Klausurvorbereitung - Diskrete Strukturen

Thorsten Uthke

13. September 1999

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwissen

Definition 1.1 (Ring)
$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring**, wenn gilt

1) R ist Menge, $+ : R \times R \to R$ mit $(a,b) \mapsto a+b$, $\cdot : R \times R \to R$ mit $(a,b) \mapsto a \cdot b$.
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in R$.
3) Es ex. ein Element $0 \in R$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in R$.
4) Für alle $a \in R$ ex. $-a \in R$ mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
5) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$.
6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$.
7) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$.

Definition 1.2 (Äquivalenzklasse, Restklasse)
Definiere auf $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzrelation $a \sim b :<=> m | a - b \quad (m \text{ teilt } (a-b))$.
Hierdurch ist auf $\mathbb{Z}$ eine Partition in Äquivalenzklassen gegeben.

Sei $[a] = \{b \in \mathbb{Z} | b \sim a\}$ die **Äquivalenzklasse** von a.
$\overline{a} := [a] = \{a, a + 1 \cdot m, a + 2 \cdot m, \dots\}$ heißt dann die **Restklasse** von a.

Definition 1.3 (Restklassenring modulo m)
$\mathbb{Z}_m := \{\overline{a} | a \in \mathbb{Z}\}$, z. B. $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$
Definiere auf $\mathbb{Z}_m$ die Addition $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a+b}$ und die Multiplikation $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.
Dann ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ring, der sogenannte "**Restklassenring modulo m**".

Definition 1.4 (Potenzreihenring)
R sei Ring-mit-1 (d. h. es ex. ein Element $1 \in R$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in R$).
$R[[x]] := \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k | a_k \in R\}$ heißt der **Potenzreihenring über R in der Unbestimmten** x.

Definition 1.5 (Cauchy-Produkt)
$(R[[x]], +, \cdot)$ ist ein Ring, mit $+, \cdot$ wie folgt:

$+ : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

$\cdot : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k := \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$

Partialbruchzerlegung:

- $\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$
  $A = \frac{5x-7}{x-2}|_{x=1} = \frac{-2}{-1} = 2$, $B = \frac{5x-7}{x-1}|_{x=2} = \frac{3}{1} = 3$
  $=> \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

- $\frac{x^2+3}{x(x^2+2x+1)} = \frac{x^2+3}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \otimes$
  $A = \frac{x^2+3}{(x+1)^2}|_{x=0} = 3$, $C = \frac{x^2+3}{x}|_{x=-1} = -4$
  Setze in $\otimes$ $x = 1$ ein:
  $\frac{4}{4} = 3 + \frac{B}{2} - 1 => B = -2$

- Falls Zählergrad $\geq$ Nennergrad: Polynomdivision z. B. $\frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2+3}$

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2+3)(x+2) - 2x - 3 \\
\underline{-(x^3 \qquad\quad + 3x)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-(2x^2 \qquad + 6)} \\
\qquad\qquad\quad -2x - 3
\end{array}
$$

$=> \frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2+3} = x + 2 + \frac{-2x-3}{x^2+3}$

- Falls sich der Nenner nicht zerlegen läßt z. B. $\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$
  $\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \bigoplus$
  $A = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x+1}|_{x=1} = \frac{2}{3}$
  Setze in $\bigoplus$ $x = 0$ ein:
  $\frac{-1}{-1} = -\frac{2}{3} + C => \frac{5}{3}$
  Setze in $\bigoplus$ $x = -1$ (willkürlich gewählt) ein:
  $\frac{2-1-1}{1+3} = -\frac{2}{6} + \frac{-B+\frac{5}{3}}{1-1+1} <=> 0 = -\frac{1}{3} - B + \frac{5}{3} => B = \frac{4}{3}$

- Falls sich der Nenner nur in $\mathbb{C}$ zerlegen läßt z. B. $\frac{1}{x^2+1}$
  $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i}$
  $A = \frac{1}{x+i}|_{x=i} = \frac{1}{i+i} = \frac{i}{i(i+i)} = -\frac{i}{2}$, $B = \frac{1}{x-i}|_{x=-i} = \frac{i}{2}$

2 Partielle Ordnungen

Definition 2.1 (Partielle Ordnung, Poset)
Sei P eine Menge. Eine **(partielle) Ordung** auf P ist eine Relation $\leq$ auf P, so daß für alle $x, y \in P$ gilt:

(i) $x \leq y$ (reflexiv)
(ii) $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert $x = y$ (antisymetrisch)
(iii) $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$ (transitiv)

$(P, \leq)$ heißt dann **(partiell) geordnete Menge** oder **Poset**[1]

Definition 2.2 (Vergleichbar)
Elemente $x, y \in P$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.
Sind sie nicht vergleichbar, schreibt man $x||y$.

Definition 2.3 (Kette, total geordnet)
Eine Teilmenge $C \subset P$ heißt **Kette** oder **linear** bzw. **total geordnete Menge** in P, wenn je 2 Elemente von C direkt vergleichbar sind.

$\underline{n}$ sei die Kette $0 < 1 < 2 < \ldots < n-1 \quad (n \in \mathbb{N})$

Definition 2.4 (Antikette)
Eine Teilmenege $A \subset P$ heißt **Antikette**, wenn keine 2 Elemente von A vergleichbar sind.

$\overline{n}$ sei die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ als Antikette aufgefaßt

Definition 2.5 (Überdeckung)
Sei P Poset und $x, y \in P$. $x \prec y$ (x wird überdacht von y) :<=> y überdeckt x
:<=> $x < y$ und $x \leq z < y \Rightarrow x = z$ (d. h. es gibt kein Element zwischen x und y)

Definition 2.6 (gesättigt/saturiert)
Eine Kette $C \subset P$ heißt **gesättigt** oder **saturiert**, wenn C eine Folge von Überdeckungen ist.

Definition 2.7 (Transitive Hülle/Abschluß von $\prec$)
Die Ordnung $\leq$ von P ist die **transitive Hülle** bzw. **Abschluß** von $\prec$. (D. h. für alle Folgen $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$ in der Menge P sind alle Elemente solcher Folgen per $\leq$ vergleichbar.)

Definition 2.8 (Hasse-Diagramm)

(i) jedem $x \in P$ entspricht genau ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ (injektive Abb.).
(ii) $x \prec y$ entspricht genau einer Strecke zwischen x, y.
(iii) x und y dürfen nicht durch eine waagerechte Linie verbunden werden.

2.1 Beispiele für Ordnungen

a) Natürliche Ordnung: $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
b) Ordnung durch Inklusion:
X sei Menge. $\mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\}$
$A \leq B$:<=> $A \subset B$ für $A, B \in \mathcal{P}(X)$
$A \prec B$ <=> $B = A \cup \{a\}, a \notin A$ (um ein Element größer)
Für $X = \{1, 2, \ldots, n\} =: [n]$ wird $(\mathcal{P}(X), \leq) = \mathfrak{B}_n$ bezeichnet.
c) Statt der vollständigen Potenzmenge kann auch eine beliebige Teilmenge $S \subset \mathcal{P}(X)$ durch Inklusion geordnet werden.

