Professor Dr. H. Pahlings, Lehrstuhl D für Mathematik
Professor Dr. L. Volkmann, Lehrstuhl II für Mathematik

Aachen, den 27. 6. 2000

Vordiplomklausur Mathematik II für Informatiker

Die schriftlichen Vordiplomprüfungen im Fach Mathematik II für Studenten der Fachrichtung Informatik finden

am Mittwoch, dem 20. 9. 2000, um 8.30 Uhr

statt. Die Aufteilung der Teilnehmer auf die Hörsäle wird spätestens am Dienstag, dem 19. 9. 00, um 9.00 Uhr durch Aushang in beiden Lehrstühlen bekanntgegeben. Die Klausur dauert 240 Minuten.

Der **Klausurstoff** ist der gesamte Stoff der Vorlesungen Lineare Algebra I des Wintersemesters 1999/2000 und Diskrete Strukturen des Sommersemesters 2000 sowie der zugehörigen Übungen.

Außer dem Buch “Diskrete Strukturen” (ABM 27) sind **keine Hilfsmittel** zugelassen, insbesondere keine schriftlichen Aufzeichnungen, Aufgabensammlungen oder elektronischen Rechengeräte.

Die **Klausurbögen** sowie das gesamte Konzeptpapier werden gestellt. Die Teilnehmer brauchen also nur einen Schreibstift, ihren Studentenausweis, einen Lichtbildausweis und, falls gewünscht, das Buch “Diskrete Strukturen” mitzubringen. Es darf nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift geschrieben werden.

Die Aufgaben sind eingeteilt in die beiden Gebiete Lineare Algebra I und Diskrete Strukturen. Zum Bestehen der Klausur müssen in jedem dieser Teilgebiete mindestens 17 Punkte und insgesamt mindestens 50 Punkte erreicht werden. Die Zensuren richten sich nach der Anzahl der insgesamt erreichten Punkte. Sie werden wie folgt festgelegt: 50 bis 59 Punkte = ausreichend, 60 bis 75 Punkte = befriedigend, 76 bis 89 Punkte = gut, 90 oder mehr Punkte = sehr gut.

Die **Termine** für den Aushang der Ergebnisse und für eine Klausureinsicht werden bei der Klausur bekanntgegeben.

Die mündlichen **Zusatzprüfungen** für Prüfungsteilnehmer, die als Wiederholer ein nicht ausreichendes Klausurergebnis erreicht haben, finden voraussichtlich Mitte Oktober statt.

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 23.06.2000

1. Übungsscheinklausur Diskrete Strukturen SS 2000

---

1) (4 Punkte)

   Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m,n) = 1$ gilt $(m+n)|mn$?

2) (4 Punkte)

   Man bestimme alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ mit

$$2 \cdot (n-2)! + \binom{n}{2} - 2 \equiv 0 \pmod{n}$$

3) (4 Punkte)

   Für welche $n \in \mathbb{N}$ läßt sich die Folge $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ durch einen Graphen realisieren?

4) (4 Punkte)

   Es sei G ein bipartiter Graph mit der Bipartition A, B. Man zeige: Ist $|A| = |B| \geq 2$, und gilt für alle $S \subseteq A$ mit $S \neq \emptyset, A$ die Ungleichung

$$|S| + 1 \leq |N(S,G)|,$$

   so gehört jede Kante von G zu einem perfekten Matching.

5) (4 Punkte)

   Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

   a) Wieviele Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es, so daß $\{1,2\} \not\subseteq A$ gilt?
      Ist die Anzahl dieser Teilmengen durch 3 teilbar?

   b) Wieviele $(n-2)$-elementige Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es,
      so daß $\{1,2\} \not\subseteq A$ gilt?
      Gibt es mehr oder weniger als $2n$ solcher Teilmengen?

Lehrstuhl II für Mathematik
der RWTH Aachen
Prof. Dr. L. Volkmann

Aachen, den 07.07.2000

2. Übungsscheinklausur Diskrete Strukturen SS 2000

Name: ______________ Vorname: ______________ Matr.Nr.: ______________

Bestanden: ja ( ) nein ( )	1)	2)	3)	4)	5)	Σ
Punkte:	( )	( )	( )	( )	( )	( )

---

1) (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für alle $m, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m + n \leq \mathrm{ggT}(m,n) + \mathrm{kgV}(m,n)$$

Für welche m, n gilt Gleichheit?

