$

$$b) S_n = \sum_{k=1}^n k! S_{n,k}$$

dazu: I_n

Klassifiziere die Abbildungen nach Maximum.

$$I_{n,i} = \{ f \in I_n : \max_{1 \leq j \leq n} f(j) = i \} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$\text{Es gilt: } I_n = \bigcup_{i=1}^n I_{n,i} \quad I_{n,i} \cap I_{n,j} = \emptyset \text{ für } i \neq j$$

$$f \in I_{n,i} \Rightarrow f(\{1, \dots, n\}) = \{1, \dots, i\}$$

D.h. f bildet eine n -elementige Menge surjektiv in eine i -element.

$$\text{Menge ab. } |I_{n,i}| = |\text{Surj}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, i\})| = i! S_{n,i} \quad \text{Satz 5.18}$$

$$\Rightarrow S_n = |I_n| = \left| \bigcup_{i=1}^n I_{n,i} \right| = \sum_{i=1}^n |I_{n,i}| = \sum_{i=1}^n i! S_{n,i}$$

Aufg 5) $n=4$ — kein Summand durch 3 teilbar

$$4 = \underline{1+1+1+1} = \underline{1+1+2} = \underline{2+2} = \underline{1+3}$$

ohne Berücksichtigung der Reihenfolge!

Dazu: $p(n)$ sei Anzahl aller Zahlpart. von n .

ohne Bericks. d. Reihenfolge

$p_3(n)$ sei Anzahl aller Zahlpart. von n

deren Summanden nicht durch 3 teilbar sind

$p_{\leq 2}(n)$ sei Anzahl der Zahlpart. von n

in denen kein Summand mehr als zweimal auftritt

Peris z.z. $p_3(n) = p_{\leq 2}(n)$

Inklusion/
Exklusion $Z := \{ \text{Zahlpart. von } n \} \quad p(n) = |Z|$

$$B_i := \{ u \text{ von } n, \text{ die } 3i \text{ als Summanden enthalten} \}$$

$$C_i := \{ u \text{ von } n, \text{ in denen } i \text{ dreimal als Summand auftritt} \}$$

$$p_3(n) = |Z - \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i|$$

$$p_{\leq 2}(n) = |Z - \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i|$$

1. Schritt:

$$|B_i| = |C_i|$$

(Zählpart.) $zP \in B_i \Rightarrow zP$ enthält den Summanden $3i$

$$zP: a+b+\dots+3i+\dots=n$$

$$\xrightarrow{\text{Bijektion}} \text{von } B_i \text{ in } C_i$$

$$C_i \text{ in } B_i$$

$$zP^*: a+b+\dots+i+i+i+\dots=n$$

$$zP^* \in C_i$$

$$\Rightarrow |B_i| = |C_i| \Rightarrow \pi = q$$

Bijektion
ex.

Prinzip der Inklusion - Exklusion

$$p_3(n) = |Z - \bigcup_{i=1}^r B_i| = |Z| - \sum_{i=1}^r |B_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq r} |B_i \cap B_j|$$

$$- \dots + (-1)^{r-1} |B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_r| = p(n) - (p(n-3) + \dots + p(n-3r)) + \dots$$

$$p_{\leq 2}(n) = |Z - \bigcup_{i=1}^r C_i| = |Z| - \sum_{i=1}^r |C_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq r} |C_i \cap C_j|$$

$$- \dots + (-1)^{r-1} |C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_r|$$

$$= p(n) - (p(n-3) + \dots + p(n-3r)) + \dots$$

$$\text{letztendlich, } |B_i| = |C_i| \Rightarrow |Z - \bigcup_{i=1}^r B_i| = |Z - \bigcup_{i=1}^r C_i|$$

$$\underline{\underline{p_3(n)}} = \underline{\underline{p_{\leq 2}(n)}}$$

□

Aufg 6)