[1] **p**artially **o**rdered **set**

d) Teilbarkeit:
$\mathbb{N}$ mit $m \leq n :<=> m|n$, d. h. $\exists k \in \mathbb{N} : n = k \cdot m$
$m \prec n <=> \frac{n}{m}$ ist prim
(Bei $\mathbb{N}_0$ ist die 0 größer als alle $n \in \mathbb{N} : \frac{0}{n} = 0$)

e) Für A endliches "Alphabet" (linear geordnet) mit "Buchstaben" $a \in A$:
$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n) | a_1, \ldots, a_n \in A\}$ ist die Menge der Worte der Länge n.
$P = A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ ist die Menge aller endlichen Worte über A.
Ordnungen:

- Präfixordnung:
  $u \leq v :<=> u = a_1 \ldots a_n$ und $v = a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_s$
- Unterwortordnung:
  $u \prec v :<=> u$ entsteht aus v durch Streichen eines Buchstabens
- lex(ikographische) Ordnung:
  $u < v :<=> u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $u_{k+1} < v_{k+1}$
  Beispiel: $11 \prec 12 \prec 21 \prec 22 \prec 31 \prec \ldots$
- colex(ikographische) Ordnung:
  wie lex-Ordnung, aber Worte hinten beginnend vergleichen
  Beispiel: $11 \prec 21 \prec 31 \prec 12 \prec 22 \prec \ldots$
- rev(erse) lex-Ordnung:
  $u < v :<=> u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $u_{k+1} > v_{k+1}$
  Beispiel: $32 \prec 31 \prec 22 \prec 21 \prec 12 \prec 11$

Definition 2.9 (Mengenpartition, Blöcke)
Sei $n \in \mathbb{N}, [n] := \{1, \ldots, n\}$. Dann heißt $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ **(Mengen)partition** von $[n]$, wenn alle $B_i \neq \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^k B_i = [n]$ und $B_i \neq B_j$ für alle $i \neq j$. Die B_i heißen **Blöcke** von B.

Beispiel: $B = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4, 6\}\}$, abgekürzt $135|2|46$, ist Partition von $[6]$.

f) P_n ist dann die Menge aller Partitionen von $[n]$ mit:
$A \leq B :<=>$ jeder Block von A ist in einem Block von B enthalten.
$A \prec B <=>$ es wird genau ein Block von B in zwei in A aufgespalten.

Definition 2.10 (Zahlenpartition, Länge)
Sei $n \in \mathbb{N}. \lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ heißt **Zahlenpartition** von n, kurz $\lambda \vdash n$, wenn $|\lambda| := \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = n$ ist, und $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{N}$ gilt.
$k =: l(\lambda) =$"Anzahl der Elemente in λ" heißt **Länge** von λ.

Beispiel: $\lambda = (4, 2, 2, 2, 1, 1) \vdash 12$ ist Partition der Länge 6. Kann man auch als $\lambda = 4^1 2^3 1^2$ schreiben.

Darstellung von λ als **Ferrer-Diagramm**

g) Zwei Ordnungen über Zahlenpartitionen:

- **Young-Ordnung**:
  Y_λ zu gegebener Partition λ ist die Menge aller μ, die sich aus λ erzeugen lassen (Durch Weglassen eines Kästchens im Ferrerdiagramm (incl. λ selber).
  Geordnet durch Inklusion.
- **Dominanz-Ordnung**:
  D_n zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ ordnet alle möglichen Partitionen $\lambda \vdash n$ folgendermaßen:
  $\lambda \geq \mu :<=> \lambda_1 + \ldots + \lambda_t \geq \mu_1 + \ldots + \mu_t$ für alle $t \geq 1$, wobei $\lambda_t, \mu_t := 0$ für $t \geq l(\lambda), l(\mu)$.
  D. h. jede Teilsumme muss $\geq$ sein, also $4^1 3^1 1^1 \prec 5^1 2^1 1^1$ während $4^1 3^1 1^1$ nicht vergleichbar mit $5^1 1^3$ ist.

Definition 2.11 (S_n Permutationen)
Die symetrische Gruppe S_n aller bijektiven Abbildungen der Menge $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ in sich selbst ist auch die Menge der Permutationen von $[n]$. Eine Permutation schreibt man als Liste der Bilder $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$.

h) $S_n := B_{ij}([n])$ mit folgenden beiden Ordnungen:

- **Schwache Ordnung**:
  $\pi = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(n)$
  $\sigma \prec \pi :<=> \sigma = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i+1)\pi(i)\pi(i+2)\ldots\pi(n)$ mit $\pi(i+1) < \pi(i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
  (D. h. zwei Glieder von π, die hintereinander stehen und noch in korrekter Reihenfolge ($<$) sind, werden in σ vertauscht, z. B. $213 \prec 231 \prec 321$.)
- **Starke Ordung**:
  $\pi = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(j-1)\pi(j)\pi(j+1)\ldots\pi(n)$
  $\sigma < \pi$, wenn $\sigma = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(j)\pi(i+1)\ldots\pi(j-1)\pi(i)\pi(j+1)\ldots\pi(n)$ mit $\pi(j) < \pi(i)$ für $i, j : 1 \leq i < j \leq n$.
  (D. h. zwei Glieder von π, die noch in korrekter Reihenfolge ($<$) sind, werden in σ vertauscht, z. B. $213 < 231$ aber auch $213 < 312$.)

Definition 2.12 (Inversionen und Länge von π)
$I(\pi) := \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n, \pi(j) < \pi(i)\}$ heißt Menge der **Inversionen** von π (also die Anzahl der Vertauschungen, die von der Original-Reihe bis π vorgenommen wurde).

$l(\pi) := |I(\pi)|$ heißt **Länge** von π.

Definition 2.13 (maximal, minimal)
Sei P Poset und $Q \subset P$.
Dann heißt $a \in Q$ **maximal** in Q, wenn $a \leq x \in Q => a = x$.
Dann heißt $a \in Q$ **minimal** in Q, wenn $a \geq x \in Q => a = x$.

Definition 2.14 (Maximum, Minimum)
Sei P Poset und $Q \subset P$.
Dann heißt $a \in Q$ **Maximum** in Q, wenn $\forall x \in Q : a \leq x \in Q => a = x$ ($a = max\ Q$).
Dann heißt $a \in Q$ **Minimum** in Q, wenn $\forall x \in Q : a \geq x \in Q => a = x$ ($a = min\ Q$).

Definition 2.15 (top-Element, bottom-Element)
Sei P Poset und $Q \subset P$.
Falls $\max(Q)$ existiert, nennt man es **top-Element**, kurz $\hat{1}$ oder $\top$.
Falls $\min(Q)$ existiert, nennt man es **bottom-Element**, kurz $\hat{0}$ oder $\perp$.

Definition 2.16 (Breite, Kettenzerlegung)
Sei P endliches Poset. Die Zahl $M = M(P) := \max\{\#(A) | A \subset P \text{ ist Antikette}\}$ (Länge der größten Antikette) heißt **Breite** von P. (Entspricht der breitesten Stelle im Hasse-Diagramm.)
Die minimale Anzahl von Ketten, in die sich das Poset zerlegen läßt, ist

$$m = m(P) := \min\{k | \underbrace{C_1, \ldots, C_k \subset P \text{ sind Ketten, } P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i}_{\textbf{Kettenzerlegung}\text{ von } P}\}.$$

Satz 2.1 (Satz von Dilworth) $m = M$.

Satz 2.2 (Satz von Mirsky) Sei P endliches Poset. Wenn P keine Kette mit $m+1$ Elementen besitzt, dann ist P die Vereinigung von m Antiketten.

Definition 2.17 (monoton, Einbettung, Isomorphismus)
Seien P und Q geordnete Mengen. Eine Abb. $\varphi : P \to Q$ heißt

(i) **ordnungserhaltend** oder **monoton**, wenn $x \le y$ in P impliziert, daß $\varphi(x) \le \varphi(y)$ in Q ist.
(ii) eine **(Ordnungs-)Einbettung**, wenn ($x \le y$ in P) <=> ($\varphi(x) \le \varphi(y)$ in Q) $[\varphi : P \leftrightarrow Q]$. Man schreibt $P \hookrightarrow Q$ für "P ist eingebettet in Q".
(iii) ein **(Ordnungs-)Isomorphismus**, wenn φ eine surjektive Ordnungseinbettung ist. P und Q heißen dann **isomorph** $[P \cong Q]$.

