Diskrete Strukturen

Kapitel 1 - Allgemeine Grundlagen

1.1 Abbildungen und Äquivalenzrelationen

1.2 Gruppen, Ringe und Körper

1.3 Vollständige Induktion

1.4 Binominalkoeffizienten

Kapitel 2 - Elementare Zahlentheorie

2.1 Primzahlen

Def. 2.1: **a|b**: a teilt b (also b/a = ganze Zahl)

Hilfssatz 2.1:

$$\frac{50}{10},\frac{10}{2} \Rightarrow \frac{50}{2} \quad \| \quad \frac{50}{10},\frac{5}{2} \Rightarrow \frac{50\cdot 5}{10\cdot 2} \quad \| \quad \frac{3\cdot 10}{4\cdot 10} \Rightarrow \frac{3}{4} \quad \| \quad \frac{10}{5},\frac{15}{5} \Rightarrow \frac{10x+15y}{5}$$

$$\frac{10}{5},\frac{10+5}{5} \Rightarrow \frac{5}{5} \quad \| \quad \frac{\text{größer}}{\text{kleiner}} \quad \| \quad \frac{5}{5},\frac{5}{5}$$

Def. 2.2: **Prim**zahl, **Prim**faktor (einer Zahl), **Prim**faktorzerlegung

Hilfssatz 2.2: der kleinste Teiler JEDER Zahl ist eine PRIMzahl!

... im Zweifel eben die Zahl selbst.

Satz 2.1 **(Euklid):** Es gibt **unendlich viele Primzahlen.**

... denn das Produkt aller bisherogen Primzalen + 1 ist wieder eine Primzahl.

Satz 2.2: **a** (ab 4) keine Primzahl → **Primteiler** ex. mit $p \le \sqrt{a} \le \frac{a}{2}$

a = b*p < p*p (da p<b)

Bsp 2.1: **Primzahltest**: nur testen, ob durch Primzahl $\le \sqrt{a}$ teilbar !

Bem. 2.2: („**Sieb des Erathostenes**“: Primzahlen herausfinden:)
einfach alle Vielfachen von 2,3,5,... streichen (nur da beginnen, wo noch nicht gestrichen)

Satz 2.3 („**Fundamentalsatz** der elementaren Zahlentheorie“)
Jede Zahl hat eindeutige Primfaktorzerlegung.

Folgerung 2.1: (**Fundamentallemma**, Euklid):

$$n = \frac{a\cdot b}{p} \Rightarrow \frac{a}{p} \text{ oder } \frac{b}{p}$$

! gilt nur, wenn im **Nenner** eine **Primzahl** steht !!!

Def. 2.3: „**kanonishe Primfaktorzerlegung**“: Primzahlen sortiert angeordnet.

„**Primzahl-Zwilling**“: 2 Primzahlen, die sich um 2 unterscheiden (3,5) (5,7) (11,13) ...

„**Goldbachsche Vermutung**“: Gerade Zahl = Ungerade Primzahl + Ungerade Primzahl

2.2 Größter Gemeinsamter Teiler

Def. 2.4: **untere Gauss-Klammer**: Zahl ohne Nachkommastellen
obere Gauss-Klammer: Zahl ohne Nachkommastellen **+1**

Satz 2.4: Division mit Rest: **a = qb + r**

z.B.: 53 = 5E10 + 3
10 = 0E53 + 10

Def 2.5: gemeinsamter Teiler

Def 2.6: ggT, teilerfremd = „relativ prim“

ggT immer > 1, nur Suche nach positivem Teiler nötig.

Hilfssatz 2.4: **teilt** man 2 Zahlen durch ihren ggT, sind die 2 neuen Zahlen **teilerfremd**.

Satz 2.5: **euklidischer Algorithmus**:

729 = **153** * 4 + 117
153 = **117** * 1 + 36
117 = **36** * 3 + 9
36 = **9** * 4 → ggT (729, 153) = 9

Satz 2.6:!! der GGT von 2 Zahlen lässt sich immer als LK der beiden darstellen!
d=ggT(**a**,**b**) → **d** = xE**a** - yE**b**
6=ggT(**30**,**12**) → **6** = 1E**30** - 2E**12**

Folgerung. 2.2: , b und a teilerfremd !
Wenn das **Produkt** aus 2 Zahlen **durch a teilbar** ist, und einer der Faktoren **teilerfremd** zu a, kann man diesen wegstreichen und es **bleibt teilbar**.

$$\frac{b \cdot c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a}$$

Folgerung 2.3: sind **a** und **b** durch **3** teilbar, ist auch der **ggT(a,b)** durch **3** teilbar.

$$\frac{6}{3}, \frac{9}{3} \Rightarrow \frac{ggt(6,9) = 3}{3}$$

Folgerung 2.4: ist der ggT aus 2 Brüchen mit dem gleichnen Nenner 1, so so ist der Nenner der ggT aus den beiden Zählern.

$$ggT\left(\frac{a}{x}, \frac{b}{x}\right) = 1 \rightarrow d = ggT(a,b)$$

Folgerung 2.5: ggT (**m**Ea, **m**Eb) = **m**EggT(a , b)

Folgerung 2.6: Eine Gleichung **ax+by=n** besitzt genau dann ganzzahlige Lösungen **a,b** wenn **n** ein Vielfaches von **ggT(a,b)** ist.

logisch: 10Ex + 15Ey = 5 → OK.

Def. 2.7: **kgV** : kgV(2,3)=6. existiert immer: maximal 2E3

Satz 2.7: das Produkt zweite Zahlen ist immer durch ihren kgV teilbar.

$$kgV(2,3) = \frac{2 \cdot 3}{ggT(2,3)}$$

(logisch, denn das Produkt ist ja auch ein Vielfaches, wenn nur nicht immer das kleinste.)

2.3 Kongruenzen und Restklassenringe

Def. 2.8: a \ b (mod m):
man nehme eine Zahl b. Immer wenn man nun ein Vielfaches von m dazuaddiert, erhält man eine Zahl aus dem gleichen Restklassenring.
Beispiel: 5,10,15,20,.... sowie 6,11,16,21,....

Hilfssatz 2.5: immer wenn man bei der Multiplikation mit **m** den gleichene Additions-Rest hat,um auf die Zahl zu kommen, ist man im gleichen Restklassenring:
16 = 3E**5** + 1
21 = 4E**5** + 1

Bem. 2.4: **kongruent** modulo m 3 **gleicher Rest** bei Division durch m

Satz 2.8: \ ist **Äquivalenzrelation** auf Z.

Def. 2.9: „RESTKLASSEN modulo m“ = Äquivalenzklassen von \ :
$\mathbf{[a]_m}$: $\mathbf{[3]_5}$ = {3, 8, 13, 18, ... }(„Repräsentanten“ der Restklasse)
$\mathbf{Z_m}$: alle Restklassen modulo **m**.

Hilfssatz 2.6: sind zwei Zahlen in der gleichen Restklasse, sind die beiden Restklassen identisch: **a \ b (mod m)** 3 **[a] = [b]**

Satz 2.9: $\mathbf{[3]_5}$: es gibt **5 disjunkte Restklassen**:
0, $\boxed{5}$, 10,...
1, 6, $\boxed{11}$,...
$\boxed{2}$, 7, 12,...
3, 8, $\boxed{13}$,...
4, $\boxed{9}$, 14,...

Def. 2.10: $\boxed{5}$, $\boxed{11}$, $\boxed{2}$, $\boxed{13}$, $\boxed{9}$ ist nun ein „**vollständiges Restsystem modulo m**“.
aus ***jeder*** Restklasse ist ***genau ein*** Repräsentant da.

Bem. 2.5: das VRS besteht **aus m Zahlen**. (logisch.)

Hilfssatz 2.7: jede Zahl es VRS ist in einer anderen Restklasse (auch logisch.)

Hilfssatz 2.8: das **VRS** bleibt **VRS**, auch wenn man zu jeder Zahl die **gleiche addiert** und/oder jede Zahl mit der **gleichen multipliziert.** (diese muss teilerfremd zu m sein!!!)

Def. 2.11: $[1]_5$ l $[6]_5 = [1+6]_5 = [7]_5 = [2]_5$
$[1]_5$ l $[1]_5 = [2]_5$.
Bei der l-Addition wird der „Rest“ der beiden Zahlen (hier 1) addiert und bestimmt die neue Restklasse.

Satz 2.10: mgN → Restklasse (Zm, l, *) ist ein kommutativer Ring mit 1.

Def. 2.12: ↑ = „Restklassenring modulo m“

Bem. 2.7: Restklassenring i.d. Regel kein Körper, d.h. kein inverses Element der Multiplikation:
$[4]_{10}$ E $[4]_{10} = [16]_{10}$ → kein inverses. jedoch:
$[4]_5$ E $[5]_5 = [16]_5 = [1]_5$ → inverses, **da 5 Primzahl!**
→ **Körper, wenn m <u>Primzahl</u> !!**

Def. 2.13: **prime Restklassen modulo m**: alle Restklassen, die zu m teilerfemd sind:
$[4]_8 = [12]_8$ nicht, aber $[5]_8$.
j **(m):** Anzahl der primen Restklassen (bei 8: {1,3,5,7} = 4)

Hilfssatz 2.9: $\mathbf{[4]_8} = \mathbf{[12]_8}$ **:** es ist egal, welchen Repräsentanten man nimmt:
[a] = [b] 3 ggT(a,m) = ggT(b,m)

Hilfssatz 2.10: ggT(5,8)=ggT(3,8)=1 --> ggT(5*3,8)=1

Satz 2.12: $(\mathbf{Z^*_m}, *)$ ist eine **abelsche Gruppe** (d.h.: []*[]=[], und inverses existiert.)

a) $[5]_6$ E $[7]_6 = [35]_6 = [5]_6$
b) $[5]_6$ E $[5]_6 = [25]_6 = [1]_6$
$[5]_6$ E $[11]_6 = [55]_6 = [1]_6$
$[5]_6$ E $[17]_6 = [85]_6 = [1]_6$

Satz 2.13: (Euler-Fermat, 1760): <u>primes</u> Restsystem → $\mathbf{([5]_8)^{j\,(8)} = [1]_8}$.

potenziert man einen *zu m* teilerfremden Repräsentanten der Restklasse mit φ(m), so erhält man immer die Restklasse [1].

