Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

3. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 17.11.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (LR-Zerlegung) [5+2+3 Punkte]
Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -12 \\ 12 & -9 & 15 \\ 4 & -8 & 32 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \ b = \begin{pmatrix} 81 \\ 206 \\ -83 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie die Matrizen L, R und P an. Geben Sie die Permutationsmatrix P auch in Vektorschreibweise kodiert an und erklären Sie, wie diese Vektorschreibweise zu verstehen ist.

b) Bestimmen Sie die Determinante der Matrix A mit Hilfe der Zerlegung.

c) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Zerlegung.

Aufgabe 2: (Kondition von Matrizen) [3+4 Punkte]

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige invertierbare Matrix. Beweisen Sie: Für beliebige vektornorminduzierte Matrixnormen $\|\cdot\|_* : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\kappa_*(A) \geq 1.$$

b) Finden Sie eine Matrixnorm $\|\cdot\|_\# : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ und eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, so dass

$$\kappa_\#(B) < 1$$

ist. Beweisen Sie dabei zunächst, dass es sich bei $\|\cdot\|_\#$ wirklich um eine Matrixnorm handelt, indem Sie die Normaxiome nachweisen.

Anmerkung: Teilaufgabe b) steht nicht im Widerspruch zu der Aussage aus a). Es kann sich bei $\|\cdot\|_\#$ nur offensichtlich nicht um eine vektornorminduzierte Matrixnorm handeln.

Aufgabe 3: (Fehlerbetrachtung bei einem LGS) [6+2+2 Punkte]
Betrachten Sie das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} \frac{45}{56} \\ \frac{25}{36} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

sowie die Approximation $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$, die durch Rundung der Einträge auf drei signifikante Stellen entsteht.

a) Geben Sie $\tilde{A}$ und $\tilde{b}$ an. Schätzen Sie den relativen Fehler $\dfrac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|}$ bezüglich der $\|\cdot\|_1$-Norm und der $\|\cdot\|_\infty$-Norm ab, ohne die Gleichungssysteme zu lösen.

b) Bestimmen Sie die exakten Lösungen von $Ax = b$ und von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$.

c) Berechnen Sie nun die wirklichen relativen Fehler (gemessen sowohl in der $\|\cdot\|_1$- als auch in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm) und vergleichen Sie sie mit der Abschätzung aus Teilaufgabe a).