Definition 2.18 (schwaches/induziertes Unterposet)
Sei $(P, \le)$ Poset und $Q \subset P$ geordnet bezüglich $\preceq$[2]. $(Q, \preceq)$ heißt **schwaches Unterposet** von P, wenn aus ($x \preceq y$ in Q) => ($x \le y$ in P); und **(induziertes) Unterposet** von $(P, \le)$, wenn ($x \preceq y$ in Q) <=> ($x \le y$ in P).

Definition 2.19 (Intervall)
Für $x \le y$ in P ist das **abgeschlossene Intervall** $[x, y] := \{z \in P | x \le z \le y\}$ mit induzierter Ordnung.

Definition 2.20 (Verfeinerung)
Ist $P = Q$ und $(Q, \preceq)$ ein schwaches Unterposet von $(P, \le)$, dann heißt $(P, \le)$ **Verfeinerung** von $(Q, \preceq)$. (Die Verfeinerung hat mehr Überdeckungsrelationen.)

Beispiel: S_n mit starker Ordnung ist eine Verfeinerung von S_n mit schwacher Ordnung.

Definition 2.21 (lokal endlich)
Ein Poset P bei dem alle $[x, y]$ endliche Mengen sind, mit bottom-Element $\hat{0}$, heißt **lokal endliches** Poset.

Definition 2.22 (Rang, Rangfunktion, gradiert)
Sei P lokal endliches Poset. Falls für beliebige 2 Elemente $x, y \in P$ mit $x \le y$ gilt, daß alle maximalen Ketten $C : x = x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_n = y$ dazwischen die gleiche **Länge** $l(C) := n$ haben, dann besitzt P eine **Rangfunktion** $\varrho : P \to \mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften

(i) $\varrho(\hat{0}) := 0$
(ii) $\varrho(y) = \varrho(x) + 1 <=> x \prec y$

$\varrho(x)$ heißt dann **Rang** von x und $\varrho(P) := \max_{x \in P}(\varrho(x)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der **Rang** von P.
Ein Poset P mit Rangfunktion heißt **gradiert**.

Definition 2.23 (Whitney-Zahlen 2. Art)
Die Zahlen $W_i = W_i(P) := \#\{x \in P | \varrho(x) = i\}$ heißen **Whitney-Zahlen 2. Art**. (W_i ist die Anzahl der Elemente in P, die den Rang i haben.)

Definition 2.24 (rangerzeugende Funktion)
$F(P, q) := \sum_{x \in P} q^{\varrho(x)} = \sum_{i=0}^{\varrho(P)} W_i q^i$ heißt die **rangerzeugende Funktion** von P.

Definition 2.25 (rangunimodal, rangsymetrisch, Sperner)
Ein endliches gradiertes Poset P vom Rang m heißt

- **rangunimodal**, wenn $W_0 \le W_1 \le \ldots \le W_k \ge \ldots \ge W_m$ für irgendein $k \le m$ gilt.
- **rangsymetrisch**, wenn $W_i = W_{m-i}$ für alle $i = 0 \ldots m$.
- **Sperner**, wenn für die Breite von P $M(P) = \max W_i$ gilt.

[2]symbolisiert eine beliebige Ordnung

Definition 2.26 (dual, selbstdual)
Sei $(P, \leq)$ ein Poset. Dann ist das zu P **duale** Poset P^* definiert durch : ($x \leq y$ in P^*) <=> ($y \leq x$ in P). P heißt **ordnungssymetrisch** oder **selbstdual**, wenn $P \cong P^*$ ist.

Posets	$\hat{0}$	$\hat{1}$	gradiert	rang-unimodal	rang-sym.	Sperner	$P \cong P^*$
$(\mathbb{N}_0, \leq)$	0	—	$\varrho(n) = 1$	—	—	—	—
B_n	$\emptyset$	$[n]$	$\varrho(A) = \|A\|$	$\times$	$\times$	$\times$	— ($A \leftrightarrow [n]\mathfrak{A}$)
P_n	$1\|\ldots\|n$	$1\ldots n$	$\varrho(B) = n - \|B\|$	$\times$	—	—	—
Y_λ	$\emptyset$	λ	$\varrho(\mu) = \|\mu\|$	—	—	?	—
D_n	1^n	n^1	—	—	—	—	$\times$ ($\lambda \leftrightarrow \lambda'$)
S_n (schwach)	id $n = 1\ldots n$	$w_n = n\ldots 1$	$\varrho(\pi) = l(\pi)$	$\times$	$\times$	?	$\times$ ($\pi \leftrightarrow \pi w_n$)

$\varrho(P) = \varrho(\hat{1})$ sofern vorhanden.

Definition 2.27 (Dualitätsprinzip)
Sei F ein Familie von Posets, die zu jedem P auch P^* enthält, und ϕ eine Aussage, welche für alle $P \in F$ richtig ist. Dann ist auch die **duale Aussage** ϕ^*, welche aus ϕ durch Vertauschung von $\leq$ und $\geq$ entsteht, richtig für alle $P \in F$.

Definition 2.28 (Abwärtsmenge, ideal)
Sei P Poset und $Q \subset P$. Q heißt **Abwärtsmenge** (downset) oder **(ordnungs-)ideal**, wenn für alle $x \in Q, y \in P$ mit $x \geq y$ folgt, daß $y \in Q$. $\downarrow Q := \{y \in P | \exists x \in Q : y \leq x\}$ $\quad \downarrow x := \downarrow \{x\}$

Q ist **Ideal** in P <=> $Q = \downarrow Q$

Definition 2.29 (Aufwärtsmenge, Filter)
Sei P Poset und $Q \subset P$. Q heißt **Aufwärtsmenge** (upset) oder **(Ordnungs-)Filter**, wenn für alle $x \in Q, y \in P$ mit $y \geq x$ folgt, daß $y \in Q$. $\uparrow Q := \{y \in P | \exists x \in Q : y \geq x\}$ $\quad \uparrow x := \uparrow \{x\}$

Q ist **Filter** in P <=> $Q = \uparrow Q$

Satz 2.3 Sei P Poset und $Q \subset P$, dann gilt: Q Ideal<=> $P \backslash Q$ Filter.

Definition 2.30 (Poset der Ideale)
Für jedes Poset P ist $\mathcal{O}(P) := \{\downarrow Q | Q \subset P\}$ geordnet durch Inklusion das **Poset der Ideale** von P.

2.2 Konstruktionen mit Posets

Wir kennen schon: Unterposets, P^*, $\mathcal{O}(P)$.

Definition 2.31 (Disjunkte Vereinigung/Direkte Summe)
Für zwei Posets P, Q mit $P \cap Q = \emptyset$ ist die **Disjunkte Vereinigung** $P \dot{\cup} Q$ bzw. **direkte Summe** $P + Q$ definiert als die disjunkte Vereinigung der Mengen P und Q, wobei $x \leq y$ <=> ($x, y \in Q$ und $x \leq y$) oder ($x, y \in P$ und $x \leq y$)
Ist kommutativ, assioziativ und hat neutrales Element.
(Hasse-Diagramm $P + Q$: Man zeichnet P und Q (ohne Verbindung) nebeneinander.)

Definition 2.32 (Lineare Summe)
Für zwei Posets P, Q ist die **lineare Summe** $P \oplus Q$ definiert als disjunkte Vereinigung der Mengen P und Q, wobei $x \leq y$ in $P \oplus Q$ <=> ($x \leq y$ in P) oder ($x \leq y$ in Q) oder ($x \in P$ und $y \in Q$).
Ist assioziativ, aber nicht kommutativ.
(Hasse-Diagramm $P \oplus Q$: Zeichne Q über P und verbinde alle minimalen Elemente von Q mit den maximalen von P.)

