1) (4 Punkte) Für welche $m, n \in \mathbb{N}$ mit $ggT(m,n) = 1$ gilt $(m+n) \mid mn$?

Lösung: Wenn $(m+n) \mid mn$, dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$mn = k(m+n). \qquad (*)$$

Daraus ergibt sich wegen Hilfsatz 2.1(4)

$$m \mid kn \quad \text{und} \quad n \mid km.$$

Wegen $ggT(m,n) = 1$ liefert nun Folgerung 2.2

$$m \mid k \quad \text{und} \quad n \mid k.$$

Mit Aufgabe 1 a) (2. Übung) erhalten wir daraus sogar

$$mn \mid k. \qquad ②$$

Daher existiert ein $q \in \mathbb{N}$ mit

$$k = qmn,$$

womit sich zusammen mit $(*)$

$$mn = qmn(m+n),$$

also

$$1 = q(m+n) \qquad ①$$

ergibt. Wegen $m+n \geq 2$ ist das aber unmöglich. Damit haben wir

$$(m+n) \nmid mn$$

gezeigt, falls $ggT(m,n) = 1$ gilt. ①

2. (4 Punkte). Man bestimme alle ungeraden Zahlen $n \geq 3$ mit $2(n-2)! + \binom{n}{2} - 2 \equiv 0 \pmod{n}$.

---

Lösung: Ist $n \geq 3$ ungerade, so ist $\frac{n-1}{2} \in \mathbb{N}$ und deshalb gilt $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$. (1)

Sei nun $n \geq 3$ ungerade mit

$2 \cdot (n-2)! + \binom{n}{2} - 2 \equiv 0 \pmod{n}$.

Dann ist $2 \cdot (n-2)! - 2 \equiv 0 \pmod{n}$ und auch

$2(n-1)! - 2(n-1) \equiv 2((n-1)! + 1) \equiv 0 \pmod{n}$.

Daraus ergibt sich zusammen mit $ggT(2, n) = 1$ und Folgerung 2.2

$$(n-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{n},$$

womit $n$ nach dem Satz von Wilson eine Primzahl ist. (1,5)

Ist nun $p \geq 3$ eine Primzahl, so ist nach Satz 2.16

$$(p-2)! - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da $p$ ungerade ist, folgt

$$2((p-2)! - 1) + \binom{p}{2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

(1)

Damit ist gezeigt, daß genau die Primzahlen $\geq 3$ die ungeraden Zahlen sind, welche die Bedingung erfüllen. (0,5)

3. (4 Punkte) Für welche $n \in \mathbb{N}$ läßt sich die Folge $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ durch einen Graphen realisieren?

Lösung: Nach Satz 3.8 läßt sich die gegebene Folge genau dann realisieren, wenn gilt:

(1) $\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv 0 \pmod 2$ und (2) $n^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^2$

a) zu (1): Wegen $k^2 \equiv k \pmod 2$ folgt aus Aufgabe 8b (3. Übung):

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 \equiv 0 \pmod 2 \iff \sum_{k=1}^{n} k \equiv 0 \pmod 2$$

$$\iff \underline{\underline{4 \mid n \text{ oder } 4 \mid (n+1)}}$$ 1,5

b) zu (2): Für $n \leq 4$ gilt $n^2 > \sum_{k=1}^{n-1} k^2$.

Für $n \geq 5$ zeigen wir durch vollständige Induktion nach $n$: $n^2 \leq \sum_{k=1}^{n-1} k^2$

Induktionsanfang: $5^2 = 25 < 30 = \sum_{k=1}^{4} k^2$

Schluß von $n$ auf $n+1$: Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 \overset{\text{I.V.}}{\geq} 2n^2$

Zu zeigen bleibt: $2n^2 \geq (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$

$\iff n^2 \geq 2n+1 \iff n \geq 2 + \frac{1}{n}$,

was aber offensichtlich richtig ist für $n \geq 5$. 2

Aus a) und b) ergibt sich nun: Die Folge $1, 2^2, 3^2, \ldots, n^2$ ist genau dann realisierbar, wenn gilt:

$$\boxed{n \geq 7 \text{ und } 4 \mid n \text{ oder } 4 \mid (n+1)}$$ 0,5

4. (4 Punkte). Es sei $G$ ein bipartiter Graph mit der Bipartition $A, B$. Man zeige: Ist $|A| = |B| \geq 2$, und gilt für alle $S \subseteq A$ mit $S \neq \emptyset, A$ die Ungleichung $|S| + 1 \leq |N(S,G)|$, so gehört jede Kante von $G$ zu einem perfekten Matching.