2) (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl. Man bestimme alle Restklassen $[x] = [x]_p$ modulo p mit

$$[x][x] = [1].$$

3) (4 Punkte)

Sei G ein p-partiter Graph, $p \geq 2$, mit der Partition $E_1, E_2, \ldots, E_p$ und sei $|E_1| \leq |E_2| \leq \ldots \leq |E_p|$. Zeigen Sie:

a) Falls für jede Menge $S \subseteq E_p$ die Ungleichung $|S| \leq |N(S,G)|$ gilt, so existiert ein Matching M von G mit $|M| = |E_p|$.

b) Aus $(p-1)|E_p| \leq |N(E_p, G)|$ folgt $|E_1| = |E_2| = \ldots = |E_p|$.

4) (4 Punkte)

Es sei G ein schlichter und r-regulärer Graph gerader Ordnung $n \geq 4$. Man zeige, dass G oder sein Komplementärgraph $\bar{G}$ Hamiltonsch ist.

5) (4 Punkte)

Es sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wieviele geordnete k-Tupel $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in A^k$ existieren, die genau t-mal die eins enthalten für $0 \leq t \leq k$?

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

1. Übung Diskrete Strukturen

Themen: Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Ist $n \in \mathbb{N}$, so zeige man:
a) $3|(n^3 + 2n)$ b) $5|(n^5 + 4n)$
c) $5|(n^4 - 1) \Leftrightarrow 5 \nmid n$

Aufgabe 2.
Ist $p \geq 5$ eine Primzahl, so gilt $24|(p^2 - 1)$.

Aufgabe 3.
Es sei $f_1 = f_2 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ für $n \geq 3$ (Fibonacci-Folge). Für $n \in \mathbb{N}$ zeige man:

$$ggT(f_n, f_{n+1}) = 1$$

Aufgabe 4.
Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Man zeige, daß unter n ganzen Zahlen a_i mit $2 \leq a_i \leq 2n - 1$ ein Paar a_s, a_t existiert mit $ggT(a_s, a_t) = 1$.

Aufgabe 5.
Es sei $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ das Produkt der ersten n Primzahlen. Man zeige:
Ist $a = dd'$ mit $1 < d' - d < (p_n + 2)^2$, so ist $d' - d$ eine Primzahl mit $d' - d > p_n$.

Aufgabe 6.
Man zeige: Das Quadrat einer ungeraden Zahl läßt bei Division durch 8 den Rest 1.

Aufgabe 7.

a) Man zeige: Jede ungerade Zahl $n \geq 3$ läßt sich als Differenz von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen darstellen.

b) Man zeige: Eine ungerade Zahl $n \geq 3$ ist genau dann eine Primzahl, wenn sie nur eine Darstellung als Differenz von zwei Quadratzahlen besitzt.

In der Kongruenzrechnung spielt neben dem Satz von Euler-Fermat auch der Satz von Wilson (*John Wilson* (1741 - 1793)) eine wichtige Rolle. Wir werden dieses Ergebnis im folgenden aus einem interessanten "Partnerlemma" für Kongruenzen herleiten.

Hilfssatz 2.11 (Partnerlemma) Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Betrachten wir die Menge $M_p = \{2, 3, 4, \ldots, p-3, p-2\}$, so existiert zu jeder Zahl $a \in M_p$ genau ein $a' \in M_p$ mit $[aa']_p = [1]_p$ und $a \neq a'$.

Beweis. Wir setzen $[x]_p = [x]$. Da $[a] \neq [0]$ modulo p, existiert nach Satz 2.11 eine Restklasse $[a']$ mit $[aa'] = [1]$, wobei wir o.B.d.A. $0 \leq a' < p$ voraussetzen dürfen. Natürlich gilt weder $a' = 0$ noch $a' = 1$. Der Fall $a' = p-1$ ist aber auch unmöglich, denn aus $[a(p-1)] = [1]$ würde $p|(a+1)$ folgen, was wegen $a \leq p-2$ nicht geht. Mithin gilt sogar $a' \in M_p$. Gäbe es ein weiteres Element $c \in M_p$ mit $[ac] = [1]$, so würde p ein Teiler von $a' - c$ sein, was auch nicht möglich ist.
Wäre $a' = a$, so würde $[a^2 - 1] = [(a-1)(a+1)] = [0]$ gelten. Dies hätte nach dem Fundamentallemma (Folgerung 2.1) $p|(a-1)$ oder $p|(a+1)$ zur Folge. Da beide Fälle zum Widerspruch führen, ist das Partnerlemma bewiesen. □

Satz 2.16 Ist p eine Primzahl, so gilt $[(p-2)!]_p = [1]_p$.