Definition 2.33 (Kartesisches/Direktes Produkt)
Für zwei Posets P, Q ist das **kartesische** oder **direkte Produkt** $P \times Q$ definiert als $P \times Q$ der Mengen, wobei $(x, x') \leq (y, y')$ in $P \times Q$:<=> ($x \leq y$ in P) und ($x' \leq y'$ in Q).
Ist nicht kommutativ oder assioziativ. (Ist nur "kommutativ" oder "assioziativ" für Isomorphie.)
(Hasse-Diagramm $P \times Q$: Im Diagramm von P ersetze jedes Element durch eine Kopie von Q und verbinde "korrespondierende" Elemente dieser Kopien von Q entsprechend den ursprünglichen Überdeckungsrelationen in P.)

Definition 2.34 (Abb(M, P))
Abb(M, P) (M in P abgebbildet) für beliebige Mengen M und ein Poset P ist ein Poset bezüglich der **punktweisen Ordnung** $\mathcal{L} \leq g :<=> \mathcal{L}(x) \leq g(x) \quad \forall x \in M$.

Beispiel: $\underline{2}^{\underline{2}}$
$\text{Abb}(\{0,1\},\{0,1\}) \cong \{(\varphi(0),\varphi(1)) | \varphi \in \text{Abb}\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$

Definition 2.35 (Hom(P, Q))
Hom$(P, Q) = Q^P$ (P nach Q) für die Posets P, Q ist die Menge der monotonen Abb. von P nach Q.
(Jede struktur-/ordnungserhaltende Abb. ist ein **Homomorphismus** (Ordnungshomomorphismus.)

Q^P ist Poset auf der Menge $\text{Hom}(P, Q)$ bezüglich der punktweisen Ordnung.

Beispiel: $\underline{2}^{\underline{2}}$
$\text{Hom}(\{0,1\},\{0,1\}) \cong (0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$

Definition 2.36 (Lineare Erweiterungen, monotone Numerierung)
Für $|P| = n$ und $Q = [n]$ ist $\text{Hom}(P, Q) \neq \emptyset$ die Menge der **linearen Erweiterungen** von P, beschrieben durch die verschiedenen möglichen **monotonen Numerierungen** von P.
Zu monotonen Numerierung numeriert man immer ein minimales Element der Menge der nicht numerierten Elemente bis alle numeriert sind.

Definition 2.37 (konvex, verträglich, Quotientenposet)
Sei B eine Partition der Menge P in Blöcke B_i.

Ein Block B_i heißt **konvex**, wenn für $x \leq y$ in B_i und $z \in P$ mit $x \leq z \leq y$ => $z \in B_i$.

B heißt **verträglich** mit der Ordnung $\leq$ auf P, wenn alle Blöcke B_i konvex sind.

Dann ist das **Quotientenposet** P_B wohl definiert, welches als Elemente die Blöcke B_i und als Ordnung die indizierte Ordnung von P hat.

Satz 2.4 $B_n \cong \underline{2}^n = \underbrace{\underline{2} \times \ldots \times \underline{2}}_{n\text{-mal}}$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch die Abb. $\phi : P([n]) \rightarrow \{0,1\}^n$, $A \mapsto (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ mit $\delta_i := \begin{cases} 1, \text{ wenn } i \in A \\ 0, \text{ wenn } i \notin A \end{cases}$

3 Abzählende Kombinatorik

Elementare Zählprinzipien:
S, S_i, T endliche Mengen.

1) Gleichheitsregel $|S| = |T| <=> \exists$ eine Bijektion zwischen S und T.
2) Summenregel $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} S_i => |S| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$.
3) Produktregel $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m => |S| = \prod_{i=1}^{m} |S_i|$.
   speziell: $\text{Abb}(S,T) =: T^S => |T|^{|S|}$.

Folgerungen:

a) $\mathcal{P}(N) = Pot(N) \quad => |\mathcal{P}(N)| = 2^n$
b) $|\text{Inj}(K,N)| = n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)$
c) $|\text{Bij}(K,N)| = n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
d) Die Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge $:= W_k := W_k(\mathfrak{B}_n) = \binom{n}{k}$
e) $\mathfrak{B}_n$ ist rangsymetrisch: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
f) **Binominalsatz**: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
g) $\sum_{k=0}^{n} = 2^n$
h) **Von der Monde Konvolution**: $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$
   $\binom{x}{k} \in \mathbb{C}[x]$ (Polynomring), $\binom{x+y}{k} \in \mathbb{C}[x,y]$
i) $\mathfrak{B}_n$ rangunimodal: $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

Satz 3.1 (Identitätssatz) Stimmen 2 Polygone in $\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]$ oder 2 konvergente Potenzreihen aus $\mathbb{C}[[x_1 \ldots x_n]]$ in unendlich vielen Punkten überein, dann sind sie gleich.
(Für Polynome braucht man nur endlich viele Übereinstimmungen, abhängig vom Grad.)

Satz 3.2 $|\{\lambda \vdash n | \lambda_1 \underbrace{=}_{\text{oder } \leq} k\}| = |\{\lambda \vdash n | l(\lambda) \underbrace{=}_{\text{oder } \leq} k\}|$

Satz 3.3 $|\{\lambda \vdash n|$ alle λ_i ungerade und verschieden$\}| = |\{\lambda \vdash n | \lambda = \lambda'\}|$

Definition 3.1
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n := \{(k_1 \ldots k_n) \in \mathbb{N}_0^n | 0 \leq k_j \leq j-1$ für $j = 1 \ldots n\}$
Dann ist

1. Die Abb. $k : S_n \to K_n$ definiert durch $k_j = k_j(\pi) := |\{i | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}|$ für $j = 1..n$ eine Bijektion mit $|k(\pi)| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = l(\pi)$.

2. **Rangerzeugende Funktion** von S_n mit schwacher Ordnung
   $F(S_n, q) = \sum_{\pi \in S_n} q^{l(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\ldots+q^{n-1})$ für $n \geq 2$.

Satz 3.4 Alle B_n $(n \in \mathbb{N})$ sind Sperner, d. h. $M(B_n) = W_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

Definition 3.2 (Zweifaches Abzählen (Double counting))
Sei $M = (m_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} m_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} m_{ij} \right)$$

Definition 3.3 (Schubfachprinzip (pigeon hole))
Verteilt man n Gegenstände (pigeons) auf r Fächer (holes) und ist $n > r$ bzw. $n > k \cdot r$, so enthält mindestens ein Fach mindestens 2 bzw. $k + 1$ Gegenstände.

Satz 3.5 (Ramsey-Theorie) Sei $N(a, b)$ die kleinste Anzahl von Personen, so daß entweder a Personen alle miteinander bekannt sind, oder b Personen alle einander unbekannt sind.

(i) $N(a, b) = N(b, a)$ klar

(ii) $N(a, 2) = a$ klar

(iii) $N(a, b) \leq N(a - 1, b) + N(a, b - 1)$

(iv) $\forall a, b \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : N(a, b)$ existiert endlich (rekursiv aus 1-3)

(v) $N(3, 3) = 6 \quad N(3, 4) = 9 \quad N(3, 5) = 14 \quad N(3, 6) = 18$
$N(3, 7) = 23 \quad N(4, 4) = 18 \quad \dots$
Die restlichen Zahlen sind unbekannt

Definition 3.4 (Sterlingzahlen der 2. Art)
Die Anzahl der Partitionen von $[n]$ in k Blöcke heißen **Sterlingzahlen der 2. Art** $S(n, k) := W_{n-k}(P_n)$.

(i) $S(0, 0) = 1$
$S(n, k) = 0$ für $k > n$
$S(n, 0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
$S(n, 1) = 1$

(ii) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
$S(n, n - 1) = \binom{n}{2}$

(iii) Rekursion:
$S(n, k) = k \cdot S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1)$

Tabelle 1: Sterling-Dreieck der 2. Art

$n\backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	...
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

(iv) Summenformel:
$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sim_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$

(v) Exponentiell erzeugende Fkt. für $S(n, k)$ bei festem k:
Eine Fkt. vom Typ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ heißt **exponetiell erzeugend** für die Folge $(a_0, a_1, \dots)$, eine Fkt. vom Typ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt **(gewöhnliche) erzeugende** Funktion.