Lösung: Ist $k = ab$ eine beliebige Kante aus $G$ mit $a \in A$ und $b \in B$, so sei $H = G - \{a, b\}$. Damit ist auch $H$ ein bipartiter Graph mit der Bipartition $A' = A - \{a\}$ und $B' = B - \{b\}$. Ist nun $X \subseteq A'$ eine beliebige Teilmenge mit $X \neq \emptyset$, so ergibt sich wegen $X \neq A$ aus unserer Voraussetzung

$$|X| + 1 \leq |N(X,G)| \leq |N(X,H)| + 1,$$

also $|X| \leq |N(X,H)|$ für alle $X \subseteq A'$. (2)

Damit besitzt $H$ nach dem Satz von König-Hall (Satz 3.16) ein Matching $M$ mit $|M| = |A'|$. Daher ist $M \cup \{k\}$ ein Matching von $G$ mit $|M \cup \{k\}| = |A| = |B|$, also ein perfektes Matching von $G$, das die Kante $k$ enthält. (2)

5. (4 Punkte). Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ und $N_n = \{1,2,\dots,n\}$.

a) Wieviele Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es, so daß $\{1,2\} \nsubseteq A$ gilt? Ist die Anzahl dieser Teilmengen durch 3 teilbar?

b) Wieviele $(n-2)$-elementige Teilmengen $A \subseteq N_n$ gibt es, so daß $\{1,2\} \nsubseteq A$ gilt? Gibt es mehr oder weniger als $2n$ solcher Teilmengen?

---

Lösung: a) Offensichtlich gilt folgende Äquivalenz:

$$A \subseteq N_n \wedge \{1,2\} \subseteq A \iff A = \{1,2\} \cup B \wedge B \subseteq \{3,4,\dots,n\}.$$

Deshalb ist die Anzahl aller Teilmengen von $N_n$, die $\{1,2\}$ enthalten, gleich der Anzahl aller möglichen Teilmengen von $\{3,4,\dots,n\}$, welche nach Folgerung 5.1 genau $2^{n-2}$ beträgt. Da es nach Folgerung 5.1 genau $2^n$ Teilmengen von $N_n$ gibt, ist die gesuchte Anzahl:

$$2^n - 2^{n-2} = 2^{n-2}(4-1) = \boxed{3 \cdot 2^{n-2}}$$ (teilbar durch 3) 2

---

b) $A$ ist genau dann eine $(n-2)$-elementige Teilmenge von $N_n$, die $\{1,2\}$ nicht enthält, wenn entweder $A = \{3,4,\dots,n\}$, oder $A = \{i\} \cup B$ und $B$ ist eine $(n-3)$-elementige Teilmenge von $\{3,4,\dots,n\}$ und $i \in \{1,2\}$.

Nach Satz 5.4 gibt es genau $\binom{n-2}{n-3}$ solchen Mengen $B$.

Damit ist die gesuchte Anzahl:

$$1 + 2 \cdot \binom{n-2}{n-3} = 1 + 2\frac{(n-2)!}{(n-3)!} = 1 + 2(n-2) = \boxed{2n-3}$$

$$< 2n.$$

2

**Aufgabe 1:** Zeigen Sie, daß für alle $m,n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$m+n \leq ggT(m,n) + kgV(m,n) \qquad (*)$$

Für welche $m,n$ gilt Gleichheit?

---

**Lösung:** Es sei $d = ggT(m,n)$. Nach Satz 2.17 ist dann $kgV = \frac{m \cdot n}{d}$.

Somit ist $(*)$ äquivalent zu

$$m+n \leq d + \frac{m \cdot n}{d}. \qquad (1)$$

Da $d = ggT(m,n)$, ex. $k, l \in \mathbb{N}$ mit

$$m = k \cdot d \text{ und } n = l \cdot d.$$

Dies eingesetzt ergibt

$$k \cdot d + l \cdot d \leq d + \frac{k l d^2}{d} \qquad (1)$$

$$\Leftrightarrow (k+l)d \leq d + kld$$

$$\underset{d \geq 1}{\Leftrightarrow} \quad k+l \leq 1 + kl$$

$$\Leftrightarrow \quad k-1 \leq l(k-1), \text{ erfüllt für alle } l,k \in \mathbb{N}.$$

(1)

Gilt Gleichheit in $(*)$, so gilt auch

$$k-1 = l \cdot (k-1)$$

und somit $k=1$ oder $l=1$.