Beweis Für $p = 2, 3$ ist die Behauptung unmittelbar klar. Ist $p \geq 5$, so lassen sich aufgrund des Partnerlemmas die $(p-3)$ Faktoren $2, 3, \ldots, p-2$ im Produkt $(p-2)!$ so zu Paaren a, a' zusammenfassen, daß jeweils $[aa']_p = [1]_p$ gilt. Schreiben wir $(p-2)!$ als Produkt dieser $\frac{1}{2}(p-3)$ Paarprodukte aa', so folgt das gewünschte Ergebnis. □

Satz 2.17 (Wilson, 1770) Es sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Die Zahl p ist genau dann eine Primzahl, wenn $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ gilt.

Beweis. Ist p eine Primzahl, so folgt wegen $[p-1]_p = [-1]_p$ aus Satz 2.16 unmittelbar $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.
Gilt umgekehrt $p|((p-1)!+1)$, und ist d ein Teiler von p mit $1 \leq d < p$, so folgt $d|(p-1)!$ Daraus ergibt sich $d|1$, also $d = 1$. Daher ist p eine Primzahl. □

Der Wilsonsche Satz wurde zuerst von *Edward Waring* (1736 - 1798) im Jahre 1770 veröffentlicht, der diesen Satz Wilson zuschrieb. Er soll aber lange zuvor schon *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646 - 1716) bekannt gewesen sein.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

2. Übung Diskrete Strukturen

Themen: Zahlentheorie

Aufgabe 1. Es seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

a) Gilt $a|c$ und $b|c$ mit $\mathrm{ggT}(a, b) = 1$, so gilt $(ab)|c$;

b) $\mathrm{ggT}(a + b, a - b) \geq \mathrm{ggT}(a, b)$;

c) Sind $a, b > 0$, so gilt $\mathrm{ggT}(a, b)|\ \mathrm{kgV}(a, b)$.

Aufgabe 2. Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$. Wieviele Primzahlen existieren in dem abgeschlossenen Intervall $[m! + 2, m! + m]$?

Aufgabe 3. Beweisen Sie den Quersummentest für 3 und 9:
Es sei $A = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$ und $S = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$ mit $0 \leq a_i \leq 9$. Dann gilt
a) $A \equiv S \pmod 3$, und b) $A \equiv S \pmod 9$.

Aufgabe 4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl mit $n < p \leq 2n$. Zeigen Sie, daß gilt

$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod p,$$

aber

$$\binom{2n}{n} \not\equiv 0 \pmod {p^2}.$$

Aufgabe 5. Sind die folgenden Gleichungen mit $x, y \in \mathbb{Z}$ lösbar? Wenn ja, bestimmen Sie eine Lösung.
a) $481x + 299y = 13$; b) $301x + 129y = 27$; c) $297x + 189y = 23$.

Aufgabe 6. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und p eine Primzahl. Zeigen Sie $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
a) über den Binomischen Lehrsatz, b) über den kleinen Satz von Fermat.

Aufgabe 7. Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Gilt $p \equiv 3 \pmod 4$, so existiert kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $p|(n^2 + 1)$.

b) Gilt $p \equiv 1 \pmod 4$, so existieren solche n.

Aufgabe 8. Zeigen Sie, daß n und $n + 2$, mit $n \geq 2$ ungerade, genau dann Primzahlen sind (sog. Primzahlzwilling), wenn gilt

$$4((n-1)! + 1) + n \equiv 0 \pmod{n(n+2)}.$$

Information:

Die Termine für die Diskussionsstunden sind:

Herr Christoph Schmitz,	Mi. 12.25-13.55 Uhr,	SG 23;
Frau Isabel Ribeiro	Mi. 15.45-17.15 Uhr,	SG 23.