(vi) Transferformel:
$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) x^{\underline{k}}$

Definition 3.5 (k-Komposition)
Ein k-Tupel $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $a_1 + \dots + a_k = n$ heißt **geordnete Partition** oder **k-Komposition** von n: $a \models n$.
Die Anzahl der k-Kompositionen von n ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Definition 3.6 (Multimenge)
Eine (endliche) **Multimenge** M auf einer (endlichen) Menge S ist eine Funktion $r: S \to \mathbb{N}_0$; für $a \in S$ ist $r(a)$ die Anzahl der Wiederholungen von a. Man schreibt eine Multimenge als Menge mit Wiederholungen.

Definition 3.7 (Untermultimenge)
M' ist **Untermultimenge** von M, wenn M' bestimmt ist durch eine Funktion $r': S \to \mathbb{N}_0$ mit $r'(a) \leq r(a) \quad \forall a \in S$.
Die Anzahl der k-(Unter-)Multimengen über $[n]$ ist $\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$.

Definition 3.8

(i) Die Anzahl der geordneten k-Partitionen von $[n]$ mit $b_i = |B_i|$ für $i = 1, \ldots, k$ mit $b = (b_1, \ldots, b_k)$ und $b_1 + \ldots + b_k = n$ ist $\binom{n}{b_1, \ldots, b_k} := \frac{n!}{b_1! \ldots b_k!}$, der **Multinominalkoeffizient**.

(ii) Die Anzahl aus i) hängt nur von der Multimenge $\{b_1, \ldots, b_k\}$ ab, nicht von der Reihenfolge.

(iii) $(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{alle (b_1, \ldots, b_k)} \binom{n}{b_1, \ldots, b_k} x_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k}$
Dabei ist die Anzahl der verschiedenen Monome $x_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k}$ $\binom{n+k-1}{k}$ und die Summe der Koeffizienten ist k^n.

(iv) **Rekursionsformel**:
$\binom{n}{b_1, \ldots, b_k} = \binom{n-1}{b_1 - 1, b_2, \ldots, b_k} + \ldots + \binom{n-1}{b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k - 1}$
(Ein Element fest, alle Möglichkeiten, aus welchem Block es war.)

(v) Sei M eine Multimenge über $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$ mit Vielfachheitsfkt. r und $S(M)$ die Menge der Permutationen von M, dann ist $|S(M)| = \binom{|M|}{r(a_1), \ldots, r(a_s)}$; speziell für $r \equiv 1$ (also normale Mengen) ist $|S(M)| = \binom{|M|}{1, \ldots, 1} = |M|!$

Definition 3.9 (Partitionszahlen)
$P(n, k) := \#\{\lambda \vdash n | l(\lambda) = k\}$ heißen **Partitionszahlen**.
$P(n) := \#\{\lambda \vdash n\}$
$P(0, 0) := 1$
$P(0, k) := 0$ für $k > 0$.

(i) $P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n, k)$.

(ii) **Rekursionsformel**:
$P(n + k, k) = \sum_{j=0}^{k} P(n, j)$

(iii) **Erzeugende Funktion**:
Der Koeffizient von x^n in $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\ldots}$ mit $a, b, \ldots \in \mathbb{N}$, ist $\#\{\lambda \vdash n | \forall \lambda \in \{a, b, \ldots\}\}$.
Spezialfälle:

- $P_k(n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_i = k \text{ der größte Teil}\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}$
- $P_u(n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_i \text{ ist ungerade}\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}$
- $P(n) := \#\{\lambda \vdash n\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$
  Der Koeff. von x^n in $(1 + x^a)(1 + x^b)\ldots$ ist $\#\{\lambda \vdash n | \forall \lambda \in \{a, b, \ldots\} \text{ alle verschieden}\}$.
  Spezialfall:
  $P_d(n) := \#\{\lambda \vdash n \| \forall \lambda_i \text{ verschieden}\}$ hat die erzeugende Funktion $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)\ldots$

(iv) (Euler) $P(n) = P_d(n)$

(v) Für $\lambda = n^m = (???)$ hat $F(Y_\lambda, q) = [???]_q$

Tabelle 2: Verteilung von Bällen in Fächer

Menge N von n Bällen, Menge R von r Fächern, $*$: "nicht unterscheidbar"

	bel.	inj.	surj.	bij. $(n = r)$
N, R	r^n	$r^{\underline{n}}$	$r!S(n, r)$	$r! = n!$
$*N, R$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
$N, *R$	$\sum_{k=1}^{r} S(n, k)$	0 oder 1	$S(n, r)$	1
$*N, *R$	$P(n)$	0 oder 1	$P(n, r)$	1

Definition 3.10 (Zykel von Permutationen)

Für $\pi \in S_n$ und $i \in [n]$ muß $1 \leq \#\{i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots\} \leq n$ gelten. Ist $s \leq n$ minimal mit der Eigenschaft $\pi^s(i) = i$, dann liegt i in einem **Zykel** $(i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{s-1}(i))$ der **Länge** s. Ist $s = 1$, heißt i **Fixpunkt** von π.

Offenbar zerfällt $[n]$ bezüglich π in disjunkte Zykel; man schreibt z. B. $\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{5\,8\,3\,1\,9\,7\,6\,2\,4} = (1, 5, 9, 4)(2, 8)(3)(6, 7)$.
Die Längen der Zykel von π bilden eine Partition $\lambda(\pi) \vdash n$, den **Zykeltyp** von π (zu obigem Beispiel: $\lambda(\pi) = 4^1 2^2 1^1$) mit Multiplizitäten $m_i(\pi)$;
$m(\pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\pi) = \#$ Zyklen von π.

Die Zahlen $s(n, k) := \#\{\pi \in S_n | l(\lambda(\pi)) = k\}$ heißen **Sterlingzahlen der 1. Art**. Es gilt:

(i) $\#\{\lambda(\pi) | \pi \in S_n\} = P(n)$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i(\pi) = n$ für alle $\pi \in S_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\#\{\pi \in S_n | \lambda(\pi) = n^{m_n(\pi)} \ldots 2^{m_2(\pi)} 1^{m_1(\pi)}\} = \frac{n!}{\prod_i m_i(\pi)! \prod_i i^{m_i(\pi)}}$

(iv) $s(n, k) = \sum_{(m_1, \ldots, m_k)} \frac{n!}{\prod_i m_i(\pi)! \prod_i i^{m_i(\pi)}}$ mit $\sum_i i m_i = n$ und $\sum_i m_i = k$.

(v) $s(0, k) = s(n, 0) = 0$
$s(0, 0) = 1,\ s(n, n) = 1$
$s(n, 1) = (n - 1)!$
$s(n, n - 1) = \binom{n}{2}$

(vi) $\sum_{k=0}^{n} s(n, k) = n!$

(vii) **Rekursionsformel**:
$s(n, k) = s(n - 1, k - 1) + (n - 1)s(n - 1, k)$

Tabelle 3: Sterling-Dreieck der 1. Art

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	$\ldots$
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	24	50	35	10	1

(viii) $x^{\underline{n}}$[3] $= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n, k) x^k$

Definition 3.11 (Catalan-Zahlen)

Sei T_n die Anzahl der **numerierten Triangulierungen** (Zerlegung in Dreiecke) eines (regelmäßigen, d. h. konvexen) n-Ecks.
$T_3 = 1, \quad T_4 = 2, \quad T_5 = 5, \quad T_6 = 14$

[3] $= x(x - 1) \ldots (x - n + 1) \in \mathbb{Z}[x]$

(i) **Rekursion**:
$T_{n+1} = T_2T_n + T_3T_{n-1} + \ldots + T_nT_2 \quad (T_2 = 1)$

(ii) $C_n := T_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ heißen **Catalan-Zahlen**.
$C_0 := 0 \quad$ (Auch $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.)

