Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

7. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 15.12.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Banachscher Fixpunktsatz, 2D) [7+1+2 Punkte]
Gesucht ist eine Näherungslösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\ln(1 + x_2) - 2x_1 = 0$$
$$\sin x_1 \cos x_2 - 4x_2 + 1 = 0$$

in $D = [0, \frac{1}{4}] \times [0, \frac{1}{2}] \subset \mathbb{R}^2$.

a) Leiten Sie eine zugehörige Fixpunktiteration her, und zeigen Sie, dass diese den Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes genügt. Verwenden Sie zum Nachweis der Kontraktivität die Maximumsnorm.

b) Führen Sie ausgehend von $x^{(0)} = (0, 0)^T$ einen Iterationsschritt durch.

c) Wieviele Iterationsschritte sind höchstens notwendig, um den Fixpunkt bis auf 10^{-2} (gemessen in der Maximumsnorm) zu approximieren?

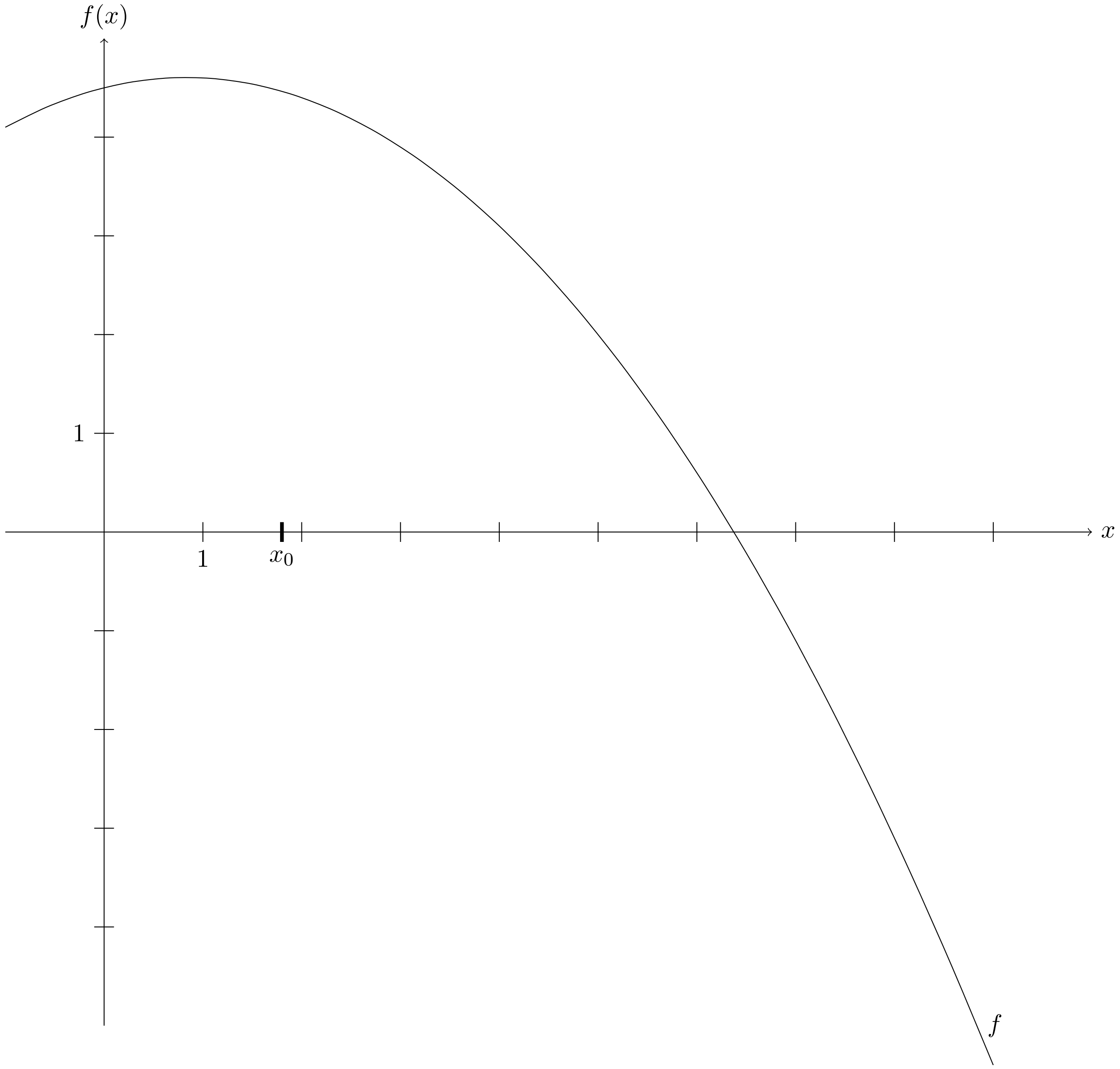
Aufgabe 2: (Newtonverfahren, 2D) [5 Punkte]
Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $x^0 = (x_1^0, x_2^0)^T = (0, 1)^T$ aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 2 \\ e^{x_1} + \ln(x_2) &= 1 \end{aligned}$$