Die Diskussionsstunden beginnen am 03.05.2000.

Die Termine für Sprechstunden sind:

Frau Miranca Fischermann,	nach Vereinbarung,	SG 21a;
Herr Arne Hoffmann,	Do. 10.00-11.00 Uhr,	Raum 218 Hauptgebäude.

Die Übungsblätter gibt es auch im Internet auf der Seite
www.math2.rwth–aachen.de.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

3. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Sei G ein schlichter, zusammenhängender und nicht vollständiger Graph der Ordnung ≥ 3. Man zeige, daß es 3 verschiedene Ecken $a, b, c \in E(G)$ gibt mit $ab, bc \in K(G)$ aber $ac \notin K(G)$.

Aufgabe 2. Sei G ein schlichter Graph ohne Kreise der Länge 3. Man zeige: $m(G) \leq (\frac{n(G)}{2})^2$.

Aufgabe 3. Beweisen oder widerlegen Sie den folgenden Satz:
Seien G ein schlichter Graph, $a, b \in E(G)$ mit $a \neq b$ und C ein Kreis in G durch a und b minimaler Länge. Seien W_1 und W_2 die Wege von a nach b mit $K(W_1) \cup K(W_2) = K(C)$. Dann gilt: $d(a, b) = \min\{L(W_1), L(W_2)\}$.

Aufgabe 4. Sei G ein zusammenhängender Graph der Ordnung ≥ 2. Man zeige:
a) $\kappa(G - a) \leq d(a, G)$ für jede Ecke a aus G.
b) Ist $d(a, G)$ gerade für jede Ecke a aus G, so gilt $2\kappa(G - a) \leq d(a, G)$ für jede Ecke a.

Aufgabe 5. Sei G ein schlichter Graph mit $\kappa = \kappa(G)$ vollständigen Komponenten und sei $n(G) \equiv r \pmod{\kappa}$ mit $0 \leq r < \kappa$. Man zeige:

$$m(G) \geq \tfrac{1}{2\kappa}(n - r)(n + r - \kappa).$$

Aufgabe 6. Sei G ein schlichter Graph der Ordnung n, $q \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq q \leq n$ und $\delta(G) \geq \lfloor \frac{n}{q} \rfloor$. Man zeige, daß $\kappa(G) \leq q - 1$.

Aufgabe 7. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung n mit $\delta(G) \geq 2$. Besitzt G eine Brücke, so zeige man: $2m(G) \leq (n - 3)(n - 4) + 8$.

Aufgabe 8. Untersuchen Sie, welche der Folgen als Gradsequenzen realisierbar sind, und welche sich sogar durch schlichte Graphen realisieren lassen.
a) $1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 7$
b) $1, 2, 3, \ldots, n$
c) $1, 1, 2, 3, \ldots, n - 1 \quad (n \geq 2)$
d) $1, 1, 2, 4, \ldots, 2^{n-3}, 2^{n-2} \quad (n \geq 2)$

Aufgabe 9. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph und seien alle Kreise in G kantendisjunkt (G heißt dann Kaktusgraph). Zeigen Sie: Sind a und b zwei beliebige Ecken aus G mit $d_G(a, b) = \mathrm{dm}(G)$, so gilt $\max\{d(a, G), d(b, G)\} \leq 2$.

Aufgabe 10. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit $\mathrm{dm}(G) \geq 3$. Zeigen Sie: $\mathrm{dm}(G) \leq n(G) - 2\delta(G) + 1$.

Aufgabe 11. Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit $n(G) = 2p$, $p \in \mathbb{N}$, welcher p paarweise nicht inzidente Brücken enthält (d.h., die Brücken bilden ein perfektes Matching von G). Zeigen Sie:

$$m(G) \leq \binom{p+1}{2}.$$

Geben Sie für allgemeines p ein Beispiel mit $m(G) = \binom{p+1}{2}$ an.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

4. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Sei G ein Graph und $x \in E(G)$ beliebig mit $d(x, G) \geq 1$. Zeigen Sie, daß ein maximales Matching M existiert mit $x \in E(M)$.