$([3]_8)^4 = 3*3*3*3 = [81]_8 = [1]_8$

Folgerung 2.7: („kleiner fermatscher Satz“): $\frac{n^{p-1}-1}{p}$ → $\frac{8^2-1}{3}$
wobei **p** kein Teiler von **n** sein darf!

$[n]_p^{\varphi(p)} = [1]$
$[n-1]_p^{\varphi(p)} = [0]_p$
$[n-1]_p^{p-1} = [0]_p$
→ p teilt $(n-1)^{p-1}$

2.4 Das RSA-Codierungssystem

m = **pEq** (p,q Primzahlen)

Nachricht verschlüsseln in Zahlenblöcken **N**, welche zu **m teilerfremd** sind (also am leichtesten: kleiner als die kleinere der Primzahlen; dann ist sie ja auf jeden Fall teilerfremd.)

...... muss noch ausgeführt werden ......

2.5 Der große Fermatsche Satz

Satz 2.14 (Diophant): ....

Satz 2.15 (Fermat 1636): $\mathbf{x^4 + y^4 = z^4}$ hat keine Lösung in N.

...... muss noch ausgeführt werden ......

Kapitel 3 - Grundbegriffe der Graphentheorie

3.1 Graphen und Digraphen

Def. 3.1: ungerichteter Graph: P_2(E): alle XDX aus E.

E: Menge der Eckpunkte
K: Menge der Kanten
g: Abbildung von einer Kante auf 2 Ecken

„**adjazente Ecken**“: benachbarte Ecken:
„**die Kante k indiziert mit den Ecken**“: sie endet in den Ecken.
„**isolierte Ecke**“: loser Punkt.
„**Mehrfachkanten**“: 2 Kanten, die beide von A nach B führen.
„**schlichter Graph**“: keine parallelen Kanten (zwischen 2 Nachbar-Punkten)
„trivialer Graph“ = „Nullgraph“ : nur 1 Punkt, keine Kanten.

$g(k_1) = \{x_1, x_2\}$ die Kante k_1 verbindet die Punkte x_1, x_2

Def. 3.2: **Digraph** = gerichteter Graph

Pfeile statt Kanten
„k indiziert positiv mit x und negativ mit y“: Kante geht von x nach y
„untergeordneter Graph“: alle Bogen (=Pfeile) in Kanten umwandeln.
„Orientierung von G“: Pfeile an die Kanten malen.

Def. 3.3 **ORDNUNG** = Anzahl der Ecken = n(G)
GRÖSSE = Anzahl der Kanten = m(G)

Def. 3.4: **d(x)** = **Eckengrad** = Grad = **Valenz** einer Ecke:
Anzahl der Kanten, die in die Ecke x laufen.
Endecke: nur 1 Kante
Ç**(g)**: maximaler Eckengrad im Graphen
Ô$^{+-}$**(g)**: minimaler Eckengrad weglaufender / zulaufender Bögen
d^+(x): AUSSENGRAD: Anzahl der Bögen, die auf die Ecke x laufen
d^-(x): INNENGRAD: Anzahl der Bögen, die von der Ecke x weglaufen

d(G): Ì d(x), = alle Kantenenden ect.

Satz 3.1: („Handschlaglemma“, Euler 1736):
d(G) = 2*|K| (**|K| = Anzahl der Kanten**)
d^+(D) = **d^-(D)** = |K| (Anzahl der Kanten)

es gibt doppelt so viele Kantenenden wie Kanten (logisch)

Def. 3.5: **Graphen-Isomorphismus** = identische Graphen
G=(E,K,g) G’=(E’,K’,g’)

Def. 3.6: Matritzen
Adjazenzmatrix A_G: alle Ecken Dalle Ecken:
wieviele Kanten diese jeweils verbinden
Inzidenzmatrix I_G: alle Ecken x alle Kanten:
1, wenn Ecke mit Kante verbunden, sonst 0.

Def. 3.7: **Teilgraph**: hat einen Teil der Ecken un Kanten
Faktor von G: Teilgraph, der **alle Ecken** aber nicht alle Kanten hat.
G[{u,v,w}]: **induzierter Teilgraph**: Ecken u,w,v und alle beteiligten Kanten..
G[k_1,k_4,k_7]: der von K' erzeugte Teilgraph: angegebene Katen und beteiligte Ecken.
G-{u,x}: entferne Ecken u, x sowie die anhängenden Kanten.
G-{k_1,k_2}: entferne Kanten **k_1,k_2**.
G+k oder **G+xy:** Kante **k,** die **x**+**y** verbindet, zum Graphen g hinzugefügt

Def. 3.8: **r-regulärär Graph**: in *alle* Ecken laufen **r** Kanten.
(Ô**(G) =** Ç**(G)**)
vollständiger Graph: (K_n): jede Ecke ist mit jeder verbunden.

Bem. 3.4: - (klar:) der vollst. Graph ist (n-1)-regular. (d.h. in alle Ecken laufen 1 Kante weniger als es Ecken gibt.)
- die Anzahl der Kanten in jedem schlichten Graphen (schlicht=Ecken nicht mehrfach verbunden) ist immer kleiner als ½E**n**E**(n-1)**

(n=Anzahl der Ecken:)
jede Ecke hat maximal (n-1) Kantenenden, also gibt es maximal nE(n-1) Kantenenden.
2 Kantenenden bilden eine Kante, also **|K(G)|** R ½E**n**E**(n-1)** = (n über 2)

3.2 Wege, Kreise und Zusammenhang

Def. 3.9: **k_1,k_2,...k_p:** ***Kantenfolge von a_0 nach a_p:***
Unser Weg führt uns über die angegebenen Kanten (der Reihe nach) und die angegebenen Ecken (auch der Reihe nach!!!)
Def. **Anfangspunkt**, **Endpunkt**, **geschlossen**, **offen**.
Def. **Kantenzug**: keine Kante doppelt gelaufen.
Def. **Weg**: keine Ecke doppelt besucht.
Def. **Kreis**: geschlossener Weg. **C_p** = Kreis mit **p** Kanten / **p** Ecken
Def. **E(V)**: Anzahl der Ecken der Kantenfolge V
Def. **K(V)**: Anzahl der Ecken der Kantenfolge V
Def. **Nullweg**: nur eine Ecke, keine Kanten.

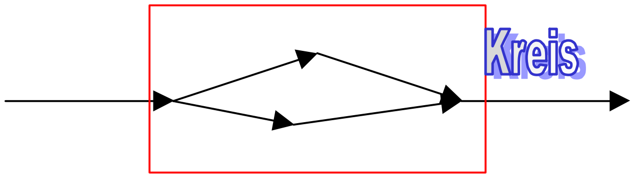
Schreibweisen bei Kantenfolgen:
- abwechselnd Kante/Ecke hinschreiben, oder nur alle Kanten, oder nur alle Ecken.

Hilfssatz 3.1: gibt es eine **Kantenfolge** von A nach B, so gibt es auch einen **Weg**.
(der dann Teil davon ist, d.h. auch nur (mailmal) diese Kanten langgeht.)

Hilfssatz 3.2: gibt es einen **geschlossenen Kantenzug** von A nach B, so gibt es auch einen **Kreis**.

Bem. 3.5: BEACHTE: es *muss* ein Kanten**zug** sein!
Hilfssatz 3.3: kommt man von A nach B und von B nach C, so kommt man auch von A nach C, indem man nur dieselben Wege benutzt (wie trivial!!!)

Hilfssatz 3.4: gibt es 2 verschiedene Wege von A nach B, so gibt es in diesem Graphen einen Kreis (aus Kanten der beiden Verbindungen.)



Def. 3.10: k = k**(G):** Anzahl der voneinander völlig *getrennten Teile* eines Graphen.
zusammenhängend = es gibt von a nach b immer einen Weg.
Komponente, **Zusammenhangskomponente**.
dies bildet eine **Äquivalenzrelation**,.

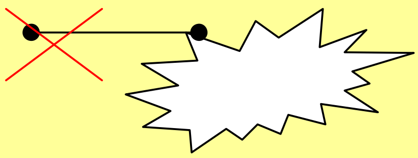
Bem. 3.6: **k=ab** *Kante* von a nach b
k=(ab) *Bogen* von a nach b (Bogen=gerichtete Kante, Pfeil)

Satz 3.2: 1 Kante wegnehmen
→ Anzahl der Komponenten κ bleibt gleich oder es wird eine mehr.

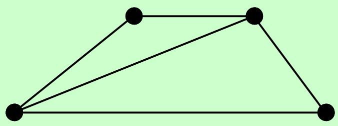
Hilfssatz 3.5: weggenommene Kante war Teil eines Kreises → κ bleibt gleich.
Logisch, es gab ja einen 2. Weg, die Kante kann also die Komponente nicht „trennen".

Def. 3.11: BRÜCKE: einzige Verbindung zwischen 2 Komponenten.

