Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

2. Übung
Teil der Musterlösung

Aufgabe 3: (Differenzenquotient) [2+4+5 Punkte]

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine beliebige, aber glatte Funktion und $h > 0$. Zeigen Sie die folgende Aussagen mit Hilfe der Taylor-Entwicklung:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi), \text{ für ein } \xi \in [x, x+h], \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \text{ für ein } \xi \in [x-h, x+h]. \tag{2}$$

c) Sei $f(x) := \sin(x)$. Schreiben Sie ein Programm, um die erste Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ zu approximieren. Benutzen Sie dabei (2) und $h = 10^{-2}, 10^{-2,1}, 10^{-2,2}, 10^{-2,3}, \ldots, 10^{-12}$. Bestätigt sich Ihr Ergebnis aus b)? Plotten Sie den relativen Fehler über h. Drucken Sie auch Ihren Quellcode mit aus und reichen Sie Plot und Quellcode mit ein.

Musterlösung

Datei 1: uebung2auf3.m

c)

```
% Numrech WS 2015-2016
% Robert O'Connor
% Uebung 2, Aufgabe 3

% Parameters
x0=1;                       % Wo die Ableitung berechnet wird
h_vals=10.^(-2:-.1:-12);    % Mit welchen h


% Wir werden mit Sinus arbeiten
f=@sin;
exakte=cos(x0);


% Definieren wir die Approximation
df=@(h) (f(x0+h)-f(x0-h))/(2*h);

approx=zeros(size(h_vals));
fehler=zeros(size(h_vals));

% Fehler berechnen
```

```
for i=1:length(h_vals)
    approx(i)=df(h_vals(i));
    fehler(i)=abs(exakte-approx(i));
end

rel_fehler=fehler/abs(exakte);

h=loglog(h_vals,rel_fehler,'LineWidth',2);

% Plot modifizieren
title('Relative Fehler ueber h','FontWeight','bold','FontSize',22)
xlabel('h','FontWeight','bold','FontSize',20)
ylabel('Relative Fehler','FontWeight','bold','FontSize',20)
set(gca,'FontSize',18)

% Plot als PDF speichern
saveas(gcf,'rel_fehler.pdf')
```