Aufgabe 2. Sei G ein schlichter Graph und $a, b \in E(G)$ nicht adjazent. Zeigen Sie:
a) Ist M ein maximales Matching von G mit $a, b \notin E(M)$, so gilt für jede Kante $k = cd \in M$: $m_G(\{a, b\}, \{c, d\}) \leq 2$.
b) Gilt $d(a, G) + d(b, G) \geq n(G) - 1$, so besitzt G genau dann ein perfektes Matching, wenn $G + ab$ ein perfektes Matching besitzt.

Aufgabe 3. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B. Zeigen Sie, daß ein Matching M von G existiert mit $|M| \geq \min\{|A|, |B|, 2\delta(G)\}$.

Aufgabe 4. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:
a) Es existiert eine Menge $W = \{P_a | a \in A\}$ bestehend aus $|A|$ eckendisjunkten Wegen P_a der Länge zwei, so daß $d(a, P_a) = 2$ für jede Ecke $a \in A$.
b) Für alle Teilmengen $S \subseteq A$ gilt $|N(S, G)| \geq 2|S|$.

Aufgabe 5. Seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Ecken eines n-Turnieres T_n. Beweisen Sie:
a) $\Sigma_{i=1}^{p} d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2}$ für alle $1 \leq p \leq n$.
b) Ist T_n stark zusammenhängend mit $n \geq 3$, so gilt $\Sigma_{i=1}^{p} d^+(x_i, T_n) \geq \binom{p}{2} + 1$ für alle $1 \leq p \leq n - 1$.

Aufgabe 6. Es sei T ein Turnier mit $n(T) \geq 4$. Zeigen Sie:
a) Es existieren höchstens 3 Ecken x mit $d^+(x, T) = 1$.
b) Ist T stark zusammenhängend, so gibt es höchstens 2 Ecken x mit $d^+(x, T) = 1$.

Aufgabe 7. Sei T ein p-reguläres Turnier ($d^+(x, T) = d^-(x, T) = p$ für jedes $x \in E(T)$) mit $n(T) \geq 5$. Zeigen Sie, daß jeder Bogen von T auf einem orientierten Kreis der Länge 3 und auf einem orientierten Kreis der Länge 4 liegt.

Aufgabe 8. Sei T_n ein stark zusammenhängendes Turnier mit $n \geq 3$. Zeigen Sie, daß T_n mindestens $n - 2$ verschiedene 3-Kreise enthält.

Aufgabe 9. Sei T ein Baum mit $\Delta(T) \geq 2$, $p \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq p \leq \Delta(T)$ und $E_p = \{x \in E(T) \mid d(x, T) \geq p\}$. Ist der von E_p induzierte Teilgraph $T[E_p]$ ein Nullgraph, so zeigen Sie $|N(E_p, T)| \geq (p - 1)|E_p| + 1$.

Aufgabe 10.
Definition: Der *Potenzgraph* G^2 eines schlichten Graphen G besteht aus der Eckenmenge $E(G)$, und zwei verschiedene Ecken a und b sind genau dann adjazent in G^2, wenn $d_G(a, b) \leq 2$ gilt.
a) Zeigen Sie, daß für einen schlichten Graphen G mit $n(G) \geq 3$ der Potenzgraph G^2 keine Brücke enthält.
b) Zeigen Sie, daß für einen Baum T mit gerader Ordnung $n(T)$ der Potenzgraph T^2 ein perfektes Matching besitzt.
(Folglich gilt b) auch für beliebigen schlichten Graphen G.)

Aufgabe 11. Sei G ein zusammenhängender Graph und $a \in E(G)$ beliebig aber fest gewählt. Zeigen Sie, daß es ein Gerüst T von G gibt mit $d(a, T) = \kappa(G - a)$.

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

5. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Es sei k eine Kante des vollständigen Graphen K_n. Für welche $n \geq 3$ ist der Graph $K_n - k$ semi-Eulersch?

Aufgabe 2. Sei G ein Eulerscher Graph. Beweisen Sie, daß ein Kreis C in G existiert mit $n(C) > \lceil \frac{n(G)-1}{\mu(G)} \rceil$.

Aufgabe 3. Sei $q \geq 2$ eine natürliche Zahl und G ein schlichter $(2q+1)$-regulärer Graph der Ordnung $n(G) \leq 4q+1$. Zeigen Sie, daß G einen Eulerschen Faktor G' mit $\delta(G') > 2$ besitzt.