Folg. 3.1: Nimmt man die Brücke weg, wird es **eine Komponente mehr**.
Eine Brücke gehört **nie zu einem Kreis**!
Folg. 3.2: Ist eine Brücke mit einer **Endecke** verbunden, und nimmt man diese weg (inkl. Brücke), bleibt die Anzahl der Komponenten

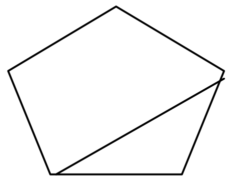


Satz 3.3: Ein Graph G mit Ô(G)≥2 (jede Ecke hat mindestes 2 Kanten) hat mindestens einen Kreis.



Satz 3.4: Ein schlichter Graph mit Ô**(G)** ³ **2** (d.h. jede Ecke hat mindestens 2 Kanten) hat einen **Kreis** der Länge Ô**(G)+1**.

Logisch: mehmen wir einen längsten Weg (z.B. von links unten ganz außenum), und gehen zum letzten Knoten i , der noch mit unserem Ausgangspunkt direkt verbunden ist (adjazent ist). Wir sind nun an maximal i Knoten vorbeigekommen, die mit dem Startpunkt verbunden waren (wenn alle verbunden waren). Der letzte Weg („+1“) ist nun der Rückweg zum Ausgangspunkt.

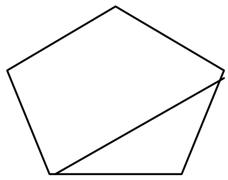


Hilfssatz 3.6: In jedem Graphen gibt es (mindestens) zwei Ecken, die man wegnehmen kann, so dass der Graph noch zusammenhängend ist.

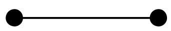
Logisch: Fall1: Endecke → können wir eh wegnehmen.
Fall 2: Teil von Kreis → können wir auch wegnehmen.

Def. 3.12: **Index / zyklomatische Zahl :**Ü**(G) = m(G) – n(G) +** k**(G)**

Zyklomatische Zahl =		Anzahl der **Kanten** (= Größe)
	-	Anzahl der **Ecken** (= Ordnung)
	+	Anzahl der **Komponenten**



6-5+1=2, 1-2+1=0



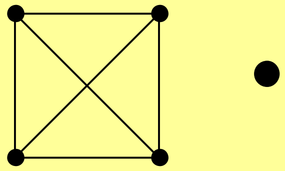
Satz 3.5: Ü**(G)** ³ **0** : die zyklomaische Zahl ist immer ≥ 0.

Extrem: min(Kanten) + max(Ecken) + max(Komponenten)
Start bei Graph mit 1 Kante und 2 Ecken:
1 Ecke dazu → mind. 1 Kante dazu → Ausgleich.
1 Komponente mehr (d.h. „auftrennen“: 1 Kante weg) → Ausgleich. Qed.

Satz 3.6: die Anzahl der Kanten ist immer kleiner/gleich (Anzahl der Ecken – (Anzahl Komponenten – 1)) über 2.

Grund: die meisten Kanten haben wir, wenn alle Komponenten (außer der ersten) isolierte Punkte sind. Wir müssen also eine Komponenten weniger als wir haben schon mal abziehen. ... Danach haben wir die Formel aus Bem. 3.4: die maximale Kantenanzahl ist (Anzahl der Ecken) über 2.

Folgerung 3.3: Haben wir mehr Kanten als die des vollständigen Graphen bei einer Ecke weniger, so ist G zusammenhängend. (die Extra-Ecke kann dann ja nicht mehr isoliert sein. (vgl. Satz 3.6

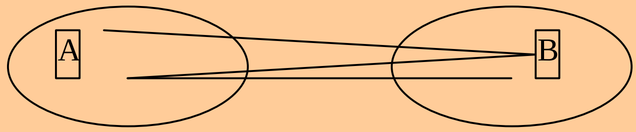


Def. 3.13: **N(x)** = Nachbarn vom Punkt.
N(A) = alle Nachbarn der Punktmenge A.
N[x]: inklusive dem Punkt selbst.

Bem. 3.7: **N(x)** = **d(x)** = Anzahl der Kanten, die in die Ecke laufen.

Def. 3.14: für **Digraphen**:
N^+ positive Nachbarschaft,
N^- negative Nachbarschaft.

Def. 3.15: **m(A,B):** alle Kanten zwischen den disjunkten Eckmengen a,b



Satz 3.7: **Nachbarschaftsungleichung**: Die Nachbarn der Eckmenge S **N(S)** haben zusammen nie weniger Nachbarn als die Eckmenge S selbst.

Logisch: die Nachbarn haben ja zumindest die Ausgangspunkte schon mal als Nachbarn.

Folgerung 3.4: der minimale Eckengrad Ô**(S)** der Ausgangspunkte ist £ dem maximalen Eckengrad Ç**(N(S))** der Nachbarn.

Logisch: wie soll der kleinste Eckengrad der Ausgangspunkte auch größer sein als der größte Eckengrad der Nachbarn. Der Eckengrad der Nachbarn *kann* ja nur größer sein.

Bem. 3.8: algorithmisches Verfahren zur Nachbarsuche:
1.) betrachte alle Nachbarn von x.
2.) betrachte N(N(x)) – N(x), also alle Nachbarn der Nachbarn ohne den Ausgangspunkt mit seinen Nachbarn.

Bem 3.9 (unwichtig): Algorithmus **polynomial**, wenn die Anzahl der Rechenschitte ducrh Polynom beschränkt ist

3.3 Gradsequenzen

Def. 3.16: **Gradsequenz** = Grade der Ecken aneinandergereiht.
(Grad = Anzahl der Kanten, die in die Ecke laufen.)
Grad „**realisierbar**" = es existiert ein Graph mit dieser Sequenz.

Satz 3.8: Die Summe der Gradsequenz (= alle Kantenenden aller Ecken = Ì d(G)) muss **gerade** sein.
Der größte Eckengrad darf nicht größer sein als die Anzahl der restlichen Ecken.

Logisch; alle Kanten müssen ja auch wieder irgendwo enden, also einen „Partner" haben.
Und wir sind im schlichen Graph; 2 Ecken dürfen also duch max. 1 Kante verbunden sein.
Beispiel: 8,6,4,2,2,1 geht nicht: 8 > Anzahl Rest = 5.

Satz 3.9:	(**Havel** 1955, **Hakimi** 1962): entferne (z.B.) die letzte Zahl der Gradsequenz: sagen wir 3. Zieh dann von den ersten 3 Zahlen jeweils 1 ab. (mit denen ist diese verbunden.) Mach das weiter. → ist der entstehende Graph realisierbar, war es auch der Ausgangsgraph.

3.4 Durchmesser eines Graphen

Def. 3.17:	Distanz **d(a,b)** = kürzester Weg zwischen a und b Exzentrität **e(a)** = weiteste Entfenung zu anderem Punkt (immer kürzester Weg!) Durchmesser **dm(G)** = Abstand zwischen am weitesten entfernten Punkten Radius **r(G)**=der Punkt,von dem man am schnellsten an *jedem* anderen ist. Zentrum **Z** = alle Punkte mit dem Radius als Exzenträtät.

Bem. 1.10: Beispiel 3.5:	Verfahren zur Berechnung: siehe Bem 3.8 (von Punkt zu Punkt gehen.) siehe Buch S. 67.

Satz 3.10:	**r**(G) ≤ **dm**(G) ≤ 2Er(G)

Def. 3.18:	**Komplementärgraph** G~: Genau da Kanten, wo bisher keine waren. selbstkomplementär =

Satz 3.11	(Bondy-Murty 1976): **dm**(G) ³ **4** → **dm**(G~) £ **2**

Folgerung 3.5:	Graph selbstkomplementär → Durchmesser 2 oder 3.

Folgerung 3.6:	G schlicht, dm(G) ≥ 3 → dm(G~) ≤ 3.

Bem. 3.11:	?

3.5 Matchingtheorie

Def. 3.19:	**Matching** von G = Kantenmenge mit disjunkten Ecken. **maximales Matching**: so viele Kanten wie möglich. **perfektes Matching**: alle Ecken beteiligt.

Bem. 3.12:	I) Matching perfekt → Matching maximal. II) die Eckenmenge in einem Matching ist doppelt so groß wie die Kantenmenge. (logisch).

Def. 3.20: bipartiter Graph: wenn folgendes möglich ist:
1.) teile die Punkte in 2 Gruppen ein
2.) entferne alle Verbindungen zwischen 2 Gruppen
nun darf keine Verbindung mehr da sein.
vollständiger bipartiter Graph $G_{3,4}$ = 2 Gruppen von Ecken mit je 3 und 4 Punkten, zwischen den Gruppen bestehen alle möglichen Verbindungen.

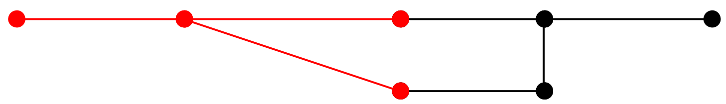
Bem. 3.13: (?) G r-regulär (d.h. in jede Ecke gehen r Kanten) → Anzahl der Ecken in beiden Partitionen gleich.

Satz 3.12: G bipartit 3 G besitzt keine Kreise ungerader Länge.

Wenn wir einen Kreis bipartit aufteilen wollen, müssen wir ja die Knoten abwechselnd der einen und der anderen Partition zuweisen, sonst bleibt die Verbindung zwischen 2 Knoten ja bestehen.
Bei einem ungeraden Kreis hätten wir am Ende 2 Punkte der gleichen Partition → nicht mehr bipartit aufteilbar.

Def. 3.21: „claw-free“: wenn es keinen Punkt gibt, der mit 3 Ecken verbunden ist, die untereinander nicht verbunden sind. (kein vollst. Bipartiter Graph $K_{1,3}$.

... auf Deutsch: claw-free = es gibt keine Abzweigung. Dann nämlich kann man den Abzweigungspunkt und die 3 umliegenden Punkte nehmen, und man hat genau den vollst. Bipartitrn Teilgraphen (=alle möglichen Verbindungen zwichen dem einen und den 3 Punkten bestehen, und die 3 Punkte sind nicht untereinander verbunden.)