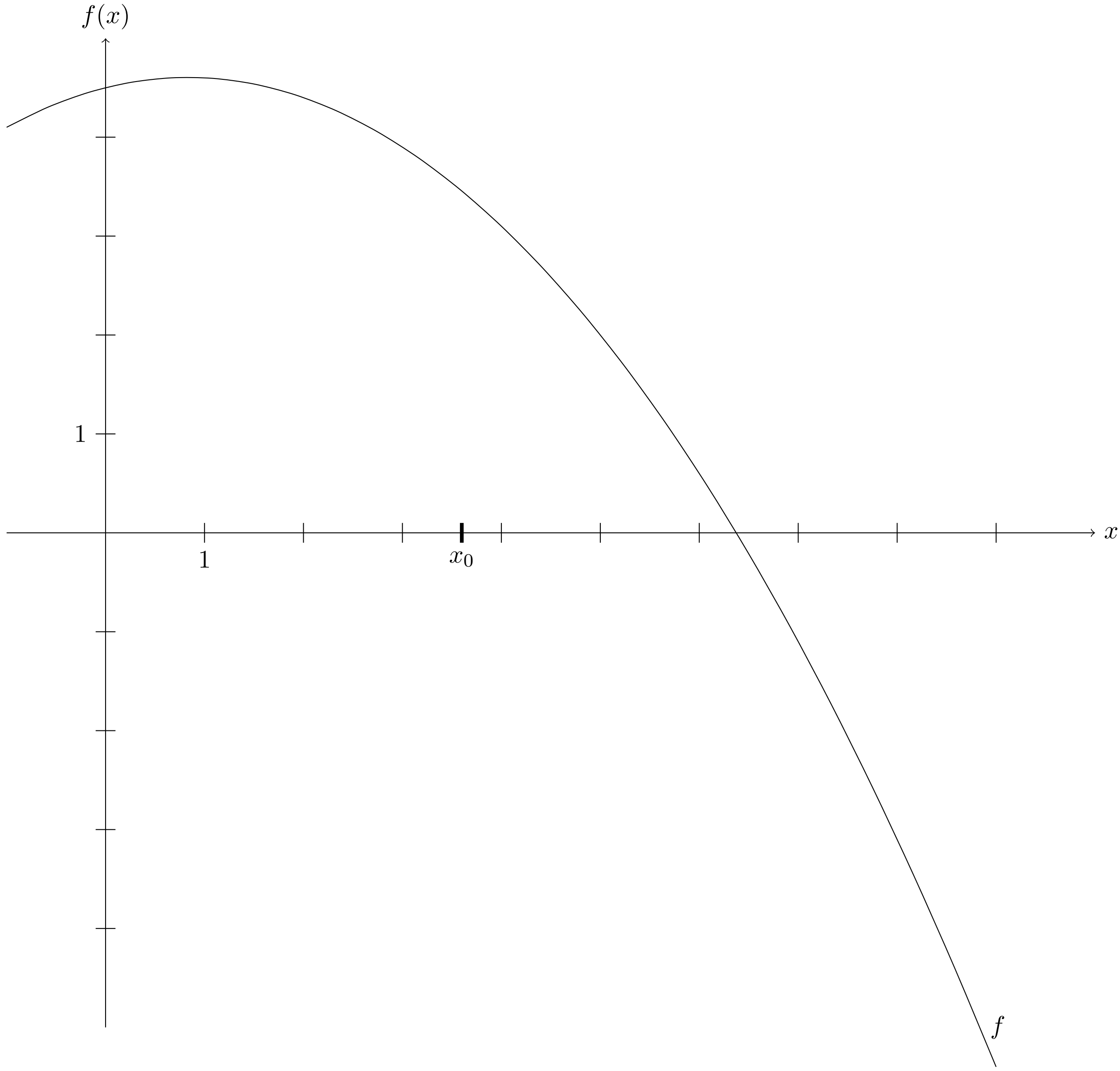
zu approximieren.

