Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

5. Übung
Teil der Musterlösung

Aufgabe 4: (Stabilität des Ausgleichsproblems) [2+2+3+1 Punkte]
Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$.

a) Schreiben Sie ein Program, welches das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung löst. Sie können dafür sowohl die Matrixmultiplikation als auch die 'qr'-Funktion von Matlab benutzen.

b) Schreiben Sie ein Program, welches das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalgleichungen löst. Sie können dafür sowohl die Matrixmultiplikation als auch den '\'-Operator von Matlab benutzen.

c) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sigma & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Die exakte Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist in diesem Fall durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den relativen Fehler des Lösungsvektors einmal, wenn dieser mittels QR-Zerlegung bestimmt wird und einmal, wenn dieser mit Hilfe der Normalgleichungen bestimmt wird. Wählen Sie hierbei für σ nacheinander die Werte $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$ und $\sigma = 10^{-4}$. Der relative Fehler soll jeweils in der 2-Norm gemessen werden.

d) Wie sind die Ergebnisse von Teil c) zu verstehen?

Hinweis: Die Nutzung von Matlab ist empfohlen aber Sie dürfen auch andere Sprachen benutzen. Bibliotheken für Matrixoperationen, Lösungen von Gleichungssystemen und QR-Zerlegungen dürfen Sie auch in diesem Fall benutzen, nicht aber Bibliotheken, die das Ausgleichsproblem direkt lösen.

Musterlösung

a) Datei 1: loesQR.m

```
% Lineares Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung loesen

function x=loesQR(A,b)
[Q,R]=qr(A);            % QR-Zerlegung berechnen
tildeR=R(1:3,:);        % Einschränken des Gleichungssystems...
QTb=Q'*b;
tildeQTb=QTb(1:3);      % ... auf die oberen drei Komponenten
x=tildeR\tildeQTb;      % Loesen
```

②

b)

Datei 2: loesNorm.m

```
% Lineares Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalgleichung loesen

function x=loesNorm(A,b)
x=(A'*A)\(A'*b);     % Loesen von A^T Ax = A^T b
```

②

c)

Datei 3: aufgabe4relativ.m

```
% Uebungsblatt 5 WS15/16
% Fehler im Bezug auf Normalgleichungen und QR vergleichen

sigs=[.01,.001,.0001];   % Werte fuer Sigma

error_qr=zeros(3,1);
error_norm=zeros(3,1);

% Matrizen definieren
A=[2,2,3;
   1,1,2;
   1,1,2;
   0,0,-2];
b=[5;2;4;-1];

for i=1:size(sigs,2)
  sig=sigs(i);
  A(4,2)=sig;     % Sigma setzen
  x=[1-1/sig;1/sig;1];   % Wahre Loesung
  x_qr=loesQR(A,b);
  x_norm=loesNorm(A,b);
  error_qr(i)=norm(x-x_qr)/norm(x);
  error_norm(i)=norm(x-x_norm)/norm(x);
  cond(A)
end

% Ausgabe
disp(['Fehler mit QR = ',mat2str(error_qr)])
disp(['Fehler mit der Normalgleichung = ',mat2str(error_norm)])
```

σ	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
relativer Fehler bei Normalgleichungen	1.4525×10^{-10}	9.7453×10^{-09}	1.2336×10^{-06}
relativer Fehler bei QR	2.2851×10^{-15}	2.2187×10^{-15}	2.1829×10^{-15}

② ①

d) Der Fehler bei den Normalgleichungen ist viel größer, weil die Matrix A schlecht konditioniert ist und die schlechte Kondition in der Lösung über die Normalgleichungen quadratisch eingeht. (Koniditionen von A: 2.8650×10^3 (für $\sigma = 10^{-2}$), 2.8556×10^4 (für $\sigma = 10^{-3}$), 2.8547×10^5 (für $\sigma = 10^{-4}$)) ①