Aufgabe 4. Sei G ein vollständig p-partiter Graph mit der Partition $E_1, E_2, \ldots, E_p$, $p \geq 2$ und mit $n(G) \geq 3$. Ist D eine stark zusammenhängende Orientierung von G, so zeigen Sie, daß jede Ecke $a \in E(D)$ in D auf einem orientierten Kreis der Länge 3 oder 4 liegt.

Aufgabe 5. Seien $r_3 \geq r_2 \geq r_1 \geq 2$ natürliche Zahlen mit $r_3 = r_1 + r_2$ und $G = K_{r_1,r_2,r_3} - PM$ ein 3-partiter Graph, wobei PM ein perfektes Matching des vollständig 3-partiten Graphen K_{r_1,r_2,r_3} ist. Zeigen Sie, daß G Hamiltonsch ist.

Aufgabe 6. Sei G ein schlichter, bipartiter Graph mit Bipartition A, B, wobei $|A| = |B| = n$ ist. Erfüllen die nicht adjazenten Ecken $a \in A$ und $b \in B$ die Bedingung $d(a,G) + d(b,G) \geq n+1$, so zeigen Sie, daß G genau dann Hamiltonsch ist, wenn $G + ab$ Hamiltonsch ist.

Aufgabe 7. Ist G ein schlichter planarer Graph der Ordnung $n \geq 11$, so zeigen Sie, daß der Komplementärgraph $\overline{G}$ nicht planar ist.

Aufgabe 8. Ist G ein schlichter, planarer Graph mit $\delta(G) \geq 3$, so zeigen Sie:
a) $\tau_5 + 2\tau_4 + 3\tau_3 \geq 12 + \Sigma_{i=7}^{\Delta(G)}(i-6)\tau_i$.
b) Es existieren mindestens 4 Ecken vom Grad kleiner oder gleich 5.
c) Ist die Taillenweite $t(G) \geq 4$, so gilt $\tau_3 \geq 8$.

Aufgabe 9. Sei G eine zusammenhängende, nicht triviale Landkarte ohne Brücken.
Zeigen Sie: Ist G 2-färbbar, so ist G Eulersch.

Aufgabe 10. Es sei W die Menge aller Worte aus 0 und 1, d.h. $w \in W \Leftrightarrow w = (w_1, \ldots, w_n)$ mit $w_i \in \{0,1\}$, $n \geq 1$. $|w| = n$ heißt dann auch Länge von w.
a) Wieviele Worte $w \in W$ mit $1 \leq |w| \leq n$ gibt es?
b) Wieviele Palindrome der Länge n gibt es, d.h. $w \in W$ mit $(w_1, \ldots, w_n) = (w_n, \ldots, w_1)$.
c) Für zwei Worte $u, v \in W$ der Länge n definieren wir die AND-Verknüpfung wie folgt: $w = (u \ AND \ v) \ :\Leftrightarrow w_i = u_i \cdot v_i$ für alle $1 \leq i \leq n$. Wieviele Möglichkeiten existieren, ein Wort $w \in W$ der Länge n als AND-Verknüpfung zweier anderer Worte darzustellen?

Aufgabe 11. Gegeben sei eine Permutation f von $\{1, \ldots, n\}$. Eine *Inversion* von f ist ein Paar i, j mit $i < j$ aber $f(i) > f(j)$. Mit $I_{n,k}$ bezeichnen wir die Anzahl der Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$ mit genau k Inversionen. Zeigen Sie:
a) $I_{n,0} = 1$;
b) $I_{n,k} = I_{n,\binom{n}{2}-k}$ für $k = 0, \ldots, \binom{n}{2}$;
c) $I_{n,k} = I_{n-1,k} + I_{n,k-1}$ für $k < n$. Gilt dies auch für $k = n$?

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

6. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1. Es sei $f_{n,0} = 1$ und $f_{n,k}$, für $k \geq 1$, die Anzahl aller Untermengen der Größe k von $\{1, \dots, n\}$, welche kein Paar aufeinanderfolgender Zahlen enthalten. Zeigen Sie:

a) $f_{n,k} = \binom{n-k+1}{k}$;

b) $\sum_{k=0}^{n} f_{n,k} = f_{n+2}$,

wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist (vgl. Übung 1: $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ und $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$).