Satz 3.13: Graph **zusammenhängend**, **claw-free**, **schlicht** (=keine parallelen Kanten) und **gerader** Ordnung (=Anzahl der Ecken)
→ **perfektes Matching** existiert.

Logisch: claw-free bedeutet ja „keine Abzweigung“, und ohne Abzweigung ist es wirklich keine Kunst, ein perfektes Matching zu bekommen.

Folgerung 3.7: (zu Satz 3.13:) haben wir eine **ungerade Eckenanzahl**[1], so haben wir ein Matching, das alle Ecken bis auf eine benutzt.

Def. 3.22: **M-alternierender Weg**: jede 2. Kante Teil des Matchings.
M-zunehmender Weg: s.o., aber Endpunkte berühren KEINE Kante des Matchings!

Einen m-zunehmenden Weg kann man leicht invertieren, und man hat wieder ein Matching.

Satz 3.14 (Berge 1957): Matching **M maximal** 3 es ex. **Kein m-zunehmender Weg**.

→: klar. Wir könnten ja den zunehmenden Weg invertieren, und hätten eine Kante mehr.
←: wir können ja nichts invertieren; insofern können wir nicht maximaler werden
(Beweis S. 73 anschauen!!!)

[1] „ungerade Ordnung“

Satz 3.15: Es gibt zu den Matchings M und N Matchings M' und N', wobei M' eine Kante mehr und N' eine Kante weniger hat als die Originale

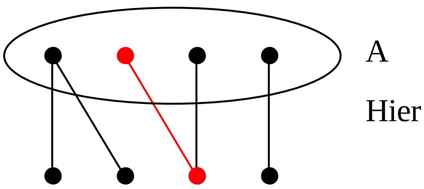
Man vertausche Z.B. einfach die beiden Matchings, und man hat es.

Def. 3.23: „G lässt **sich in p kantendisjunkte Matchings zerlgen**": alle Machings zusammen benutzen auch alle Kanten.

Bem. 3.14: Unser Graph G lässt sich in mindestens so viele Matchings zerlegen, wie der **maximale Eckengrad** ist. (logisch: an einer Ecke muss jede Kante zu einem anderen Matching gehören.). Wegen **Satz 3.15** gibt es nun eine Zerlegung, in der die **Anzahl der Komponenten im Matching maximal um 1 variiert.**

Satz 3.16: wir haben einen **bipartiten** Graphen (d.h. in einer Partition, z.B. A, sind die Punkte nicht miteinander verbunden). Es gibt genau dann ein Matching im Graphen, das zumindest mal **alle Punkte aus A** enthält, wenn **jede beliebige Untermenge** von A **mindestens** so viele **Nachbarn** hat, wie sie **selbst mächtig** ist

Logisch: im anderen Fall hätten ja 2 Punkte in jedem Fall dieselben Nachbarn, und somit könnten nicht mehr beide Punkte im Matching sein.



Hier geht es nicht!!

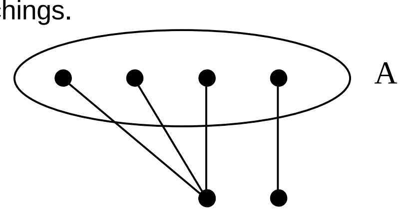
Gehen von 2 Punkten auf A die Verbindungen in einen Punkt auf B, kann ja nur einer der beiden Punkte auf A im Matching liegen.

Folgerung 3.8: G bipartiter Graph, Bipartionen A und B.
Hat in A **jede Ecke** einen **höheren Grad** als die **größte in B**, so gibt es ein **maximales Matching** mit **|M|=|A|** (so viele Kanten wie Ecken in A.)

→ Beweis ?

Satz 3.17: Ein maximales Matching im bipartiten Graph hat genau so viele Kanten wie Ecken in A sind minus der maximalen Differenz von allen Ecken-Untermengen aus A und deren Nachbarn.

Auf deutsch: wir betrachten einen Punkt aus A nur, wenn nicht schon ein andere im gleichen Punktes in B endet. Die Anzahl der so betrachteten Punkte ist dann die Größe des Matchings.



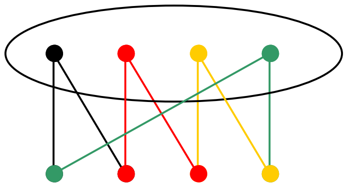
Wir betrachten nur 2 Punkte.

Satz 3.18: G **bipartit, r-regulär** (d.h. in jeder Ecke enden gleich viele Kanten)
→ G besitzt **perfektes Matching**

Logisch: in beiden Partitionen muss die gleiche Anzahl Ecken sein, sonst klappt das mit dem r-regulär nicht: wenn 2 aus A rausgehen (=2*A), müssen auch so viele in B enden. das perfekte Matching ist dann einfach jeweils ein rausgehendes in A zu genau einem in B.

Satz 3.19: der Graph von 3.18 lässt sich **in r kantendisjunkte Matchings** zerlegen.

Logisch; siehe 3.18 und Abbildung.



A

2-regulärer, bipartiter Graph

Satz 3.20: man kann jeden **bipartiten** Graphen **in Ç(G) kantendisjunkte Matchings** zerlegen.

Völlig logisch: man nehme einfach den vollen regulären Graphen von 3.19 und nehme ein paar Strippen weg → et voilà.

Bem. 3.15: Satz **3.18** bis **3.20** gilt auch für **nicht schlichte** bipartite Graphen !

Mitschrift 17.05.2000 (uncorrected)

Bem. 3.16: **„Stundenplanproblem"**
Lehrer: $A_1,\ldots$ Klassen: $B_1,\ldots.$
Lehrer → Klasse: t_{ij} Stunden (so viele parallele Kanten)
ZIEL: in möglichst wenig kantendisjunkte Matchings zerlegen.
LÖSUNG: Ç(G) Matchings lösen es.

Logisch, siehe Satz 3.20

Satz 3.21: Jeden **schlichten** Graphen kann man in **Ç(G)**[2] **+ 1 Matchings** zerlegen.

→ Beweis?

Satz 3.22: vollst. Graph[3], gerade Eckenanzahl, 2n Ecken:
es ex. **2n-1 kantendisjunkte perfekte Matchings**.

Logisch: wir stellen uns ein (2n-1)-Eck vor, in der Ebene, in der wir alle Ecken verbunden. Wir nehmen eine Seite, gehen nach rechts und links Seite jeweils 1 Punkt weiter, verbinden die Punkte und erhalten so die parallelen Kanten. Nun, am Ende bleibt eine Ecke übrig. Die ist nun mit dem letzten Punkt verbunden, der über dem gesamten Graphen schwebt (3-dimensional!). Wenn wir das für jede Seite machen, erhalten wir 2n-1 kantendisjunkte perfekte Matchings. (2n-1 = maximale Anzahl der Kanten, die in eine Ecke führen.)

[2] Ç(G) = maximale Kantenanzahl
vollst. Graph = jede Ecke mit jeder verbunden

3.6 Starker Zusammenhang und Turniere

Def. 3.24:	**orientierte Kantenfolge**: Kantenfolge, in der alle Pfeile in eine Richtung gehen. (Ecken dürfen sich sogar wiederholen). **starker Zusammenhang:** jeder Punkt von jedem anderen aus **erreichbar**. („Einbahnstraße“ von einer Komponente zur anderen → nicht mehr stark zusammenhängend.). genau eine starke Zusammenhangskomponente! bildet **Äquivalenzrelation!** **zusammenhängend:** normal zusammenhängend, wenn man nicht die Orientierungen betrachtet. **D+k**: Digraph D + Kante k **D+(x,y):** Digraph D + Kante von x nach y.

Bem. 3.17:	Ein **Digraph** ist NICHT die Vereinigung ihrer starken Zusammenhangskomponenten. **PROBLEM**: die gerichteten Kanten zwischen den Graphen werden ja gar nicht betrachtet.

Satz 3.23:	(Übung) : haben ALLE Punkte eine hinführende (oder wegführende) Kante, so gibt es einen **gerichteten Kreis.**

Satz 3.24:	(Übung) :

Satz 3.25:	D zusammenhängender Digraph. Jeder Bogen auf einem orienitierten Kreis → D **stark zusammenhängend**.

Logisch: in einem Kreis kommt man ja eh **von jedem Punkt zu jedem**, und genau das definiert ja einen **orientierten Kreis**.
Andersrum ist auch klar: der Weg a → b → existiert ja, und das ist ja ein Kreis ☺

Satz 3.26:	man kann aus einem Graphen genau dann ein **vernünftiges Einbahnstraßensystem** machen, wenn es **keine Brücke** gibt.

Nun, wenn es eine Brücke gibt, kommen wir eh nicht zurück, klar also.
Wenn es keine Brücken gibt: dann liegt ja JEDE Kante auf einem Kreis. Und somit kommen wir ja immer zurück! ☺ q.e.d.
(Bild in der Vorlesung: ein Viereck, von dem wir wissen, daß es klappt. Dann legen wir ie übrigen Kanten auf einen Kreis der im Viereck anfängt und auch dort endet.)

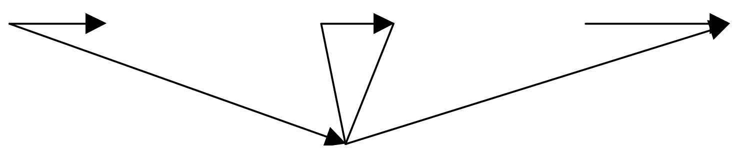
Def. 3.25:	T_n = „n-**Turnier**“ = Orientierung in einem **n-vollständigen** Graphen.

n-vollständig = **jede Ecke mit jeder verbunden**.

