Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

Zusatzblatt

Abgabe: nicht abzugeben

Aufgabe 1: (Optimierung)
Sei $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ eine Funktion von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$. Hierbei sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit, $b \in \mathbb{R}^n$ und $c \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

$$x^* = \arg\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \Rightarrow Ax^* = b.$$

Aufgabe 2: (Optimierung)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion als $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c$ geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass A symmetrisch positiv definit gewählt werden kann.

b) Bestimmen Sie das Minimum von f mit Hilfe der hinreichenden Bedingung 2. Ordnung.

Aufgabe 3: (Optimierung)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und seien $x, y \in \mathbb{R}^n$. Angenommen es existiert ein $L > 0$, so dass

$$\|\nabla f(x + ty) - \nabla f(x)\| \leq Lt\|y\| \quad \forall\, t \in [0, 1]$$

Beweisen Sie:

$$f(x + y) \leq f(x) + y^T \nabla f(x) + \frac{L}{2}\|y\|^2$$

Hinweise: Definieren Sie eine Hilfsfunktion $g(t) = f(x + ty)$ und bestimmen Sie $\frac{dg(t)}{dt}$. Fangen Sie Ihre Gleichungs-/Ungleichungskette mit $f(x + y) - f(x)$ an. Der Hauptsatz der Integralrechnung könnte hilfreich sein, außerdem erweist es sich als geschickt zu einem Zeitpunkt eine Null in der Form $\nabla f(x) - \nabla f(x)$ zu ergänzen.