Definition 3.12 (Reflektiertes Polynom)
Seien $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $d \geq 1$ und $q_d \neq 0$.
Das Polynom $q(z) = 1 + q_1z + \ldots + q_dz^d$ läßt sich als
$q(z) = (1 - \alpha_1 z)^{d_1}(1 - \alpha_2 z)^{d_2} \ldots (1 - \alpha_k z)^{d_k}$ oder
$q(z) = z^d(\frac{1}{z} - \alpha_1)^{d_1} \ldots (\frac{1}{z} - \alpha_k)^{d_k}$ darstellen.
Zu diesem Polynom existiert ein **reflektiertes Polynom** in der Form
$q^R(z) := z^d q(\frac{1}{z}) = 1 \cdot z^d + q_1\frac{1}{z}z^d + \ldots + q_d(\frac{1}{z})^d z^d = z^d + q_1 z^{d-1} + \ldots + q_d$,
daß sich als $q^R(z) = (z - \alpha_1)^{d_1} \ldots (z - \alpha_k)^{d_k}$ darstellen läßt.
Die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sind Nullstellen der Vielfachheiten $d_1, \ldots, d_k$ dieses reflektierten Polynoms.

Satz 3.6 (Satz über Zählfunktionen) Für alle Zählfunktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ sind dann die folgenden Bedingungen äquivalent:

A1 <u>Rekursion:</u> (linear, mit konstanten Koeff.)
$\forall n \geq 0 : \quad f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) = 0$ mit Anfangsbedingungen $f(0), f(1), \ldots, f(d-1) \in \mathbb{C}$

A2 <u>Erzeugende Funktionen:</u>
$F(z) := \sum_{n\geq 0} f(n)z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Grad $p(z) < d$

A3 <u>Partialbruchzerlegung:</u>
$F(z) := \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{d_i}}$ mit Grad $g_i(z) < d_i$ für alle i

A4 <u>Explizite Darstellung:</u>
$f(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\alpha_i^n$ mit Grad $p_i(n) < d_i$ für alle i
(k ist Anzahl der verschiedenen Nullstellen)

4 Graphen und Digraphen

Definition 4.1 (Graph, Ecken, Kantenmenge)
Ein (endlicher) **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Menge E von **Ecken** und einer **Kantenmenge** $K \subset \mathcal{P}_2(E)^2 := \{\{u, v\} \in \mathcal{P}(E) | u \neq v\}$. Für eine Kante $\{u, v\}$ schreibt man kurz uv.

Definition 4.2 (Multigraph)
Ein **Multigraph** ist ein Graph, bei dem mehrfache Kanten zwischen 2 Ecken und Schlingen von einer Ecke zu sich selbst zugelassen sind.

Definition 4.3 (Vollständiger Graph)
Für $|E| = n$ heißt $K_n := (E, \mathcal{P}_2(E))$ der **vollständige Graph**.

Definition 4.4 (Bipartiter Graph)
Ein Graph $G = (E = M + N, K)$ heißt **bipartit**, wenn E aus zwei disjunkten Mengen M und N besteht, und jede Kante eine Ecke in M und eine in N hat.
Sind alle Kanten zwischen M und N vorhanden, spricht man von einem **vollständigen bipartiten Graphen** $K_{M,N}$ oder $K_{m,n}$ für $|M| = m$ und $|N| = n$.

Analog definiert man den k-**partiten Graphen**.

Definition 4.5 (Weg, Länge, Kreis)
Ein **Weg** P_n in einem Graphen besteht aus einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von verschiedenen Ecken mit $u_i u_{i+1} \in K$ für alle i.
Die **Länge** des Weges ist $n - 1$.

Ein **Kreis** P_n in einem Graphen besteht aus einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von verschiedenen Ecken mit $u_i u_{i+1} \in K$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $u_n u_1 \in K$.
Die **Länge** des Kreises ist n.

Definition 4.6 (adjazent, inzident, Nachbarschaft)
In einem Graphen heißen $u, v \in E$ **adjazent** (benachbart), wenn $uv \in K$.
Die Ecke $u \in E$ und die Kante $k \in K$ heißen **inzident**, wenn $u \in k$.
Zwei Kanten $k, l \in K$ heißen **inzident**, wenn $k \cap l \neq 0$.
Die **Nachbarschaft** von u in G ist $N(u, G) := \{v \in E | uv \in K\}$.
Der **Grad** (degree) von u in G ist $d(u) := |N(u, G)|$.

Definition 4.7 (Adjazenzmatrix, Inzidenzmatrix)
Für $G = (E, K)$ mit $E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ heißt die $n \times m$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit
$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i u_j \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
die **Adjazenzmatrix** von G.
Die $n \times m$ Matrix $B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i \in k_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
heißt **Inzidenzmatrix** von G.

Definition 4.8 (isoliert)
Eine Ecke $u \in E$ heißt **isoliert**, wenn $d(u) = 0$ ist.

Definition 4.9 (Ordnung, Größe)
In einem Graphen $G = (E, K)$ heißt $n = |E|$ die **Ordnung** und $m = |K|$ die **Größe**.

Definition 4.10 (r-regulär)
Ein Graph heißt r-**regulär**, wenn $d(u) = r$ für alle $u \in E$. So ist z. B. K_n $(n-1)$-regulär, C_n ist 2-regulär und Q_n ist n-regulär.

Satz 4.1 (Handschlaglemma) $\sum_{u\in E} d(u) = 2|K|$ (Beweis durch zweifaches Abzählen)

Satz 4.2 G hat eine gerade Anzahl Ecken ungeraden Grades.

Definition 4.11
Seien $G = (E, K)$ und $G' = (E', K')$ Graphen. Dann heißt eine Abb. $\phi : E \to E'$

a) **Graphenhomomorphismus**, wenn
$uv \in E => \phi(u)\phi(v) \in K'$.

b) **Graphenisomorphismus**, wenn ϕ bijektiv ist:
$uv \in E <=> \phi(u)\phi(v) \in K'$.
Existiert ein Isomorphismus zwischen G und G', heißen sie **isomorph**.

Definition 4.12 (Untergraph, induziert, p-Clique)
Ein Graph $G' = (E', K')$ heißt **Untergraph** von $G = (E, K)$, wenn $E' \subset E$ und $K' \subset K'$. Gilt zusätzlich $K' = K \cap \mathcal{P}_2(E')$, d. h. G' enthält alle Kanten zwischen den Ecken in E', die auch in G vorhanden waren, heißt G' **induzierter Untergraph**.
Speziell: Ist K_p ein induzierter Untergraph von G, dann sagt man: G enthält eine p**-Clique**.

Satz 4.3 (Theorem von Ramsey) Jede Kantenfärbung eines K_n, wobei $n \geq N(a_1, \ldots, a_m; 2)$ mit m Farben $c_1, \ldots, c_m$, enthält eine c_1-farbige a_1-Clique oder eine c_2-farbige a_2-Clique oder ... oder eine c_m-farbige a_m-Clique.

Satz 4.4 (Satz von Turan) Sei G ein Graph mit $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und m Kanten, der keine p-Clique ($p \geq 2$) enthält, dann ist $m \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$.
Der größtmögliche Wert wird angenommen, wenn $G = K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ mit $n_1 + \ldots + n_{p-1} = n$ und $|n_i - n_j| \leq 1$ für alle i, j. G heißt dann **Turangraph**.