Umgekehrt folgt aus $k=1$ oder $l=1$ Gleichheit in $(*)$. D.h. Gleichheit gilt genau dann, wenn $m | n$ oder $n | m$ gilt. □ (1)

2) (4 Punkte) Es sei $p$ eine Primzahl. Man bestimme alle Restklassen $[x] = [x]_p$ modulo $p$ mit
$$[x]\,[x] = [1].$$

Lösung: Da $[0], [1], \dots, [p-1]$ ein vollständiges Restsystem ist, können wir o.B.d.A.
$$0 \le x \le p-1$$
voraussetzen. Nun folgt aus den Rechenregeln für Restklassen:
$$[x][x] = [1] \Leftrightarrow [x^2 - 1] = [0]$$
$$\Leftrightarrow p \mid (x+1)(x-1) \qquad (1)$$
Daraus ergibt sich zusammen mit dem Fundamentallemma (Folgerung 2.1)
$$p \mid (x+1) \text{ oder } p \mid (x-1). \qquad (1)$$
Wegen $0 \le x \le p-1$ folgt daraus notwendig
$$x = p-1 \text{ oder } x = 1 \qquad (1)$$
Wegen $[1][1] = [1]$ und $[p-1][p-1] = [p^2 - 2p + 1] = [1]$

sind $[1]$ und $[p-1]$ die gesuchten Restklassen, die für $p = 2$ zusammenfallen. (1)

## Aufgabe 3:

Sei $G$ ein $p$-partiter Graph, $p \geq 2$, mit der Partition $E_1, E_2, \ldots, E_p$ und sei $|E_1| \leq |E_2| \leq \ldots \leq |E_p|$.
Zeigen Sie:

a) Falls für jede Menge $S \subseteq E_p$ die Ungleichung $|S| \leq |N(S,G)|$ gilt, so existiert ein Matching $M$ von $G$ mit $|M| = |E_p|$.

b) Aus $(p-1)|E_p| \leq |N(E_p,G)|$ folgt $|E_1| = |E_2| = \ldots = |E_p|$.

## Lösung:

a) Sei $K' = \{xy \in K(G) \mid x, y \in E(G) - E_p\}$ und sei $G' = G - K'$.
Dann ist $G'$ ein bipartiter Teilgraph von $G$ mit der Bipartition $E_p$, $E(G) - E_p = \bigcup_{i=1}^{p-1} E_i$ und für jedes $a \in E_p$ gilt $N(a, G') = N(a, G)$.
Sei nun $S \subseteq E_p$ beliebig. Es gilt $|S| \leq |N(S,G)| = |N(S,G')|$.
Mit dem Satz von König-Hall folgt nun, daß es in $G'$ ein Matching $M$ gibt mit $E(M) \cap E_p = E_p$.
Damit ist $M$ auch ein Matching von $G$ mit $|M| = |E_p|$. $2\frac{1}{2}$

b) Angenommen, $|E_1| < |E_p|$. Dann folgt

$$\sum_{i=1}^{p-1} |E_i| < (p-1)|E_p| \leq |N(E_p,G)| \leq |E(G) - E_p| = \sum_{i=1}^{p-1} |E_i|.$$

Das ist ein Widerspruch und wir erhalten
$|E_p| \leq |E_1| \leq |E_2| \leq \ldots \leq |E_p|$ und damit gilt $|E_1| = \ldots = |E_p|$.

$1\frac{1}{2}$

4) (4 Punkte) Es sei $G$ ein schlichter und $r$-regulärer Graph gerader Ordnung $n \geq 4$. Man zeige, daß $G$ oder sein Komplementärgraph $\overline{G}$ Hamiltonsch ist.

Lösung: Ist $2r \geq n$, also $r \geq \frac{n}{2}$, so ist $G$ nach dem Satz von Dirac (Satz 4.19) (1) Hamiltonsch.

Daher gelte nun $2r \leq n-1$. Da $n$ gerade ist folgt sogar $2r \leq n-2$, also $r \leq \frac{n}{2}-1$ und damit $-r \geq 1-\frac{n}{2}$. (*).

Da $G$ $r$-regulär ist, ist $\overline{G}$ $(n-r-1)$-regulär. Wegen (*) gilt nun

$$n-r-1 \geq n-1+1-\frac{n}{2} = \frac{n}{2},$$

womit nun nach dem Satz von Dirac aber $\overline{G}$ Hamiltonsch ist. (3)

Aufgabe 5: Es sei $A = \{0, 1, 2\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Wieviele geordnete k-Tupel $(a_1, \dots, a_k) \in A^k$ existieren, die genau t-mal die Eins enthalten für $0 \leq t \leq k$?

Lösung: Enthält ein k-Tupel genau t-mal die Eins, so bestehen die restlichen $(k-t)$ Einträge aus Nullen oder Zweien.

(1) Nach Satz 5.1 gibt es dafür $2^{k-t}$ Möglichkeiten.

Faßt man $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ als Menge verschiedener Elemente auf, so gibt es nach Satz 5.4

(1) $$\binom{k}{t}$$

Teilmengen mit t-Elementen. Daher kann man in einem k-Tupel $(a_1, \dots, a_k)$

(1) die t Einsen auf genau $\binom{k}{t}$ verschiedene Arten auflisten.

Dies zusammen ergibt als Lösung

(1) $$\binom{k}{t} 2^{k-t}$$

k-Tupel, in denen genau t-mal die Eins vorkommt.

□