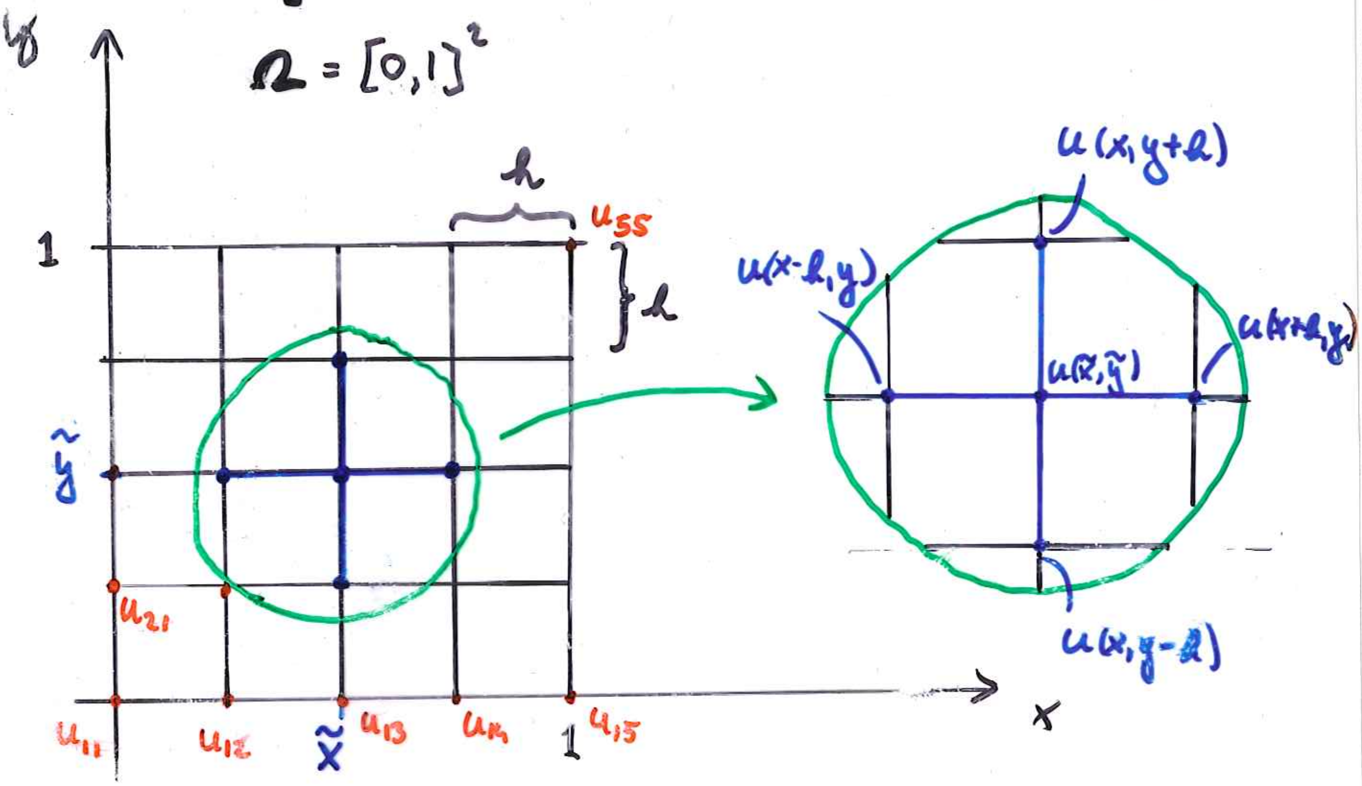
Poisson-Gleichung: Finite Differenzen Diskretisierung



Poisson-Gleichung: $\quad -\dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 1 \quad$ auf Ω

Finite Differenzen:

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2}\left(u(x-h,y) - 2u(x,y) + u(x+h,y) \right)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2}\left(u(x,y-h) - 2u(x,y) + u(x,y+h) \right)$$

Zusammengefaßt:

$$\frac{1}{h^2}\left(-u(x-h,y) - u(x+h,y) - u(x,y-h) - u(x,y+h) + 4u(x,y) \right) = 1$$

Definiere:

$$X = [\, u_{11} \; u_{12} \; u_{13} \; u_{14} \; u_{15} \; u_{21} \; \dots \; u_{55} \,]$$

N 13.2

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt reduzibel, wenn man die Spalten und Zeilen der Matrix so permutieren kann, dass nach der Permutation die Blockgestalt

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline 0 & A_{22} \end{array}\right), \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}, \quad 1 \le k < n$$

entsteht.

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt irreduzibel diagonaldominant, wenn sie irreduzibel ist und außerdem folgender Bedingung genügt:

$$\sum_{j \neq i} |a_{i,j}| \le |a_{i,i}| \quad \text{für alle } i,$$

mit strikter Ungleichheit für mindestens ein i.

Iterative Lösungsverfahren

Poisson-Gleichung mit Schrittweite $h = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $x \in \mathbb{R}^m$, mit $m = (n-1)^2$, d.h. $m \sim h^{-2}$

	$\varrho(I-CA)$	asympt. Konvergenzrate $-\ln(\varrho(I-CA))$	K	Komplexität
Jacobi	$1-\frac{1}{2}\pi^2 h^2$	$\frac{1}{2}\pi^2 h^2$	$\frac{2}{\pi^2 h^2} \ln R$	$C_J\, m^2$ $C_{GS} \approx \frac{1}{2} C_J$
Gauß-Seidel	$1-\pi^2 h^2$	$\pi^2 h^2$	$\frac{1}{\pi^2 h^2} \ln R$	$C_{GS}\, m^2$
SOR ($\omega = \omega_{opt}$)	$1-2\pi h$	$2\pi h$	$\frac{1}{2\pi h} \ln R$	$C_{SOR}\, m^{1.5}$