Aufgabe 3: (Banach, Newton und Bisektion grafisch) [1+1+1 Punkte]
Drucken Sie die nächsten drei Blätter aus und heften Sie sie zu Ihren restlichen Ausarbeitungen für diese Übung.

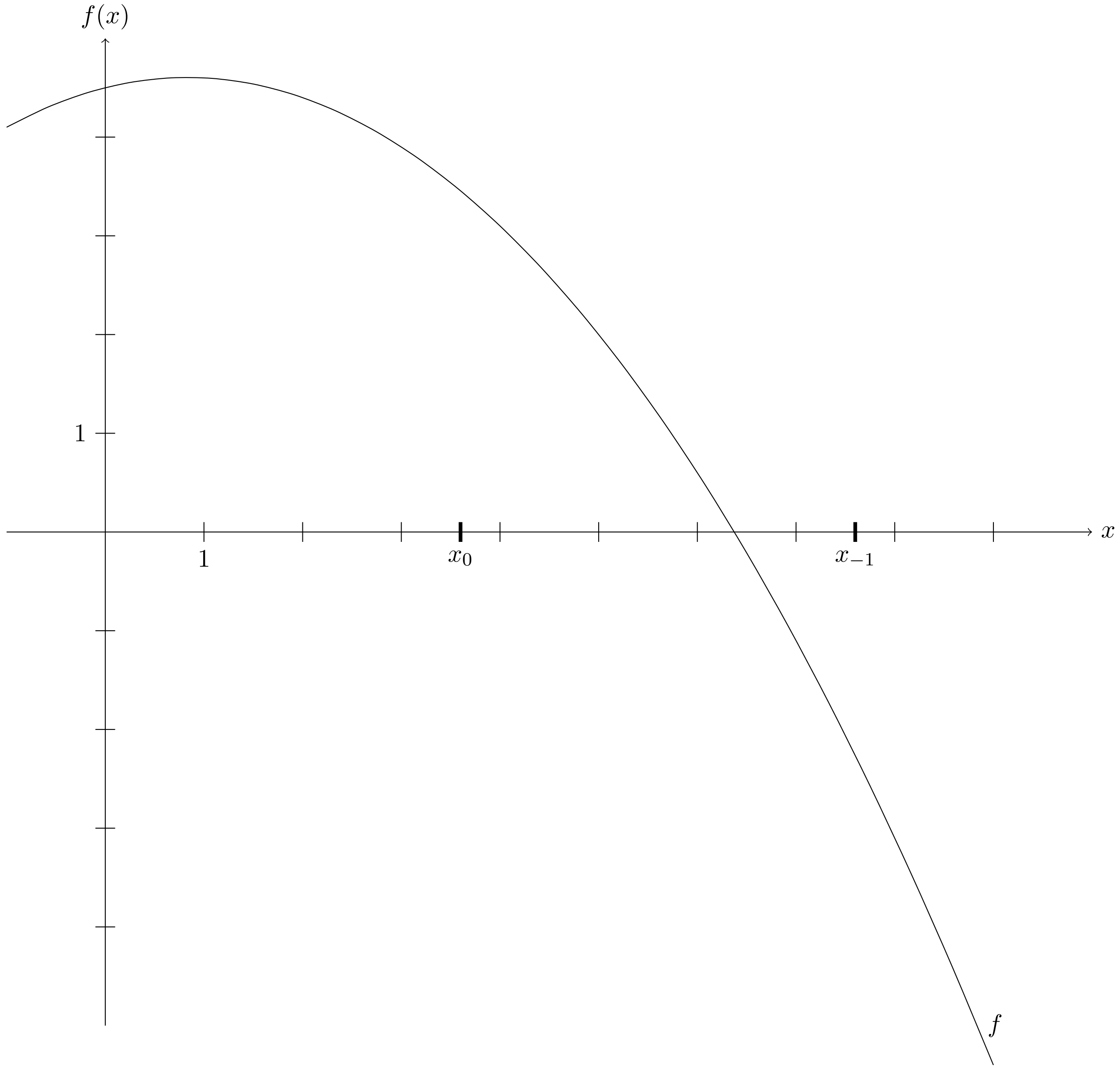
a) Führen Sie für die unten abgebildete Funktion auf grafischem Wege drei Schritte der Fixpunktiteration $x^{k+1} = f(x^k)$ aus. Markieren Sie x_1, x_2, x_3 und $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ auf den Koordinatenachsen.