5.21

Aufg 7) $\varphi(n)$ Anzahl der Zahlen $\leq n-1$, die relativ prim zu n sind, d.h. solche $1 \leq m \leq n-1$ mit $\text{ggT}(m, n) = 1$

a) Annahme von Satz 5.21 $\nmid$ für Teilbarkeit

b) Annahme ex^{ist} 2 Primfaktoren von n und a ist nicht Quadrat einer Primzahl
 $\Rightarrow n = p \cdot q, \varphi(n) \mid n-1$
 Satz 5.21 $\varphi(n) = \dots \Rightarrow p = q \nmid$ zu a)

$$\frac{n-1}{\varphi(n)} \in \mathbb{N}$$

Aufg 8) $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ $\pi(x)$: Anzahl Primzahl $\leq x$

$$\frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(k)}{k} + \frac{2k}{x} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

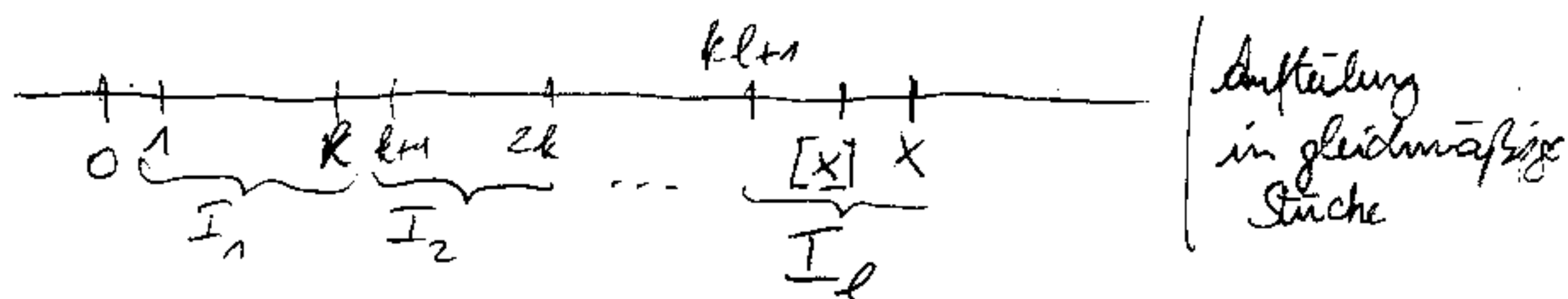
Gaußklammer

dazu $[x] = \text{größte natürliche Zahl } \leq x$, $k \in \mathbb{N}$

$$[x] = l \cdot k + r \quad \text{mit } 0 \leq r < k$$

Intervalle: $I_s = \{k \cdot s + 1, \dots, k \cdot s + k\}$ für $0 \leq s \leq l-1$

$$I_l = \{kl + 1, \dots, kl + r\}$$



In I_1 liegen max k Primzahlen

In I_l liegen max r "

Wie sieht dies aus in I_s mit $2 \leq s \leq l-1$

$$m \in I_s \Rightarrow m = k \cdot s + u \quad \text{mit } 1 \leq u \leq k$$

$$\text{ggT}(m, k) = 1$$

$\Rightarrow m$ und k sind teilerfremd (relativ prim)

$$k \cdot s + u \Rightarrow k \text{ und } u \text{ sind u}$$

umgekehrt: gilt $\text{ggT}(u, k) = 1$

$$\Rightarrow \text{ggT}(m, k) = 1$$

$$p \text{ Primzahl} \Rightarrow \text{ggT}(p, k) = 1$$

In I_s ex nach (*) $\varphi(k)$ relativ prime Zahlen zu k

$\Rightarrow$ in I_s ex max $\varphi(k)$ Primzahlen

$$\Rightarrow \pi(x) \leq \underbrace{k}_{\text{in } I_1} + \underbrace{r}_{\text{in } I_l} + \underbrace{(l-1)\varphi(k)}_{\text{in übrigen Intervallen}} \leq 2k + \frac{x}{k} \varphi(k)$$

$\Rightarrow$ Beh.