Aufgabe 2. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = \{(F_1, F_2, F_3)\}$, wobei die Mengen F_i folgenden Bedingungen genügen:

i) $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = \{1, 2, \dots, n\}$ mit $F_i \cap F_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

ii) $\min F_1 \leq \min F_2 \leq \min F_3$, wobei wir $\min F_i := n + 1$ setzen, wenn $F_i = \emptyset$.

Bestimmen Sie $|M_n|$.

Aufgabe 3. Beweisen Sie folgende geschlossene Darstellung für die Stirling-Zahlen 1. Art:

$$s_{n,k} = (n-1)! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n-1} \frac{1}{i_1 i_2 \cdots i_{k-1}} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-k} \leq n-1} i_1 i_2 \cdots i_{n-k}.$$

Aufgabe 4. Es sei $S_0 = 1$ und S_n, für $n \geq 1$, die Anzahl der Abbildungen $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ mit der Eigenschaft, daß f mit dem Wert i auch alle Werte j mit $1 \leq j \leq i$ annimmt. Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} S_{n-k}$;

b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} k! S_{n,k}$,

dabei sind $S_{n,k}$ die Stirling-Zahlen 2. Art.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß die Anzahl der Zahlpartitionen einer Zahl $n \in \mathbb{N}$, deren Summanden alle nicht durch 3 teilbar sind, gleich derjenigen Anzahl ist, in denen kein Summand mehr als zweimal erscheint.

Aufgabe 6. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitze r verschiedene Primfaktoren. Zeigen Sie: $\varphi(n) \geq \frac{n}{r+1}$.

Aufgabe 7. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\varphi(n) | (n-1)$. Zeigen Sie:

a) Es ex. keine Primzahl p mit $p^2 | n$.

b) Ist n keine Primzahl, so besitzt n mindestens 3 verschiedene Primfaktoren.

Aufgabe 8. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ bezeichnet $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leq x$. Zeigen Sie, daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\frac{\pi(x)}{x} \leq \frac{\varphi(k)}{k} + \frac{2k}{x}.$$

Lehrstuhl II für Mathematik
Prof. Dr. L. Volkmann **SS 2000**

7. Übung Diskrete Strukturen

Aufgabe 1.
a) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Folge $a_0 = 1,\ a_n = 2$ für alle $n > 0$.
b) Zeigen Sie, daß $-\ln(1-x)$ erzeugende Funktion der Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion und die exponentiell erzeugende Funktion von der Folge $a_n = 2^n + 5^n$.

Aufgabe 3.
a) Bestimmen Sie die Anzahl aller 0/1–Worte der Länge n (vgl. Übung 5, A.9), in denen niemals zwei Nullen hintereinander vorkommen. **Hinweis:** Rekursion aufstellen.
b) Bestimmen Sie nun die Anzahl aller Worte der Länge n, die aus den Zeichen $0, 1, 2$ bestehen und in denen niemals zwei Nullen hintereinander vorkommen.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein regelmäßiges n–Eck, $n \geq 3$. Durch Einfügen von Sehnen wird das n–Eck trianguliert. Bestimmen Sie die Anzahl $T(n)$ der verschiedenen Möglichkeiten, ein gegebenes n–Eck zu triangulieren.

Aufgabe 5. Die Anzahl der Wege der Länge i, die auf dem Gitter $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ von einem Punkt aus existieren, sei mit $w(i)$ bezeichnet. Dabei sind folgende Schritte erlaubt: rechts, hoch, links, mit der Einschränkung, daß zwischen einem Rechtsschritt und einem Linksschritt mindestens ein Schritt nach oben existieren muß. Berechnen Sie $w(i)$.

Information:

Zu der Vordiplomklausur am 20.09.2000 werden in der vorlesungsfreien Zeit zusätzliche Diskussionsstunden für die Diskreten Strukturen angeboten:

Dienstag,	12.09.2000,	10.00–11.30 Uhr,	SG 23;
Mittwoch,	13.09.2000,	10.00–11.30 Uhr,	SG 23;
Donnerstag,	14.09.2000,	10.00–11.30 Uhr,	SG 23;
Freitag,	15.09.2000,	10.00–11.30 Uhr,	SG 23.