b) Führen Sie für die unten abgebildete Funktion auf grafischem Wege zwei Schritte der Newton-Iteration aus, um die Nullstelle $\hat{x}$ der Funktion zu approximieren. Benutzen Sie dafür die Farbe Blau für Alles, was mit dem ersten Schritt zusammenhängt (1. Tangente, x_1, $f(x_1)$) und Grün für Alles, was mit dem zweiten Schritt zusammenhängt (2. Tangente, x_2, $f(x_2)$), damit die Skizze möglichst gut zu verstehen ist.



c) Führen Sie für die unten abgebildete Funktion vier Schritte des Bisektionsverfahrens aus, um die Nullstelle $\hat{x}$ der Funktion zu approximieren. Tragen Sie die Werte $x_1, \ldots, x_4$ sowie die Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_4)$ auf den Koordinatenachsen ab.



Aufgabe 4: (Konvergenzgeschwindigkeit Banach, Newton, Bisektion) [3+3+3+3 Punkte]
Gegeben seien die Funktionen $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und $\tilde{f}(x) = f(x) - x$. Weiterhin gegeben ist die Referenzlösung $x^* = 0.6823278038280193273694$, für die $f(x^*) = x^*$, bzw. $\tilde{f}(x^*) = 0$ gilt.

Schreiben Sie jeweils ein Programm, dass den Benutzer ...

a) ... einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Anzahl $n \in \mathbb{N}$ an Schritten eingeben lässt, und dann n Schritte der Banachschen Fixpunktiteration für f durchführt.

b) ... einen Startwert $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine Anzahl $n \in \mathbb{N}$ an Schritten eingeben lässt, und dann n Schritte der Newton-Iteration für $\tilde{f}$ durchführt.

c) ... zwei Startwerte $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ und eine Anzahl $n \in \mathbb{N}$ an Schritten eingeben lässt, und dann n Schritte des Bisektionsalgorithmus für $\tilde{f}$ durchführt.

Bemerkung: Die Funktionen f, $\tilde{f}$ und $\tilde{f}'$ dürfen dabei jeweils fest in Ihrem Programm verankert sein und müssen nicht übergeben werden.

d) Schreiben Sie ein Programm, das die Ergebnisse der ersten drei Programme betragsmäßig in jedem Schritt mit der Referenzlösung vergleicht und plottet (in **dasselbe** Koordinatensystem). Auf der x-Achse soll dabei die Schrittzahl abgetragen werden und auf der y-Achse der logarithmierte Fehler. Führen Sie dieses Programm für $x_0 = 0$, $x_1 = 2$ (nur bei Bisektion) und $n = 15$ aus und geben Sie den entsprechenden Plot mit ab.

Hinweis: Geben Sie alle Sourcecodes in **gedruckter** Form mit ab. Sie müssen die Sourcecodes **nicht** nochmal von Hand abschreiben!