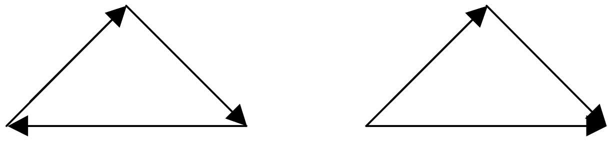
Def. 3.26:	**orientierter Hamilton-Kreis/Weg** = Kreis/Weg, der durch **alle Ecken** geht. **hamiltonischer DiGraph**: es gibt so einen **Kreis**. **semi-hamiltonischer DiGraph**: es gibt so einen **Weg**.

Satz 3.27:	jedes **Turnier** besitzt einen **orientierten Hamilton-Weg.**

z.B. ganz einfach alle Kanten auf einen „Kreis“ legen und aussenrum vebinden. (????)



Def. 3.27: Die beiden möglichen **3-Turniere**:



Dreikreis / zyklisches 3-Turnier **transitives 3-Turnier**

Def. 3.27: <u>**transitives** Turnier</u>: **jedes** (!) **Unter**-3-Turnier ist **transitiv**

d.h. es gibt keinen 3er-Kreis im Graphen.

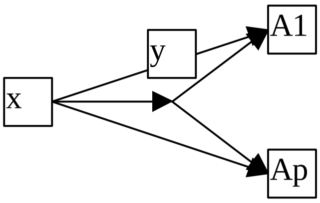
Satz 3.28: <u>Eigenschaften des transitiven Turniers:</u>

1.) es gibt **keinen orientierten Kreis**.

2.).keine 2 Ecken haben die gleiche Anzahl hin- oder wegführender Kanten. → es gibt IMMER EINE Ecke vom Grad 0,1,2,3,4,...,n-1

4.) es gibt **genau einen** orientierten **Hamilton-Weg**.

Zu 4.) : Logisch: es kann ja keinen Kreis geben. Alle Bögen sind also in EINE Richtung orientiert → Hamiltonscher Weg vorhanden.

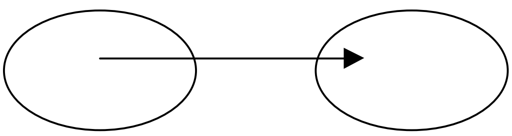


Volleyball-**PROBLEM**: in einem Spiel schlägt A → B → C → A.
dann gibt es keine eindeutige Tabelle. → anderes Kriterium (Torverhältnis) nötig!
<u>ALSO</u>: Turnier NICHT TRANSITIV → keine eindeutige Tabelle!

Def. 3.28: → = „**dominiert**":

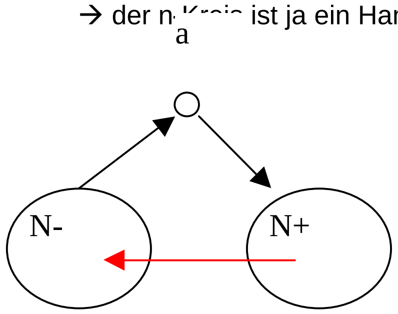
x → y: Pfeil von x nach y, nicht umgekehrt.

D_1 → D_2: **JEDE Ecke** aus D_1 hat einen Pfeil zu **JEDER Ecke** aus D_2, aber nie umgekehrt!



Satz 3.29: **stark zusammenhängendes Turnier** (d.h. man kommt von jeder Ecke zu jeder anderen) → **jede Ecke** liegt auf einem 3-**Kreis**, 4-Kreis,...,n-Kreis.

→ der n-Kreis ist ja ein Hammilton-Kreis.



Folgerung 3.9 (Camion 1959): Turnier **zusammenhängend** 3 Turnier **hamiltonisch**.

Klar: **hamiltonisch** heißt ja, es gibt einen Weg, so dass man **alle Ecken besucht**. Und das geht eben nicht, wenn das Turnier nicht zusammenhängend ist (= jeder Punkt von jedem erreichbar.).

Folgerung 3.10: in jedem **stark zusammenhängenden Turnier** (=man kommt von jeder Ecke zu jeder anderen und der Graph ist vollständig) gibt es **2 Ecken**, die man **einzeln wegnehmen** kann, und der Graph ist noch **stark zusammenhängend**.

Logisch: alle Ecken liegen ja auf n-1-Kreis. (es gibt n Ecken). Nehme ich jetzt die n'te Ecke raus, ist es immer noch stark zusammenhängend.

Bemerkung 3.18: Die **Summe aller Pfeilenden** ist größer-gleich die Summe aller Pfeilenden in einem **Unterturnier mit p Ecken**.
(dort ist es ja bei p=4 3+2+1 = (4 über 2))
(Außerdem lassen sich die Ecken nach ihrer d^+ sortieren.)
Moon hat **1953** herausgefunden, dass jede solche Zahlenfolge, deren **Summe** eben **kleiner** ist als die **Summe aller Pfeilenden im ganzen Graphen** sich auch wirklich **durch ein Turnier realisieren lässt.**

Bemerkung 3.19: Ein Sport-Turnier kann man durch ein Turnier darstellen.

Logisch: jede Ecke hat ja n Kanten, da der Graph vollständig ist. Jede Mannschaft hat ja gleich viele Spiele gespielt (jeder gegen jeden): Und davon d^+ gewonnen und d^- verloren.

Siegreihenfolge **eindeutig**, wenn **transitiv**.
Alternative: alle Ecken durch **2 Bögen** verbinden:
Gewonnen → beide Bögen in 1 Richtung, Unentschieden → 2 Richtungen.
Bundesliga: 4 Bögen, 18 Ecken $=T_{18}^4$

Klar: bei transitivem Graphen konnten wir die Ecken ja durchnummerieren.

Def. 3.29: **r-regulärer Digraph**: $r=d^+=d^-$

d.h. in jede Ecke führen x Pfeile hin und x Pfeile weg.

Vermutung von R. Kelly: jedes reguläre Turnier lässt sich in (n-1)/2 orintiete Hamiltonkreise zerlegen.

Kapitel 4 - Spezielle Graphenklassen

4.1 Bäume und Wälder

Def. 4.1:	**Wald** = Graph ohne Kreise **Baum** = Graph ohne Kreise, zusammenhängend.

Bem. 4.1:	**Wald** ist **schlicht**. (klar: nicht schlicht = parallele Kanten = Kreis ex.) Wälder und Bäume sind **bipartit**.

Logisch: keine Kreise → keine Kreise ungerader Länge. Qed.

Satz 4.1:	**Wald** 3 jede Kante ist **Brücke**.

Logisch, gabt ja gar keine Kreise. (Brücke=Kante, die auf Kreis liegt)

Satz 4.2:	**Baum** 3 2 beliebige Ecken durch **genau einen Weg** verbunden.

Satz 4.3:	**Baum** hat mind. 2 **Endecken**.

Satz 4.4:	**Wald** 3 Ü=**0**

(Ü = Kanten – Ecken + Komponenten)
logisch: es gibt ja keine Kreise, insofern gibt es genau eine Kante weniger als Ecken, bei 1 Komponente passt das ja genau.

Folgerung 4.1:	Baum 3 es gibt 1 Ecke mehr als Kanten: n=m+1, Ì d(x) = 2n-2,

Satz 4.5:	Ì Gradsequenz eines Baumes = Ì der Kantenenden = 2n-2

Def. 4.2:	t_i = **Anzahl** der **Ecken vom Grad i** im Graphen.

Satz 4.6:	$2t_0 + t_1 + 2(Ü-k) = 1t_1 + 2t_2 + \ldots + (Ç-2)E\tau_{(Ç-2)}$

Beweis:

$1t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + it_i = \mathbf{d} = 2m = 2(Ü-k+n) = 2(Ü-k+t_1+t_2+t_3+\ldots+t_i)$

$1t_1 + 2t_2 + 3t_3 + \ldots + it_i = 2Ü-2k+2t_0+2t_1+2t_2+2t_3+\ldots+2t_i$

$(3-2)t_3 + \ldots + (i-2)t_i = 2Ü-2k+2t_0+t_1$

$(3-2)t_3 + \ldots + (i-2)t_i = -2 + t_1$ **Sonderfall Baum!**

Satz 4.7:	**Baum** 3 Satz 4.6 letzte Zeile.

Folgerung 4.2:	In einem **Baum** ist die **Anzahl der Endecken** t_1 (also Grad 1) **nie kleiner** als der **größte vorkommende Grad** Ç.

Logisch: an diesem Knoten mit den meisten Enden hängen ja mindestens so viele Endecken (wenn auch erst irgendwo später: da wo ein Ast weggeht, ist irgendwo auch *mindestens* ein Ende, denn wir haben ja keinen Kreis.)

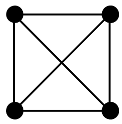
Def. 4.3:	**<u>Gerüst</u>** von G: hat **alle Ecken** von G, aber nur ein **Teil der Kanten**, so dass es ein **Baum** ist.

Satz **4.8**: **Jeder** zusammenhängende **Graph** hat ein **Gerüst**.

Nehmen wir einfach so lange Kanten raus, bis wir keine Kreise mehr haben → fertig.

Satz **4.9**: jeder vollständige Graph besitzt genau n^{n-2} verschiedene Gerüste.

haben wir nicht bewiesen.



4.2 Eulersche Graphen

Def. **4.4**: **semi-eulerscher Graph**, W **Eulerscher Kantenzug**: Haus vom Nikolaus.
eulerscher Graph, W **Eulertour**: Anfang+Ende auch noch 1 Punkt.

Satz **4.10**: **Eulersch** 3 jede Ecke **geraden Grad**.