Definition 4.13 (Kantenfolge)
Für einen Graph $G = (E, K)$ heißt eine Folge $k_1, \ldots, k_r \in K$ **Kantenfolge** in G von der Länge r, wenn $|k_i \cap k_{i+1}| \geq 1$ für $i = 1, \ldots, r-1$.
Man schreibt auch: $v_{i_0}k_1v_{i_1}k2 \ldots k_rv_{i_r}$.
Die Kantenfolge **verbindet** v_{i_0} und v_{i_r}.

Definition 4.14 (Abstand, Durchmesser)
Für $u, v \in E$ ist der **Abstand** von u und v $d(u, v) := \min \#\{r | k_1, \ldots, k_r \text{ verbindet } u \text{ und } v\}$. Falls keine verbindende Kantenfolge existiert, ist $d(u, v) := \infty$.

$D(G) := \max_{u,v\in E} d(u, v)$ heißt **Durchmesser** von G.

Definition 4.15 (zusammenhängend, Komponenten)
Ist $D(G) < \infty$, heißt G **zusammenhängend**, andernfalls **unzusammenhängend**. Die maximalen induzierten Untergraphen von G heißen **Komponenten** von G.

Definition 4.16
Eine Kantenfolge $v_0, k_1v_1 \ldots k_rv_r$ in G heißt

- **geschlossen**, wenn $v_0 = v_r$.
- **Kantenzug**, wenn $k_i \neq k_j \quad \forall i \neq j$.
- **Weg**, wenn $v_i \neq v_j \quad \forall i \neq j$.
- **Kreis**, wenn die Kantenfolge geschlossen ist, und $v_i \neq v_j \quad \forall i \neq j$, außer $v_0 = v_r$.

Definition 4.17 (Euler-Weg/Kreis)
Ein **Euler-Weg/Kreis** im (Multi-)Graphen G ist ein Weg / geschlossener Kantenzug, der jede Kante von G genau einmal durchläuft.
G ist ein **Eulergraph**, wenn er einen Euler-Kreis besitzt.

Definition 4.18 (Hamilton-Weg/Kreis)
Ein **Hamilton-Weg/Kreis** im (Multi-)Graphen G ist ein Weg / geschlossener Kantenzug, der jede Ecke von G genau einmal durchläuft.
G ist ein **Hamiltongraph**, wenn er einen Hamilton-Kreis besitzt.

Satz 4.5
a) Sei G ein Graph mit $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ und die $m \times n$ Matrix B die zugehörige Inzidenzmatrix und außerdem $D = \mathrm{diag}(d(v_1), \dots, d(v_n))$. Dann ist $B \cdot B^T = A + D$.
b) Sei A^l die l-te Potenz der Adjazenzmatrix A eines Graphen G. Dann ist $A^l(ij) = |\{\text{Kantenfolgen von } v_i \text{ nach } v_j \text{ der Länge } l\}|$.

Definition 4.19 (matching, matching-Zahl)
Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Eine Teilmenge $M \subset K$ heißt **matching**, wenn keine zwei Kanten aus M inzident sind, d. h. eine gemeinsame Ecke besitzen.

$m(G) := \max\{|M| \,|M \subset K,\ M \text{ matching}\}$ heißt die **matching-Zahl** von G und ein matching mit $|M| = m(G)$ heißt **maximal**.

Satz 4.6 (Satz von König-Hall) Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit $E = S \mathbin{\dot\cup} T$ und $K \subset S \times T$. Dann ist $m(G) = |S| <=>$ für alle $A \subset S$ gilt: $|A| \leq |N(A)|$ mit $N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a)$.

Definition 4.20 (Kritische Familie)
Sei $n \geq 2$ und $T_i := N(v_i) \subset T$ für alle $v_i \in S$. Eine Familie von l Mengen T_i heißt **kritisch**, wenn ihre Vereinigung gerade l Elemente enthält $(1 \leq l \leq n)$.

Definition 4.21 (Wald, Baum, Blatt, Zweig)
Ein Graph F (forest) heißt **Wald**, wenn F keinen Kreis enthält und ein **Baum** (tree), wenn er zusammenhängend ist.

Eine Ecke v eines Baumes, die den Grad 1 hat, heißt **Blatt** (leaf) und mit inzidenter Kante **Zweig** (twig).

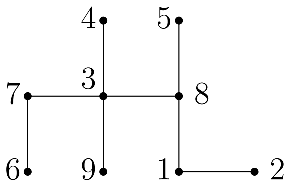
Definition 4.22 (aufspannender Baum)
Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph. Dann heißt ein Untergraph T, der ein Baum der Ordnung $n = |E|$ ist, ein **aufspannender Baum**.

Satz 4.7 Für einen auspannenden Baum T der Ordnung $n \geq 2$ gilt
$\sum_{v \in E(T)} d(v) \overset{Handschlaglemma}{=} 2|K| = 2(|E| - 1) = 2n - 2.$

Satz 4.8 (Satz von Cayley) Es gibt n^{n-2} numerierte Bäume mit der Eckenmenge $[n]$.

Definition 4.23 (Prüfersequenz)
Bijektion P, welche jedes T mit $E = [n]$ auf genau ein
$P(T) = \underbrace{(a_1, \dots, a_{n-2})}_{\text{Prüfersequenz zu } T} \hat{=} [n]^{n-2}$ abbildet:

1) Finde das Blatt v von T mit der kleinsten Nummer; dann ist a_1 die Nummer des Nachbarn.
2) Entferne den Zweig mit Blatt v und wiederhole 1) und 2) oft genug, um $a_2, \dots, a_{n-2}$ zu finden. (Es bleibt immer die Ecke n und ein Nachbar übrig.)



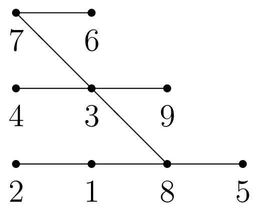
$\overset{P}{\mapsto} (1, 8, 3, 8, 7, 3, 3)$

Rest: $(9, 3)$

Umkehrung:
Sei d_i der Grad der Ecke i und $f_i := \{j | a_j = i\}$; f_i Nachbarn von i werden entfernt und es bleibt mindestens noch ein Nachbar übrig.
$n - 2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \overset{f_i \leq d_i - 1}{\leq} \sum_{i=1}^{n} (d_i - 1) = 2n - 2 - n = n - 2 => f_i = d_i - 1$

$a = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \mapsto T$ gegeben durch:
1) $b_1 := \min[n] \backslash \{a_1, \ldots, a_{n-2}\}$ ergibt Kante $b_1 a_1$.
2) $b_2 := \min[n] \backslash \{b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ ergibt Kante $b_2 a_2$.
...
Der vorletzte Knoten b_{n-1} ergibt sich, und den letzten Knoten $b_n := \min[n] \backslash \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ muss man an den letzten Knoten in der Püfersequenz anhängen ($b_n a_{n-2}$).

$(1, 8, 3, 8, 7, 3, 3) \overset{P^{-1}}{\mapsto}$
$2, 1, 4, 5, 6, 7, 8$



Definition 4.24 (Bäume mit zusätzlicher Struktur)
T_n sei die Menge aller Bäume mit n Ecken.

- $rT_n := \{(T, r_0) | T \in T_n,\ r_0 \in E(T)\}$ die Menge der **verwurzelten Bäume** mit n Ecken, r_0 heißt **Wurzel** (root).
  Zeichnung wie gradiertes Hassediagramm mit Rangfkt. $\varrho(r) := d(r, r_0)$ für alle $r \in E(T)$.

- OrT_n[4] $:= \{T \in rT_n$ und für alle $r \in E(T)$ ist die Menge $\mathrm{succ}(r)$[5] der Nachfolger von r linear geordnet$\}$

- MrT_n[6] $:= \{T \in rT_{n+1}$, wobei die Ecken monoton durchnumeriert sind$\}$ Lineare Erweiterungen der Hassediagramme von T mit Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, n\}$.