Logisch: jedes mal, wenn ich durch eine Ecke gehe, „benutze“ ich 2 Eingänge. Als ich aus der 1. raus bin habe ich nur einen benutzt, dahe müssen wir auch da wieder rein. Qed.

Satz **4.11**: **Eulersch** 3 Vereinigung **kantendisjunkter Kreise**

Logisch: dann können wir die Kreise ja einfach aneinanderhängen → fertig.

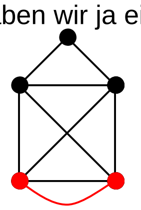
Satz **4.12**: jeder Graph besitzt **geschlossene Kantenfolge**, in der **jede Kante** genau **2x** vorkommt.

Ergibt sich aus 4.10: verdoppeln wir einfach jede Kante, haben wir überall geraden Grad → Satz 4.10 sagt, dass der Graph dann eulersch ist.

Bem. **4.5**: auf einer **Messe**, auf der auf beiden Seiten Exponate sind, gibt es immer optimale Wege, siehe 4.12.

Folgerung **4.3**: **semil-eulersch 3 2** oder keine Ecke **ungeraden** Grades.

Siehe Haus vom Nikolaus: einfach Boden noch mal verbinden und diese Kante wieder rausschmeißen, dann haben wir ja einen Weg. Fertig. ☺



Def. **4.5**: **semi-eulerscher DiGraph**, W **orientierter eulerscher Kantenzug**:
(analog zu 4.4) **eulerscher DiGraph**, W **orientierte Eulertour**:.

Bem. **4.6**: eulerscher Digraph → semi-eulersh + stark zusammenhängend.

Klar: geschlossene Tour heisst ja man kann von überall nach überall kommen.

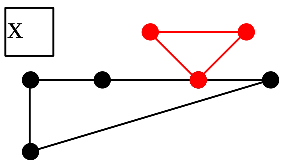
Satz **4.13**: Digraph **eulersch** 3 in jede Ecke gehen so viele **Kanten rein** wie **raus**.

Satz **4.14**: Digraph **eulersch** 3 Vereinigung **bogendisjunkter orientierter Kreise**

Satz **4.15**: **Digraph semi-eulersch** 3 alle Kanten **d+ = d-** oder **bis auf 2**: dort in einer eine Kante **1 mehr rein** und in die andere eine Kante **1 mehr raus**.

Bem. **4.7**: **Eulertour finden**:
1. von x aus gehen, bis man wieder bei x ist.
2. eine Ecke y des Weges nehmen, an die noch weitere anschliesst. Dort wieder einen Kreis nehmen und den an dieser Stelle „zwischenfügen".
3. das immer weiter → fertig.

Das *muss* ja immer passen, weil ja der Grad *jeder* Ecke gerade ist.



4.3 Hamiltonsche Graphen

Def. **4.6**: **<u>Hamiltonscher Graph</u>**: es gibt einen **Kreis**, mit dem man **alle Ecken** besucht.
<u>semi-Hamiltonscher Graph</u>: es gibt einen **Weg** , mit dem man **alle Ecken** besucht.

Muss nicht wie „Haus von Nikolaus" sein; man darf auch Ecken mehrfach besuchen!

Beispiel 4.2: Rösselsprung-Problem

Ein Springer auf einem Schachbrett soll jedes Feld genau 1x besuchen und wieder am Ausgang sein. (Lösung im Skript)

Satz **4.16**: k**(G-S)** £ **|S|** : nimmt man **x Ecken** raus, hat man maximal **x Teile**.

Klar: vorher hatte man ja EINEN Kreis. Nimmt man nun 1 Ecke raus, kann der Graph ja nicht in mehr als 2 Teile zerfallen.

Satz 4.17: für **jede Ecke**, die man aus dem **semi-hamiltonischen Graph rausnimmt**, kann maximal **eine Komponente hinzukommen**.

Logisch; im schlimmsten Fall unterbrechen wir den Weg und haben dann eben 2 Komponenten.

Satz **4.18**: **wie 4.17**. Nur beim Hamiltonischen DiGraph bleibt bei der Rausnahme der **ersten Ecke** die **Anzahl der Komponenten gleich**.

Logisch: wir haben ja einen Kreis; und nach der Rausnahme der 1. Ecke mindestens noch einen Weg.

Satz **4.19**:(**Dirac** 1952): G ist **hamiltonisch**., wenn G **schlicht**[4], mind. **3 Ecken**, **kleinster Eckengrad** (Ô) mind. halb so groß wie Anzahl der Ecken

... ich habe zumindest kein Gegenbeispiel gefunden. (folgt aus 4.21)

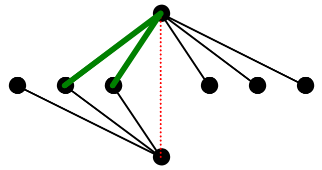
Satz **4.20**: (**Ore** 1960): G ist **hamiltonisch**, wenn der **Grad von 2 *beliebigen* nicht adjazenten Ecken** zusammen kleiner ist als die **Anzahl aller Ecken**.

[4] schlicht = keine parallelen Kanten

(folgt aus 4.21)

Satz **4.21** (**Ore** 1960): Wenn es in **G+ab** einen Kreis gibt, dann gibt es auch in **G** (ohne Kante ab) einen Kreis, wenn **Grad a + Grad b** mindestens so groß wie die Anzahl **aller Ecken**

Nun, a und b sind ja nicht verbunden. (hier die rote gestrichelte Linie.) Aber beide Ecken zusammen sollen mit mindestens so vielen Ecken indizieren, wie es Ecken gibt. Also *muss* es zwangsläufig (mind.) eine Ecke geben, die mit **a** *und* **b** verbunden ist.
In G+ab gab es ja einen Kreis (="hamiltonisch"). Aber es gibt ja jetzt mindestens eine „Ersatzverbindung" für die ausgefallene ab-Linie, und unser Kreis ist wieder da. Qed. ☺



Bem. **4.9**: In einem **bipartiten hamiltonschen Graphen** haben beide **Bipartitionen** die **gleiche Anzahl** von **Ecken**. → **|E| gerade**.

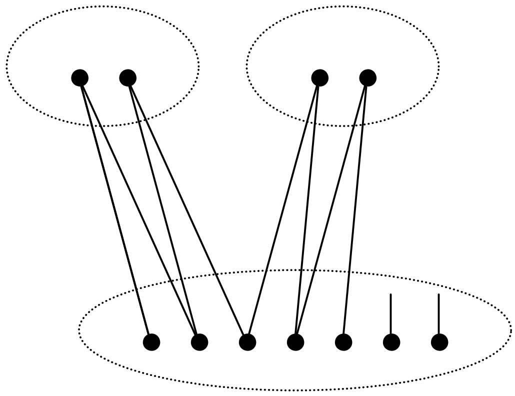
Logisch: im Kreis sind die Ecken abwechselnd in A und B. Will man hin und zurückgehen, braucht man ja für jede Ecke auf A eine auf B.

Beispiel 4.4: …..

Def. **4.7**: **p-partiter Graph:** wenn man nur eine Partition betrachtet, gibt es keine Verbindungen mehr.
vollständiger p-partiter Graph: jede Mögliche Verbidnung zwischen den Partitionen besteht.
$\mathbf{r_i}$**:** Anzahl der Ecken in der Partition i.

Satz **4.22**: ein **vollständiger** bipartiter Graph ist genau dann **hamiltonisch**, wenn die **größte Partition nicht** mehr Ecken hat als alle **restlichen** zusammen.

Logisch: In einem Kreis dürfen wir ja – wie in einem Weg – keine Ecke doppelt besuchen. Wir müssen jedoch, um alle Ecken unserer größten Partition abzuklappern, jeweils auf eine Ecke einer anderen Partition gehen und zurück – diese Ecke ist dann „verbraucht".
Haben wir nicht zumindest so viele Ecken zur Verfügung wie unsere größte Partition hat, so haben wir ein Problem: wir finden keinen Kreis. (= „nicht hamitlonisch".) qed.



Satz **4.23**: Ein **Digraph** ist **hamiltonisch**, wenn die kleinste Anzahl hin- oder wegführender **Kanten** mindestens halb so groß ist wie die **Anzahl** aller **Ecken**.

Das lässt sich sicher auch irgendwie beweisen. Lassen wir das andere machen. ;)

4.4 Planare Graphen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit der überschneidungsfreien Zeichenbarkeit von Graphen.

Def. **4.8**: **Jordankurve**: stetige, schnittpunktfreie Kurve mit Anfangs- und Endpunkt.

In unseren Graphen ist eine Jordankurve also genau eine Gerade.

Def. **4.9**: Graph **einbettbar** in den Raum R^p, wenn man den Graphen darstellen kann, **ohne** eine **unstetige Kurve**[5] oder eine **Überschneidung** zu haben.

Satz **4.24**: Jeder Graph lässt sich in den R^3 einbetten.

Rafiniert: wir legen alle Punkt auf die x-Achse. Für jede Kante nehmen wir dann eine neue Ebene, die durch die x-Achse geht → ferig! ☺ ☺

Def. **4.10**: **planarer, plättbarer, ebener Graph:**
überschneidungsfrei mit geraden Kanten im R^2darstellbar.
Einbettung: *eine* Darstellung dieses Graphen in der Ebene.

Def. **4.11**: **Länder**: Gebiete in planaren Graphen. bilden **Landkarte**.
(adjazent = benachbart.)
l(G) = Anzahl der Länger in G.

Def. ByMyself: **InLand** = Land, dass nicht das unbeschränkte Aussenland ist.

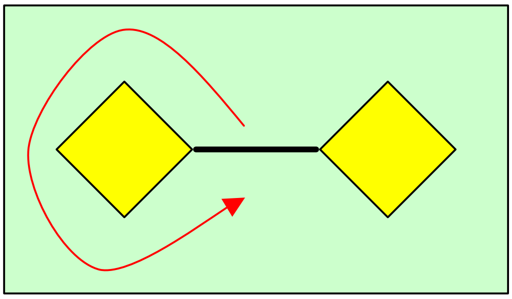
Satz **4.25**: es gibt Ü **InLänder** + Außenbereich: **l** = Ü**+1**

Klar: in einem Kreis haben wir m=n, also Ü=1 → 1 InLand → korrekt.
Jede extra-Kante teilt nun den Kreis: m+1 → Länder+1 → korrekt.
Eine neue Komponente, als Kreis gestaltet (Kreis: m=n → neutral) bringt wieder ein Land mehr: κ+1 → Länder+1 → korrekt.

Folgerung **4.4**: n+l-m=2

Einfach nachrechnen.

Folgerung **4.5**: k **Brücke** von g 3 k Rand von genau 1 Land.



[5] unstetig= es ist nicht erlaubt, dass die Kurve steigt und dann wieder fällt.

Def. **4.12:** Taillenweite eines Graphen = Länge des kleinstmöglichen Kreises.

Ist in einem Wald ∞.

Satz **4.26**: **l*t £ 2m** und s.u.
Es gibt mindestens doppelt so viele Kanten wie Taille*Anzahl Länder.

Klar: betrachten wir einen **Kreis** z.B. der Länge **6**, der ist unsere Taille. → **l=2**, **t=6**.
Wir haben 6 Kanten, passt:
Jede Kante müssen wir ja ausserhalb des Kreises hinzufügen:.
Länder+1 → **Kanten** mind. **+2** → passt.
Kreislänge+1 → **Kanten +1** → passt. Qed.

2m ≥ tEl | **l**=1+Ü, Ü=m-n+k
2m ≥ tE(1+m-n+k)

2m ≥ -t(-1-k+n)+mt | -mt
m(2-t) ≥ -tE(-1-k+n) |E(-1)
m(t-2) ≥ tE(n-1-k) | k ist immer mindestens 1
m ≤ [**t/(t-2)**]E**(n-1-k)** ≤ [**t/(t-2)**]E**(n-2)**

Folgerung **4.6**: **m £ 3(n – 2)** : im <u>schlichten</u>, <u>planaren</u> Graph (mit mind. <u>3 Ecken</u>)

Klar: t/t-2 ist ja immer kleiner 1. → fertig.

Satz **4.27**: **K_5** und **$K_{3,3}$** sind nicht planar.[6]

Ergibt sich aus o.g. Sätzen.

Satz **4.28**: Im planaren Graphen gilt:
i) schlicht → kleinster Eckengrad kleiner als 5.
ii) Taille t mind. 4 → Ô max. 3
iii) Taille t mind. 6 → Ô max. 2

Lässt sich alles mit dem vorherigen Satz zeigen.

Def. **4.13:** **unterteilen** von Kanten,
Unterteilungsgraph = Ausgangsgraph, in dem ein paar Kanten unterteilt sind.

Def. **4.14**: Graphen **H_1, H_2 homöomorph**: Unterscheiden sich nur durch Unterteilungen von einem Graphen G.

Satz **4.29**: (Kuratowski 1930): planar 3 Graph hat keine Teilgraphen, die homöomorph zu K_5 oder $K_{3,3}$ sind.

Def. 4.15: **Färbung** einer Lankdarte: an einer Kante darf sich nicht dieselbe Farbe treffen; an einer Ecke hingegen schon.

Vierfarbenvermutung: man braucht max. 4 Farben zur Färbung einer Landkarte.

[6] **K5**: volltsändiger Graph mit 5 Ecken, **K3,3**: vollständiger bitapriter Graph 3,3.

4.5 Netzwerke

Def. **4.16:**	**Netzwerk**: Digraph mit einer **Quelle** (nur ausgehende Bögen) und einer **Senke** (nur hinführende Bögen)

Def. **4.17**:	f(B): Zahl auf diesem Bogen (Kapazität) f(Bogenmenge) = Summe der Zahlen dieser Bögen. f^+: Summe der Zahlen, die aus f rausführen (= rausFluss) f^-: Summe der Zahlen, die in f reinrühren (= reinFluss) Wenn wir in eine Ecke reingehen, können wir nur so viele Bagger mitnehmen, wie auch duch den Ausgang passen. (4.6) **Null-Fluss**: geht immer: wenn wir nix transportieren wollen, passt auch jeder Weg.

Satz **4.30**:	$f^+(u) = f^-(v)$

In einem „Fluss“ schicken wir in u genau so viele Bagger los, wie auch am Ende in v wieder ankommen können.

Def. **4.18:**	**Flusstärke** w = $f^+(u) = f^-(v)$ **maximaler Fluss**: Funktion f ist maximaler Fluss, wenn durch alle Verbindungen zwischen unserer Unterteilung bereits die maximale Anzahl Bagger durchgeht. **Schnitt** im Graphen: alle Bögen, die wir durchschneiden, um um unseren Graphen in 2 Eckenmengen zu teilen. **Kapazität cap**: die Summe der Nummern (=Durchfluss) aller Bögen, die wir durchschnitten haben. **minimaler Schnitt**: Schnitt, bei dem wir die wenigste Kapazität wegnehmen. (also die Summe der Zahlen an den durchschnittenen Bögen am kleinsten ist.)

Flusstärke ist also genau die Zahl der Bagger, die durch unser Netzwerk passen.
(statt Bagger kann man auch TCP/IP – Pakete sagen)

Hilfssatz **4.1**:	

Kapitel 5 - Kombinatorik

5.1 Kombinationen

Def.:	**Kombination** = Elemente aus einer Menge beliebig aneinandergereiht. - mit / ohne Wiederholung **4. Ordnung** = 4 Elemente.

Def. 5.1:	**geordnetes K-Tupel** **mit** Wiederholung, **mit** Reihenfolge beachten: **V**(n,k) = Möglichkeiten bei k aus n Elementen

Satz 5.1:	V(n,k) = $\mathbf{n^k}$: es gibt n^k Permutationen.

Logisch: bei jeder Ziehung haben wir wieder alle Möglichkeiten, also nEnEnE...En Möglichkeiten.

Bem. 5.1:	... ist dasselbe wie **Abbildung** k-Menge in n-Menge.

Satz 5.2:	Die Menge aller **schlichten Graphgen** der Ordnung n ist $2^{\binom{n}{2}}$

Logisch: der volständige Graph hat n über 2 Kanten, und man kann ja nun jeder einzeln weglassen → n über 2 Möglichkeiten.

Def. 5.2:	**geordnetes K-Tupel** **ohne** Wiederholung, **mit** Reihenfolge beachten: **V**(n,k) = Möglichkeiten bei k aus n Elementen

Satz 5.3:	**P**(n,k) = n! / (n-k)! z.B. n=10, k=3

Logisch:
1.) ohne Wiederholung: jedes mal 1 Möglichkeit weniger: 10E9E8

Bem. 5.2:	… ist dasselbn wie Anzahl injektive[7] Abb. k → n

Def. 5.3:	**geordnetes K-Tupel** **ohne** Wiederholung, **ohne** Reihenfolge beachten: **C**(n,k) = Möglichkeiten bei k aus n Elementen

Satz 5.4:	**C**(n,k) = (n über k) = n! / (k!E(n-k)!)

Logisch:
1.) ohne Wiederholung: jedes mal 1 Möglichkeit weniger: 10E9E8
2.) ohne Reihenfolge beachten: für die 1. 3 Plazierungen identisch, dann 2 und 1 Also alles noch mal durch 3E2E1 teilen → et voilà.

Def. 5.34:	**geordnetes K-Tupel** **mit** Wiederholung, **ohne** Reihenfolge beachten: **W**(n,k) = Möglichkeiten bei k aus n Elementen

Satz 5.5:	**C**(n,k) = **(n+k-1 über k)** = (n+k-1)! / (k!E(n-1)!

[7] Injektive Abb. = Bilder müssen verschieden sein.

5.2 Permutationen

Def. 5.5: Permutation von n Elementen **mit Wiederholung**

Satz 5.6: aEaEbEcEcEcEc: es gibt (7)! / 2!E1!E4! Permutationen.

Logisch: das **erste Element** können wir auf **7 verschiedene**, das nächste noch auf 6 usw. Positionen setzen.
Danach müssen wir die **„identischen" Permutationen** wieder rausnehmen: Bei a 2 Möglichkeiten, bei b eine, bei c hat das erste Element 4, das nächste 3,... Möglichkeiten: jede dieser Möglichkeiten ist jedoch identisch; daher müssen wir diese wieder rausnehmen (also durch diese teilen.)

Bem. 5.3: p: Permutation
S_n: Menge der Pemutationen , **$|S_n| = n!$**
„Permutationsgruppe": die Permutationen sin Gruppen.

$|S_n| = n!$ folgt unmittelbar: der 1. Platz kann durch n Elemente besetzt werden, der 2. durch n-1, usw.

Def. 5.6: **„Zylkus"**: Zahlen in einem Kreis. <1,2,4,5> = ...1245124512451...
disjunkter Zyklus: es gibt kein Element, das in beiden Zyklen ist.

Satz 5.7: 2 **Zyklen disjunkt** → Abbildungen **abelsch**. (d.h. f6g = g6f)

Satz 5.8: **Permutation**: eindeutig als Komposition disjunkter Zyklen darstellbar (bis auf die Reihenfolge)

Das ist genau die Permutations-Geschichte wie in L.A.:
1 2 3 4 5 6 7 8
2 3 7 4 8 5 1 6 → <1,2,3,7><4><5,8,6>

Bem. 5.4: Permutation π: π besteht aus m Zyklen: π?=p_1Ep_2Ep_3

Def. 5.7: **$s_{n,k}$: Stirling-Zahlen 1. Art**:
Anzahl der **Permutationen** aus S_n, die aus genau **k Zyklen** bestehen.
k = b(p**)**: Gesamtzahl der Zyklen der Permutation π.
b_3(p**)**: Anzahl der Zyklen der Länge 3 (o.b.d.A.)
Fixpunkt: Zyklus der Länge 1.