Satz 4.9 (Matrix-Gerüst-Satz) Sei B die Inzidenzmatrix eines Graphen G und C die $n \times m$ Matrix, die aus B hervorgeht, wenn man in jeder Spalte genau eine 1 zu -1 macht. Sei weiter $M = C \cdot C^T$. Dann ist für beliebiges $i \in [n]$ $t(f) := \#\{T | T$ aufspannender numerierter Baum von $f\} = \det M_{ii}$, wobei M_{ii} aus M durch Drehen der i-ten Zeile und i-ten Spalte besteht.

Definition 4.25 (Gerichteter Graph/Digraph)
Ein (endlicher) **gerichteter Graph** oder **Digraph** $\overrightarrow{G} = (E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Eckenmenge E und einer Menge $K \subset E \times E$ von **gerichteten Kanten** bzw. **Bögen**.
Jedes Paar $(u, v) \in K$ mit $u \neq v$ kommt höchstens einmal vor, sonst spricht man von einem Multigraph.

[4] Ordered tree
[5] $\mathrm{succ}(r) := \{r' \in N(r) | \varrho(r') = \varrho(r) + 1\}$
[6] monoton labeled

Für $k = (u,v) = \overrightarrow{uv}$ heißt $k^- = u$ die **Anfangsecke** und $k^+ = v$ die **Endecke**.
Die **Inzidenzmatrix** von G ist die $n \times m$ Matrix $B = (b_{ij})$ mit
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i = k_j^+ \\ -1 & \text{falls } u_i = k_j^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Definition 4.26 (Aus-Grad, Ein-Grad)
$N^+(u) := \{v \in E | \overrightarrow{uv} \in K\}$ "Aus-Nachbarschaft".
$N^-(u) := \{v \in E | \overrightarrow{vu} \in K\}$ "Ein-Nachbarschaft".
$d^+ := |N^+(u)|$ **Aus-Grad**.
$d^- := |N^-(u)|$ **Ein-Grad**.

Definition 4.27 (azyklisch, zusammenhängend)
Ein Digraph $\overrightarrow{G}$ heißt **azyklisch**, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält. Er heißt **zusammenhängend**, wenn der zugrunde liegende Graph zusammenhängend ist, und **stark zusammenhängend**, wenn für alle $u, v \in E$ ein gerichteter Weg existiert.

Definition 4.28 (Netzwerk)
Ein zusammenhängender Digraph $\overrightarrow{N} = (E, K$ heißt **Netzwerk**, wenn genau ein $u \in E$ mit $d^-(u) = 0$ und $d^+(u) > 0$ existiert, die **Quelle**, genau ein $v \in E$ mit $d^-(v) > 0$ und $d^+(u) = 0$ existiert, die **Senke** und es eine Kapazitätsfkt. $c : K \to [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$ gibt, wobei $c(k)$ die **Kapazität** des Bogens k ist. Zusammen: $\overrightarrow{N} = (E, K, u, v, c)$

Definition 4.29 (Fluß)
Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt **Fluß**, wenn

$0 \leq f(k) \leq c(k)$ für alle $k \in K$ (Kapazitätsbedingung) und

$f^+(a) = f^-(a)$ für alle $a \in E \backslash \{u, v\}$ (Gleichgewichtsbedingung) gilt.

Es gibt immer den **Nullfluß** $f_o(k) = 0$ für alle $k \in K$.

Definition 4.30 (Flußstärke)
Sei f ein Fluß in $\overrightarrow{N}$, dann heißt $w(f) := f^+(u)$ (u ist die Quelle) die **Flußstärke** oder **Wert** von f. f heißt **maximal**, wenn kein Fluß f' mit $w(f') > w(f)$ existiert.

Definition 4.31 (Schnitt)
Ein **Schnitt** (X, Y) ist eine Partition $E = X + Y$ mit $u \in X$ und $v \in Y$. Die **Kapazität des Schnittes** ist $\text{cap}(X, Y) = \sum c(k)$, wobei die Summe über alle Kanten k mit $k^- \in X$ und $k^+ \in Y$ geht. (X, Y) heißt **minimal**, wenn kein Schnitt (X', Y') mit $\text{cap}(X', Y') > \text{cap}(X, Y)$ existiert.
Der **minimale Schnitt** besteht aus (X_f, Y_f) mit $X_f = \{x | x = u$ oder es existiert ein f-zunehmender Weg von u nach $x\}$ und $Y_f = E \backslash X_f$.

Definition 4.32
Sei f ein Fluß in $\overrightarrow{N}$, dann heißt $k \in K$:

- f-**Null**, wenn $f(k) = 0$.
- f-**positiv**, wenn $f(k) > 0$.
- f-**ungesättigt**, wenn $f(k) < c(k)$.
- f-**gesättigt**, wenn $f(k) = c(k)$.

Satz 4.10 Seien (X, Y) ein Schnitt und f ein Fluß im Netzwerk $\overrightarrow{N}$, dann ist $w(f) \leq cap(X, Y)$.
Ist $w(f) = cap(X, Y)$, so ist f ein maximaler Fluß und (X, Y) ein minimaler Schnitt.

Definition 4.33 (Vorwärtsbogen, Rückwärtsbogen)
Sei f Fluß im Netzwerk $\overrightarrow{N}$, $G(\overrightarrow{N})$ der zugrunde liegende Graph und w ein Weg in $G(\overrightarrow{N})$ mit einer Länge von mindestens 1. Ist ein Bogen $k \in W$ gleich orientiert wie w, heißt er **Vorwärtsbogen**, sonst **Rückwärtsbogen**. $s(w) := \min_{k \in w} s(k)$ mit $s(k) := \begin{cases} c(k) - f(k) & , k \text{ Vorwärtsbogen von } w \\ f(k) & , k \text{ Rückwärtsbogen} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$
Der Weg w heißt:

- f**-gesättigt**, wenn $s(w) = 0$.
- f**-ungesättigt**, wenn $s(w) > 0$.
- f**-zunehmend**, wenn w f-ungesättigt und w von u zu einem x (in Richtung v) führt.

Für einen f-zunehmenden Weg ist $F : K \to [0, \infty)$ mit
$F(k) := \begin{cases} f(k) + s(w) & , \text{wenn } k \text{ Vorwärtsbogen von } w \\ f(k) - s(w) & , \text{wenn } k \text{ Rückwärtsbogen von } w \\ f(k) & , \text{ sonst} \end{cases}$
ist ein neuer Fluß in $\overrightarrow{N}$ mit $w(F) = w(f) + s(w) > w(f)$.

Satz 4.11 Ein Fluß f in $\overrightarrow{N}$ ist genau dann maximal, wenn es keinen f-zunehmenden Weg gibt.

Satz 4.12 (Max-flow, min-cut) In jedem Netzwerk $\overrightarrow{N} = (E, K, u, v, c)$ existieren eine maximaler Fluß f und ein minimaler Schnitt $L = (X, Y)$ mit $w(f) = \text{cap}(L)$.

Definition 4.34 (eben/planar, Seiten/Flächen)
Ein Graph G mit n Ecken und k Kanten ist **eben** oder **planar**, wenn er im $\mathbb{R}^2$ ohne Überdeckungen der Kanten gezeichnet werden kann. Dann wird $\mathbb{R}^2 \backslash G$ in f Zusammenhangskomponenten - die **Seiten** oder **Flächen** zur Zeichnung von G - zerlegt; dabei zählt das Äußere als eine Fläche mit.
$\boxed{n - k + f = 2}$ **Euler-Formel**

Definition 4.35 (Dualer Graph)
Der **duale Graph** G^* zu einem Graphen G hat eine Eckenmenge, die pro Fläche in G eine Ecke enthält, und die Kanten ergeben sich, indem für zwei benachbarte Flächen [7] in G eine Kante zwischen den zugehörigen Ecken in G^* eingefügt wird.

[7] d. h. die beiden Flächen haben eine gemeinsame Kante