Beispiel 5.7: **b_3(**p**)** ist dann also in einer Permutation die Anzahl der Klammern <> mit 3 Zahlen drin.
$s_{n,1}$ = (n-1)!: Anzahl der möglichen Permutationen bei insgesamt n Zahlen und nur *einem* Zyklus: das sind dann logischerweise (n-1)! Möglichkeiten.

(die 1. Zahl ist festgelegt; wäre ja egal wo wir sie hinpacken, da wir ja einen Zyklus haben. Alle weiteren Zahlen sind dann beliebig permutierbar.

$s_{n,n-1}$ = (n over 2) = nE(n-1)/2 <3><4><5><6,7>

n Zahlen und n-1 Zyklen heißt, wir haben *einen* 2- Zyklus und den Rest Fixpunkte.
für den 1. Platz dieses 2-Zyklus haben wir n, für den nächsten n-1 Möglichkeiten.
Diese 2 Zahlen können wir noch auf 2 Arten anprdnen, also nochmal / 2. → fertig.

Bem. 5.5: $\mathbf{b(p) = Ì\ b_i(p)}$

Die Gesamtzahl aller Zyklen ist gleich der Summer der Zyklen der Länge 1,2,3,4,5,...,n. (bei n Zahlen)

$\mathbf{n = Ì\ iEb_i(p)}$

Die Anzahl der Zahlen in einer Permutation ist gleich die Summe aus der Anzahl der Elemente jeder einzelnen Partition.

$\mathbf{n! = S_{n,1} + S_{n,2} + \ldots + S_{n,n}}$

n! ist ja die Anzahl *aller* möglichen Zyklen. Und das ist logischerweise die Summe aus allen Zyklen, die aus genau 1,2,3,4,... Permutationen bestehen
(logisch; zusammen geben diese ja wieder alle möglichen Permutationen).

Satz 5.9: Anzahl der möglichen Permutationen =
$\mathbf{n! / [\ b_1!Eb_2!E\ldots Eb_n! \quad E \quad 1^{b1}E1^{b2}E\ldots E1^{bn}\ ]}$

Die Anzahl der möglichen Permutationen ist gleich n! (also alle Möglichkeiten, n Zahlen anzuordnen) geteilt durch [das Produkt der Fakultäten der Anzahlen der Zyklen einer bestimmten Länge (Zyklen gleicher Größe untereinander vertauschbar) mal dem Produkt der Längen ALLER Zyklen (jeder Zyklus kann mit jeder vorkommenden Zahl beginnen („durchshiften“)]

nehmen wir folgenden Zyklus (o.B.d.A): <000><000><000><00><00><00><0><0><0><0>
(also 3x3, 3x2, 4x1).
Wenn wir alle Plätze einfach der Reihe nach auffüllen , haben wir **n!** Möglichkeiten.
<u>Jetzt müssen wir die rausschmeißen, die zu viel sind:</u>
1.) innerhalb jeder Partition können wir mit jedem Element anfangen: also haben wir 3E3E3E2E2E2E1E1E1E1 = $\mathbf{3^3 + 2^3 + 1^4}$ Möglichkeiten. (klar.)
2.) innerhalb des roten, gelben und grünen Bereiches können wir die einzelnen Zyklen noch mal umtauschen: → **3!**E**3!**E**4!** Möglichkeiten fliegen also noch mal raus.

! BEACHTE !: <123><45> und <45><123> sind ja dasselbe. Hier wird aber eh nur die 1. Möglichkeit betrachtet, da wir von Anfang an nur die „Templates“ zugelassen sind, wo die Zyklen in absteigender Größe aufgeschrieben sind !!!

Folgerung 5.2:

$S_{n,k}$ ist ja die Anzahl der mögichen Permutationen aus genau k Zyklen. Dies ist die Formel von oben, wobei die Summe aller b_i (Anzahl der Zyklen mit i Elementen) genau gleich k sein muß.
n! ist übrigens – wie bekannt – ja die Summe aus allen $S_{n,k}$.

Satz 5.10: $S_{n,k} = S_{n-1,\mathbf{k-1}} + (n-1)Es_{n-1,\mathbf{k}}$ | $S_{n,n} = 1$ | $S_{n,1} = (n-1)!$,

$S_{n,k}$ = Anzahl der verschiedenen Permutationen mit n Zahlen und k Zyklen:
denken wir uns die eine Zahl, die wir wegnehmen, als 1. Zahl („Zahl 1“).
FALL 1: Die „Zahl 1“ ist irgendwo in der Reihe, aber als 1-Zyklus: wenn wir diese Zahl und diesen Zyklus nun weglassen, (und dann ggf. wieder als einzelnen Zyklus hinzufügen), haben wir trotzdem die gleiche Anzahl an Permutationen. (Zahl –1 und Zyklus –1).
FALL 2: Die „Zahl 1“ ist Teil eines Zyklus. Die Permutation MIT der Zahl 1 (also 1 Zahl weniger, aber genau so viele Zyklen) hat jetzt (n-1) mal so viele Permutationen, da wir die Zahl 1 ja vor jeder beliebigen Zahl der Reihe einfügen können, und jedes Mal eine andere Permutation erhalten.

qed.

Bem. 5.6: $S_{n,2}$ = (n-1)! E [(1/n-1) + (1/n-2) + (1/n-3) + ... + (1/2) + (1/1)]

$S_{6,2} = S_{5,1} + 5ES_{5,2}$
$S_{6,2} = S_{5,1} + 5E[S_{4,1} + 4ES_{4,2}]$
$S_{6,2} = S_{5,1} + 5E[S_{4,1} + 4E[S_{3,1} + 3ES_{3,2}]\ ]$
$S_{6,2} = S_{5,1} + 5E[S_{4,1} + 4E[S_{3,1} + 3E[S_{2,1} + 2ES_{2,2}]\ ]\ ]$
$S_{6,2} = S_{5,1} + 5E[S_{4,1} + 4E[S_{3,1} + 3E[S_{2,1} + 2E\ \ 1\ ]\ ]\ ]$
$S_{6,2} =$ **4!** + 5E[**3!** + 4E[**2!** + 3E[**1!** + 2E **1**]]]
$S_{6,2} =$ **4!** + 5E[**3!** + 4E[**2!** + 3E**1!** + 3E2E **1**]]
$S_{6,2} =$ **4!** + 5E[**3!** + 4E**2!** + 4E3E**1!** + 4E3E2E **1**]
$S_{6,2} =$ **4!** + 5E**3!** + 5E4E**2!** + 5E4E3E**1!** + 5E4E3E2E **1**
$S_{6,2} =$ **5!** [1/5 + 1/4 + 1/3 + 1/2 + 1]

Folgerung 5.3: x(x+1)...(x+n-1) = Ì (k von 0 bis n) $\mathbf{s_{n,k}x^k}$

→ zu beweisen !!!!!!

5.3 Zahlenpartitionen

Def. 5.8: **p(n,k)** = **k-Zahlenpartitionen**: Möglichkeiten, die Zahl **n** in **k** **Summanden** zu zerlegen.
A(n,k) = **geordnete** k-Zahlenpartitionen: mit Beachtung der Reihenfolge.

Satz 5.11: $$A(n,k) = \binom{n-1}{k-1}$$

→ zu beweisen !!!!!!

Satz 5.12: **p(n,k)** = p(n-1,k-1) + p(n-k,k).

→ zu beweisen !!!!!!

Satz 5.13: $$\lim_{n\to\infty} p(n,k)\cdot\frac{k!\cdot(k-1)!}{n^{k-1}} = 1$$

→ zu beweisen !!!!!!

Satz 5.14: **p(n,3) = $\mathbf{n^2}$ / 12**

→ zu beweisen !!!!!!

Bem. 5.7: Es gibt eine Näherungsformel für p(n)

p(n) = p(n,1) + p(n,2) + ... + p(n,n)

5.4 Mengenpartitionen

Def. 5.9: Sterling-Zahlen 2. Art:
$\mathbf{S_{n,k}}$ = Anzahl der möglichen Zelegungen einer Menge von **n** Zahlen in **k** Mengenpartitionen. ($S_{0,0} = 1$, $S_{0,k}=S_{n,0} = 0$)
„**geordnete k-Mengenpartition**“: Berücksichtigung der Reihenfolge der Blöcke.

Bem. 5.8: $S_{n,k}$Ek! : Möglichkeiten bei Beachtung der Reihenfolge der Blöcke

Klar: wir haben ja k! Möglichkeiten, die Blöcke anzuordnen.

Satz 5.15: $S_{n,k} = S_{n-1,\mathbf{k-1}} + \mathbf{k}ES_{n-1,\mathbf{k}}$

Satz 5.16: Formel für die Sterling-Zahlen 2. Art:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{n}$$

Def. 5.10: **B_n = Bell-Zahlen**: Summe aller Sterling-Zahlen bei k von 0 bis n.

Bem. 5.9: Die Bell-Zahl ist als die **Anzahl der Zerlegungen einer Menge**.

Satz 5.17:
$$B_{n+1} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Satz 5.18: $r^{n} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} k! S_{n,k}$

Bem. 5.10: **$k!S_{n,k}$** ist auch die Menge der injektiven Abbildungen von einer k-Menge in eine r-Menge.

Folgeung 5.4:
$$x^{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k} k! S_{n,k}$$

5.5 Das Prinzip der Inklusion und Exklusion

Satz 5.19: