Numerisches Rechnen

Normen, Taylorreihen, Kondition eines Problems

M. Grepl

J. Berger & R. O'Connor

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2015/16

Vorlesungsinhalt

1. **Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität**
   a) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, Eingabefehler $\boldsymbol{\Delta x}$ $\rightarrow$ Ausgabefehler $\boldsymbol{\Delta y}$
   b) Fehler aufgrund Gleitpunktdarstellung
   c) Fehler (durch Algorithmus) $\approx$ Fehler (durch Kondition)
2. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
   geg.: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$;
   ges.: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
3. Lineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$;
   ges.: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{x}^* = \arg\min_{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 2.1

- Grundlagen: Normen und Taylorreihen
- Kondition eines Problems

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 2.1

- Grundlagen: Normen und Taylorreihen
- Kondition eines Problems

Was Sie mitnehmen sollten:

- Was ist die (relative) Kondition eines Problems?
- Wie wird sie berechnet?
- Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

Normierte Räume

Definition

Sei $\boldsymbol{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung $\|\cdot\| : \boldsymbol{V} \to \mathbb{R}$ heißt Norm auf $\boldsymbol{V}$, falls $\forall \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ gilt:

- $\|\boldsymbol{v}\| \geq \mathbf{0}$, und $\|\boldsymbol{v}\| = \mathbf{0}$ nur wenn $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$.
- Für alle $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$ gilt $\|\boldsymbol{\alpha}\, \boldsymbol{v}\| = |\boldsymbol{\alpha}|\, \|\boldsymbol{v}\|$
- Für alle $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ gilt die Dreiecksungleichung
$$\|\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\| \leq \|\boldsymbol{v}\| + \|\boldsymbol{w}\|$$

Wenn eine Norm auf $\boldsymbol{V}$ definiert ist, nennt man $\boldsymbol{V}$ oft einen linearen normierten Raum.

Vektor- und Matrixnormen

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Für jedes p mit $1 \leq p \leq \infty$ definiert

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

eine Norm.

Speziell:

D:MV

- 1-Norm: $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- ∞-Norm: $\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$
- 2-Norm: $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Euklidische Norm)

$\Rightarrow$ 2-Norm wird durch ein Skalarprodukt induziert.

Vektor- und Matrixnormen

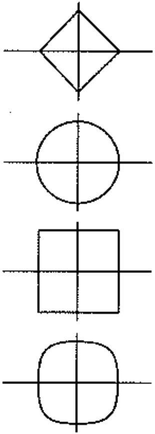
Einheitskreise in $\mathbb{R}^2$ $(m=2)$: $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{m} |x_i|,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2} = \sqrt{x^* x},$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |x_i|,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^p\right)^{1/p} \qquad (1 \le p < \infty).$$



Trefethen & Bau

Vektor- und Matrixnormen

Auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum V sind alle Normen äquivalent, d.h. zu je zwei Normen $\|\cdot\|_*$ und $\|\cdot\|_{**}$ existieren beschränkte, positive Konstanten c und C, so dass

$$c\|v\|_* \leq \|v\|_{**} \leq C\|v\|_*, \quad \text{für alle } v \in V$$

Beispiel: Sei $V = \mathbb{R}^n$, dann gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

und

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \sqrt{n}\|x\|_\infty \\ \|x\|_1 &\leq \sqrt{n}\|x\|_2 \\ \|x\|_1 &\leq n\|x\|_\infty \end{aligned}$$

Vektor- und Matrixnormen

$\Rightarrow$ "Endlich-dimensionaler Vektorraum" beinhaltet nicht nur $\mathbb{R}^n$.

Beispiel: Die Menge

$$\Pi_m := \left\{ \sum_{i=0}^{m} a_i\, x^i \,|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension $m+1$.
Die Monome $m_i(x) := x^i,\ i = 0, \ldots, m,$ dienen als Basis.

Sei $V = C^0(I),\ I = [a,b] \subset \mathbb{R}$, dann ist

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Vektor- und Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|\boldsymbol{A}\|$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ ist die kleinste Zahl $\boldsymbol{C}$, so dass die Ungleichung

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| \leq \boldsymbol{C}\|\boldsymbol{x}\|$$

für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ erfüllt ist.

Vektor- und Matrixnormen

Die induzierte Matrixnorm $\|A\|$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die kleinste Zahl C, so dass die Ungleichung

$$\|Ax\| \leq C\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert

Beachte: Definition gilt entsprechend auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Vektor- und Matrixnormen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert

Vektor- und Matrixnormen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

eine dazugehörige Matrixnorm definiert

Es gilt:

- $\|A\| \geq 0$, und $\|A\| = 0$ nur wenn $A = 0$.
- Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\|\alpha\, A\| = |\alpha|\, \|A\|$
- Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt die Dreiecksungleichung
$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

Vektor- und Matrixnormen

Definition

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\| \cdot \|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, dann ist durch

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

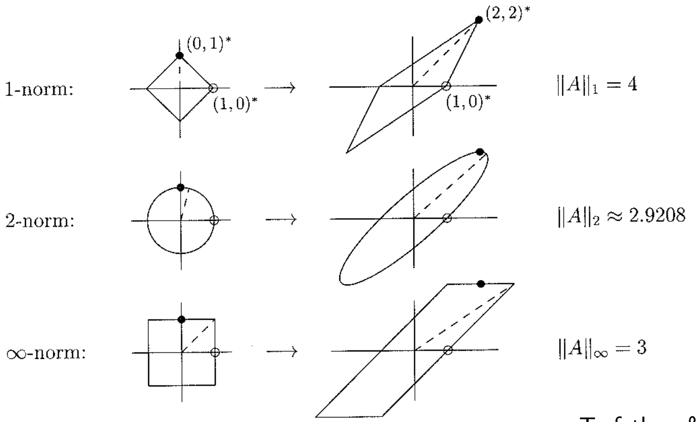
eine dazugehörige Matrixnorm definiert

und:

- $\|Ax\| \leq \|A\| \, \|x\|$
- Es gibt ein $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\|Ax^*\| = \|A\| \, \|x^*\|$
- $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$
- $\|I\| = 1$

Vektor- und Matrixnormen

Einheitskreise in $\mathbb{R}^2$ und Bildbereich für $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$ D:ML



Trefethen & Bau

Vektor- und Matrixnormen

Aus der Definition ergeben sich folgende Formeln: N2.1

- 1-Norm: (max. Spaltensumme)

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

- ∞-Norm: (max. Zeilensumme)

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

- 2-Norm: (Spektralnorm)

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$$

wobei $\lambda_{\max}(A^T A)$ der größte Eigenwert von $A^T A$ ist.

Vektor- und Matrixnormen

Beispiel: Für $A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ergibt sich:

Vektor- und Matrixnormen

Beispiel: Für $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ergibt sich:

$$\|A\|_1 = 4, \qquad \|A\|_\infty = 5.$$

Vektor- und Matrixnormen

Beispiel: Für $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$ ergibt sich:

$$\|\boldsymbol{A}\|_1 = \mathbf{4}, \qquad \|\boldsymbol{A}\|_\infty = \mathbf{5}.$$

Die Eigenwerte der Matrix $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-5} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{10} \end{bmatrix}$ kann man über

$$\det(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I}) = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (\mathbf{5} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{10} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{25} = \mathbf{0}$$

bestimmen. Also

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \tfrac{1}{2}(15 - 5\sqrt{5}), \qquad \boldsymbol{\lambda}_2 = \tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{5})$$

und damit $\|\boldsymbol{A}\|_2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}(15 + 5\sqrt{5})}$.

Landau Symbol

Landau Symbol $\mathcal{O}$

Betrachte zwei Funktionen $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir verwenden die Notation

$$g(x) = \mathcal{O}\left(h(x)\right) \qquad (x \to x_0)$$

wenn es Konstanten $C > 0$ und $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|g(x)| \leq C|h(x)|, \qquad \forall x \text{ mit } |x - x_0| < \delta$$

gilt.

- Anschauliche Bedeutung

$$g \text{ wächst nicht wesentlich schneller als } h$$

- Mathematische Definition

$$0 \leq \lim_{x \to x_0} \sup \left| \frac{g(x)}{h(x)} \right| < \infty$$

N2.2

Skalare Funktionen

Taylorentwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x} - x)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x} - x)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}(\tilde{x} - x)^k, \end{aligned}$$

wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.

Hier steht $f^{(n)}(x)$ für die n-te Ableitung von f nach x, d.h.

$$f^{(2)}(x) = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2},$$

usw.

Skalare Funktionen

Taylorpolynom vom Grad $k-1$ in x

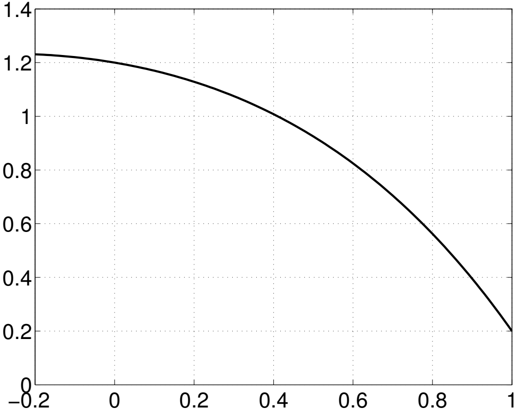
$$\begin{aligned} p_{k-1}(\tilde{x}) \;&=\; f(x) + f'(x)\,(\tilde{x}-x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2}(\tilde{x}-x)^2 + \ldots \\ &\quad + \frac{f^{(k-1)}(x)}{(k-1)!}(\tilde{x}-x)^{k-1}. \end{aligned}$$

- Für $k=1$ erhält man als Spezialfall den Mittelwertsatz
$$\frac{f(\tilde{x})-f(x)}{\tilde{x}-x} = f'(\xi),$$
wobei ξ eine Zahl zwischen $\tilde{x}$ und x ist.
- Oft wird die Darstellung
$$f(\tilde{x}) = p_{k-1}(\tilde{x}) + \mathcal{O}(|\tilde{x}-x|^k) \qquad (\tilde{x}\to x)$$
verwendet.

Skalare Funktionen

Taylorreihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $x = 0$ von

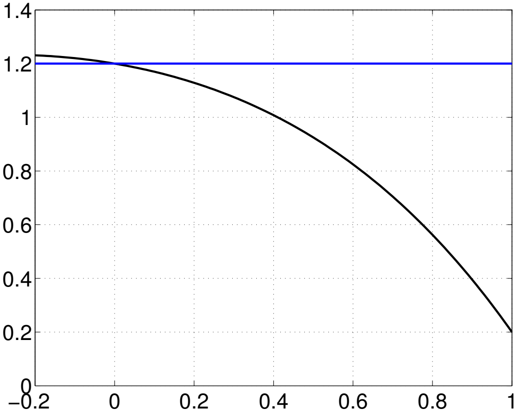
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$



Skalare Funktionen

Taylorreihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $\boldsymbol{x = 0}$ von

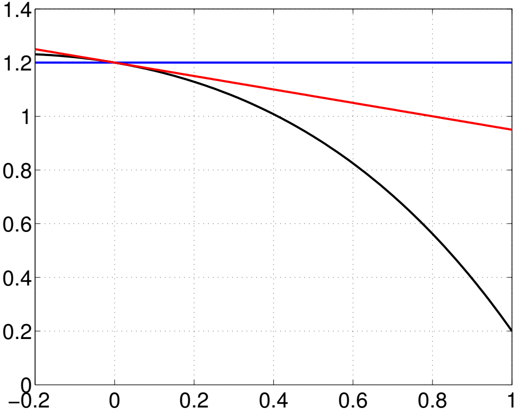
$$\boldsymbol{f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2}$$



Skalare Funktionen

Taylorreihenentwicklung 0., 1. und 2. Ordnung um $x = 0$ von

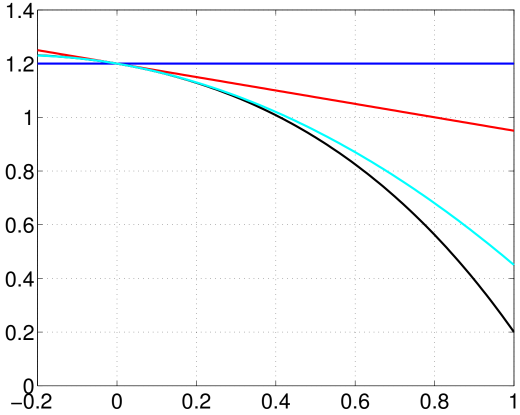
$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2$$



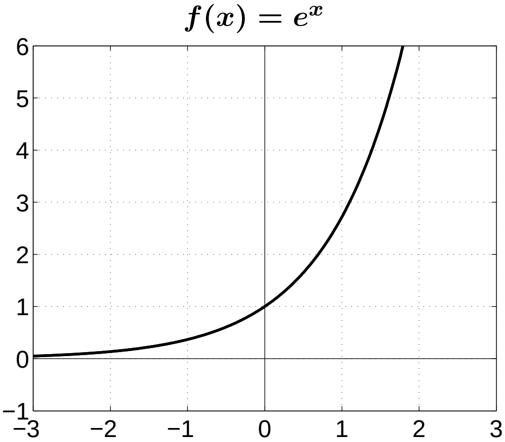
Skalare Funktionen

Taylorreihenentwicklung 0. , 1. und 2. Ordnung um $\boldsymbol{x = 0}$ von

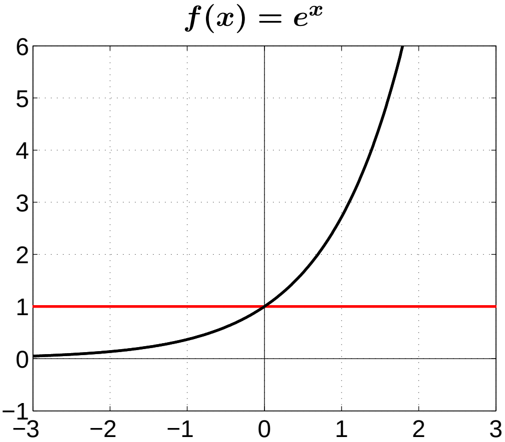
$$\boldsymbol{f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2}$$



Skalare Funktionen



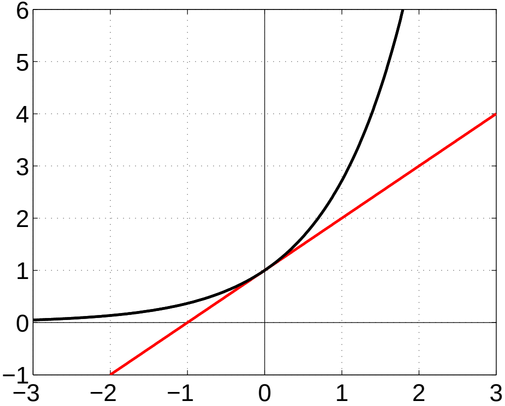
Skalare Funktionen



Taylorpolynom 0. Grades in 0: $p_0(x) = 1$

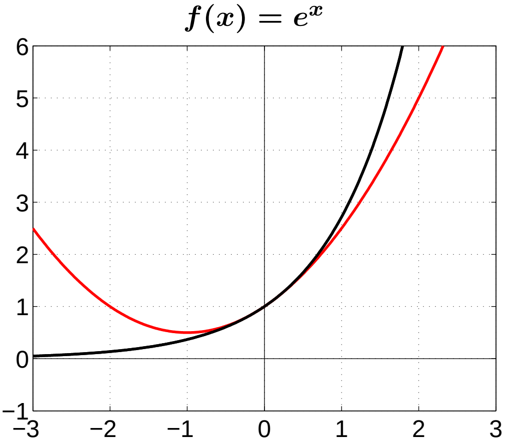
Skalare Funktionen

$$f(x) = e^x$$



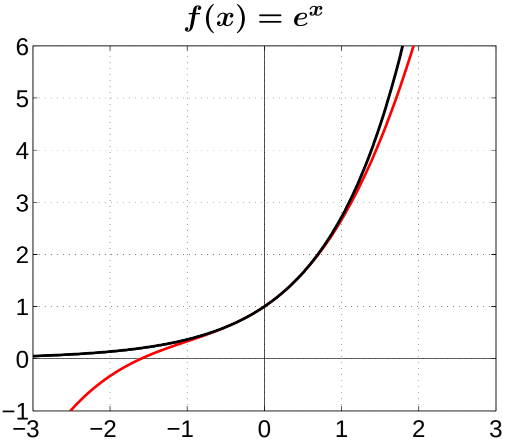
Taylorpolynom 1. Grades in 0: $p_1(x) = 1 + x$

Skalare Funktionen



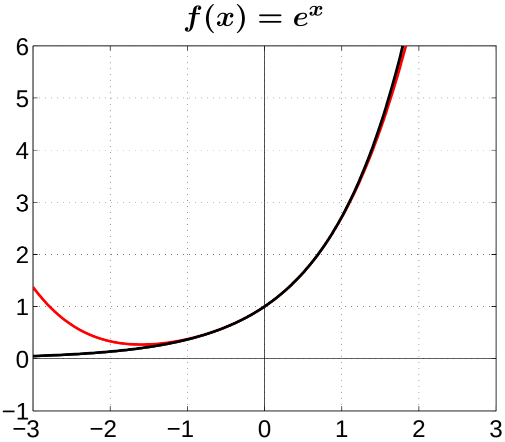
Taylorpolynom 2. Grades in 0: $p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$

Skalare Funktionen



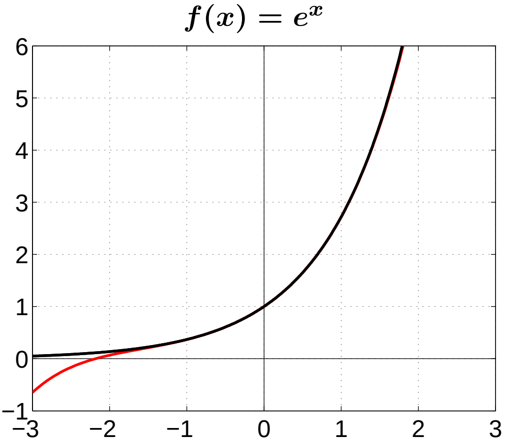
Taylorpolynom 3. Grades in 0: $p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$

Skalare Funktionen



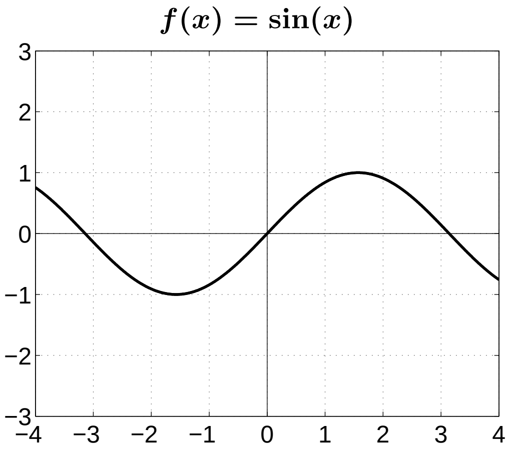
Taylorpolynom 4. Grades in 0: $p_4(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!}$

Skalare Funktionen

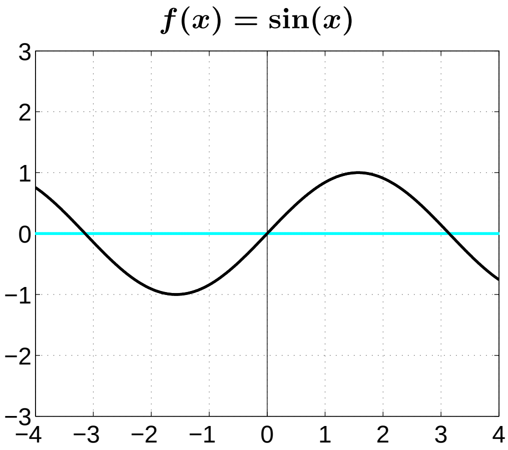


Taylorpolynom 5. Grades in 0: $p_5(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!}$

Skalare Funktionen

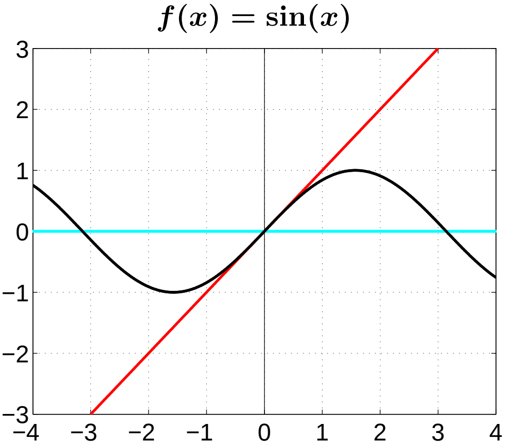


Skalare Funktionen



Taylorpolynom 0. Grades in 0: $p_0(x) = 0$

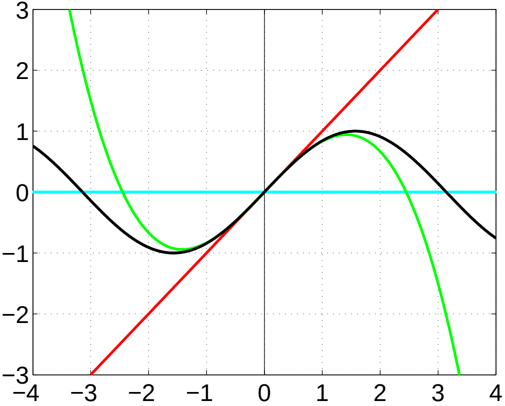
Skalare Funktionen



Taylorpolynom 1. Grades in 0: $p_1(x) = x$

Skalare Funktionen

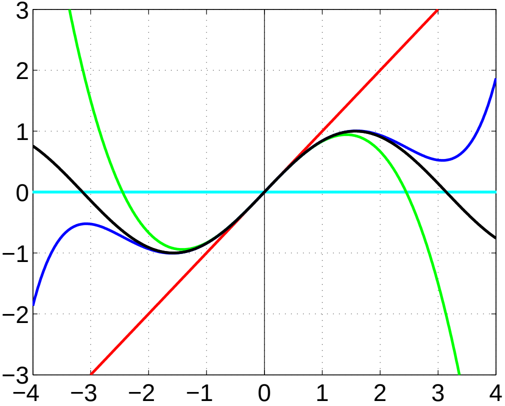
$$f(x) = \sin(x)$$



Taylorpolynom 3. Grades in 0: $p_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$

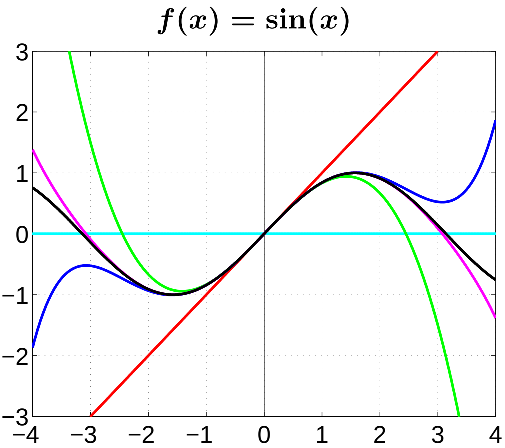
Skalare Funktionen

$$f(x) = \sin(x)$$



Taylorpolynom 5. Grades in 0: $p_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

Skalare Funktionen



Taylorpolynom 7. Grades in 0: $p_7(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$

Vektorwertige Funktionen

Taylorentwicklung (von f um x)

Für hinreichend oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} (\tilde{x}_j - x_j) \\ &+ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} (\tilde{x}_i - x_i)(\tilde{x}_j - x_j) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

- Gradient: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right)^T$
- Hesse-Matrix: $f''(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j=1}^{n}$

Vektorwertige Funktionen

Taylorentwicklung in kompakter Schreibweise

$$\begin{aligned} f(\tilde{x}) &= f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(\tilde{x} - x)^T f''(x)(\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^3). \end{aligned}$$

oder

$$f(\tilde{x}) = f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x) + \mathcal{O}(\|\tilde{x} - x\|_2^2).$$

Falls $\|\tilde{x} - x\|$ klein ist, kann man Terme zweiter Ordnung vernachlässigen und schreibt

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

"$\doteq$" : Übereinstimmung nur in Anteilen 0. und 1. Ordnung.

Fehlerquellen

Fehler im Resultat auf Grund von

- Datenfehlern (oder Eingabefehlern)

  – können häufig nicht vermieden werden

  $\Rightarrow$ Kondition eines Problems

- Fehler im Algorithmus (Verfahrensfehler, Rundungsfehler)

  – Einfluss durch Anpassung des Verfahrens

  $\Rightarrow$ Stabilität eines Algorithmus

Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Kondition

Ziel: Analyse der Fehlerverstärkung bei Datenfehlern

Konzept der Kondition eines Problems

Beachte: Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Für eine präzisere Beschreibung fassen wir den "mathematischen Prozeß" oder das "Problem" als Aufgabe auf, eine gegebene Funktion

$$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$$

an einer Stelle $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ auszuwerten.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:
  $$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$
  und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:
  $$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$
  und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.
- Die Berechnung der Summe von x_1 und x_2:
  $$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
  und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Die Berechnung der Multiplikation von x_1 und x_2:
$$f(x_1, x_2) = x_1\, x_2$$
und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.
- Die Berechnung der Summe von x_1 und x_2:
$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
und $X = \mathbb{R}^2$, $Y = \mathbb{R}$.
- Man bestimme die kleinere Nullstelle der Gleichung
$$y^2 - 2\, x_1\, y + x_2 = 0,$$
mit $x_1^2 > x_2$. Die Lösung y^* ist
$$y^* = f(x_1, x_2) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}.$$
In diesem Fall gilt $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1^2 > x_2\}$, $Y = \mathbb{R}$.

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\} \\ G_2 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\} \end{aligned}$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien. Mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$Ay = x.$$

Elementare Beispiele

- Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{1,1}\, y_1 + a_{1,2}\, y_2 = x_1\} \\ G_2 &= \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_{2,1}\, y_1 + a_{2,2}\, y_2 = x_2\} \end{aligned}$$

wobei $(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ und $a_{i,j}$ gegeben seien. Mit

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$$

ergibt sich

$$Ay = x.$$

Annahme: $\det(A) \neq 0$, dann ist y durch

$$y = A^{-1}x$$

gegeben. Also Auswertung der Funktion

$$f(x) = A^{-1}x,$$

d.h. $X = Y = \mathbb{R}^2$.

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Gestörtes Problem

$$\underbrace{\tilde{x} = x + \Delta x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{\tilde{y} = f(\tilde{x})}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

Begriff der Kondition

Ungestörtes Problem

$$\underbrace{x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{y = f(x)}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

Gestörtes Problem

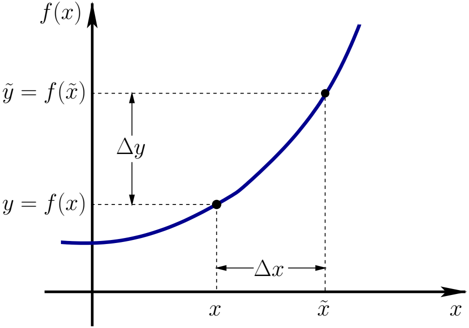
$$\underbrace{\tilde{x} = x + \Delta x}_{\text{Eingabedaten}} \in X \xrightarrow[f]{\boxed{\text{Problem, Prozeß}}} \underbrace{\tilde{y} = f(\tilde{x})}_{\text{Ausgabedaten}} \in Y$$

mit Eingabefehler $\Delta x = \tilde{x} - x$

Ausgabefehler $\Delta y = \tilde{y} - y = f(\tilde{x}) - f(x)$

Ziel: Verhältnis Ausgabefehler Δy zu Eingabefehler Δx.

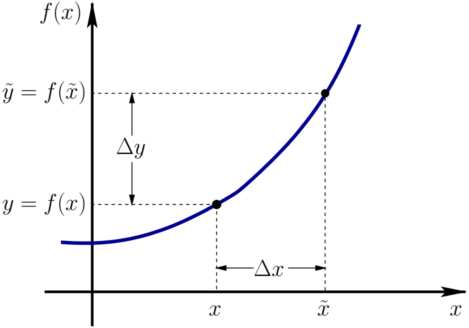
Begriff der Kondition: skalare Funktion



Allgemein:

- absoluter Eingabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}$
- absoluter Ausgabefehler: $\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}$

Begriff der Kondition: skalare Funktion



Allgemein:

- relativer Eingabefehler: $\boldsymbol{\delta_x} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}{\|\boldsymbol{x}\|_{\boldsymbol{X}}}$
- relativer Ausgabefehler: $\boldsymbol{\delta_y} = \dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{y}\|_{\boldsymbol{Y}}}$

Relative und Absolute Kondition

Definition

Mit der relativen Kondition eines (durch $\boldsymbol{f}$ beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Relative und Absolute Kondition

Definition

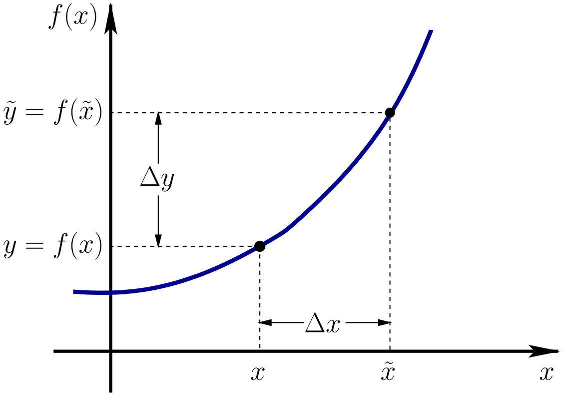
Mit der relativen Kondition eines (durch $\boldsymbol{f}$ beschriebenen) Problems bezeichnet man das Verhältnis

$$\frac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$$

des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

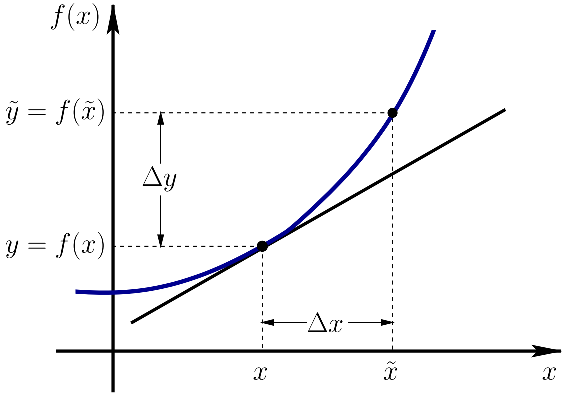
- Absolute Kondition: Verhältnis $\frac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$
- Mit Kondition wird meistens die relative Kondition gemeint.
- Ein Problem ist umso besser konditioniert, je kleinere Schranken für $\boldsymbol{\delta_y}/\boldsymbol{\delta_x}$ (mit $\boldsymbol{\delta_x} \to \boldsymbol{0}$) existieren.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



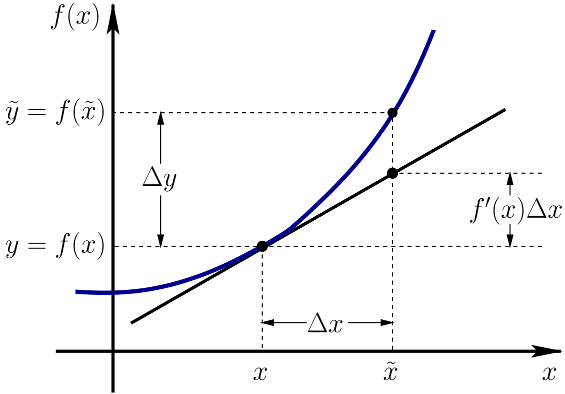
Kondition: Verhältnis $\dfrac{\delta_y}{\delta_x}$ bzw. $\dfrac{\|\Delta y\|_Y}{\|\Delta x\|_X}$.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Taylorentwicklung 1. Ordnung



Kondition: Verhältnis $\dfrac{\boldsymbol{\delta_y}}{\boldsymbol{\delta_x}}$ bzw. $\dfrac{\|\boldsymbol{\Delta y}\|_{\boldsymbol{Y}}}{\|\boldsymbol{\Delta x}\|_{\boldsymbol{X}}}$.

Kondition: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung von $f(x)$ um x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

wobei "$\doteq$" andeutet, dass beide Seiten nur in den Anteilen nullter und erster Ordnung übereinstimmen.

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar) B2.1

Kondition: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung von $f(x)$ um x

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + f'(x)\,(\tilde{x} - x)$$

wobei "$\doteq$" andeutet, dass beide Seiten nur in den Anteilen nullter und erster Ordnung übereinstimmen.

Daraus erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar) B2.1

$$\left|\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}\right| \doteq \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

mit $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) := \left| f'(x) \dfrac{x}{f(x)} \right|$.

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$.

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)} \right) \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}.$$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylorreihenentwicklung 1. Ordnung

$$f(\tilde{x}) \doteq f(x) + (\nabla f(x))^T (\tilde{x} - x)$$

mit $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Hieraus folgt

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \doteq \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)} \right) \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}.$$

Mit den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}$$

erhält man

$$\underbrace{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)}}_{\substack{\text{rel. Fehler} \\ \text{der Ausgabe}}} \doteq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\phi_j(x)}_{\substack{\text{Fehler-} \\ \text{verstärkung}}} \underbrace{\frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j}}_{\substack{\text{rel. Fehler} \\ \text{der Eingabe in } x_j}}$$

Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar) B2.2

Kondition $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar) B2.2

$$\left| \frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{f(x)} \right| \dot{\leq} \kappa_{\mathrm{rel}}(x) \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\tilde{x}_j - x_j}{x_j} \right|$$

mit $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \kappa_{\mathrm{rel}}^{\infty}(x) := \max_j |\phi_j(x)|$ und den Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}.$$

N2.3

Beispiel 2.12

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Für die relative Konditionszahl erhält man

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\, x^2.$$

Daraus folgt, dass diese Funktion für $|x|$ klein gut konditioniert und für $|x|$ groß schlecht konditioniert ist.

Beispiel 2.12

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Für die relative Konditionszahl erhält man

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\, x^2.$$

Daraus folgt, dass diese Funktion für $|x|$ klein gut konditioniert und für $|x|$ groß schlecht konditioniert ist.

Beispiel:

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\text{rel}}(0.1) = 6 \times 10^{-2}$

  $$\left| \frac{x-\tilde{x}}{x} \right| = 10^{-4} \to \left| \frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)} \right| = 6.03 \times 10^{-6}$$

Beispiel 2.12

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{3x^2}.$$

Für die relative Konditionszahl erhält man

$$\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \left| f'(x) \frac{x}{f(x)} \right| = 6\, x^2.$$

Daraus folgt, dass diese Funktion für $|x|$ klein gut konditioniert und für $|x|$ groß schlecht konditioniert ist.

Beispiel:

- $x = 0.1,\ \tilde{x} = 0.10001$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(0.1) = 6 \times 10^{-2}$

  $$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 6.03 \times 10^{-6}$$

- $x = 4,\ \tilde{x} = 4.0004$: $\kappa_{\mathrm{rel}}(4) = 96$

  $$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| = 10^{-4} \to \left|\frac{f(x)-f(\tilde{x})}{f(x)}\right| = 9.65 \times 10^{-3}$$

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$ B2.3

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 \, x_2$ B2.3

  $$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert. Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$ B2.4

Elementare Rechenoperationen

Kondition bei

- Multiplikation: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1\, x_2$ B2.3

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = 1 \text{ (von } x \text{ unabhängig!)}$$

  Multiplikation für alle Eingangsdaten gut konditioniert. Ein ähnliches Resultat gilt für die Division.

- Addition: $x = (x_1, x_2)^T$, $f(x) = x_1 + x_2$ B2.4

$$\kappa_{\text{rel}}(x) = \max\left\{\left|\frac{x_1}{x_1 + x_2}\right|, \left|\frac{x_2}{x_1 + x_2}\right|\right\}$$

  Bei zwei Zahlen mit gleichem Vorzeichen: $\kappa_{\text{rel}} \leq 1$.
  ABER: $\kappa_{\text{rel}}(x) \gg 1$ wenn $x_1 \approx -x_2$.

Beispiel 2.15 (Nullstelle)

Bestimmung der kleineren Nullstelle y^* von $y^2 - 2x_1 y + x_2 = 0$:

$$x = (x_1, x_2)^T, \qquad y^* = f(x) = x_1 - \sqrt{x_1^2 - x_2}$$

- Partielle Ableitungen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{x_1^2 - x_2} - x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_j(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \frac{x_j}{f(x)}$$

Beispiel 2.15 (Nullstelle)

- Verstärkungsfaktoren

$$\phi_1(x) = \frac{-y^*}{\sqrt{x_1^2 - x_2}} \frac{x_1}{y^*} = \frac{-x_1}{\sqrt{x_1^2 - x_2}}$$

$$\phi_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x_1^2 - x_2}} \frac{x_2}{y^*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\phi_1(x)$$

- Kondition: $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) = \max_j |\phi_j(x)|$

Kondition hängt stark von der Stelle (x_1, x_2) ab:

- Wenn $x_2 < 0$: $|\phi_1(x)| \leq 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \leq 1$
- Wenn $x_2 \approx x_1^2$: $|\phi_1(x)| \gg 1$ und $\kappa_{\mathrm{rel}}(x) \gg 1$

D:MV

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Wir haben

$$y = f(x) = A^{-1}x$$

bzw. für gestörte Daten

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = A^{-1}\tilde{x}$$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor) B2.5

Kondition: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Wir haben

$$y = f(x) = A^{-1}x$$

bzw. für gestörte Daten

$$\tilde{y} = f(\tilde{x}) = A^{-1}\tilde{x}$$

Damit erhält man die Kondition für

- $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor) B2.5

$$\frac{\|f(\tilde{x}) - f(x)\|}{\|f(x)\|} \leq \underbrace{\|A\| \, \|A^{-1}\|}_{\kappa(A)} \frac{\|\tilde{x} - x\|}{\|x\|}$$

wobei

$$\kappa(A) \equiv \|A\| \, \|A^{-1}\|$$

die Konditionszahl der Matrix A ist. N2.3

Beispiel 2.28

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

$$\begin{aligned} 3\,u_1 + 1.001\,u_2 &= 1.999 \\ 6\,u_1 + 1.997\,u_2 &= 4.003. \end{aligned}$$

(fast parallel!) ergibt das Problem $u = A^{-1}b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $u = (1, -1)^T$.

Beispiel 2.28

Die Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden

$$\begin{aligned} 3\,u_1 + 1.001\,u_2 &= 1.999 \\ 6\,u_1 + 1.997\,u_2 &= 4.003. \end{aligned}$$

(fast parallel!) ergibt das Problem $u = A^{-1}b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix}$$

Die Lösung ist $u = (1, -1)^T$.

Wir berechnen den Effekt einer Störung in b:

$$\tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{u} = A^{-1}\tilde{b}.$$

Man rechnet einfach nach, dass

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{u} = \begin{pmatrix} 0.4004 \\ 0.8 \end{pmatrix}$$

Beispiel 2.28

Als Norm wird die Maximumnorm genommen:

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

Es gilt

- Störung der Daten

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{b}} - \boldsymbol{b}\|_\infty}{\|\boldsymbol{b}\|_\infty} = \frac{3 \times 10^{-3}}{4.003} \approx 7.5 \times 10^{-4}$$

- Änderung des Resultats

$$\frac{\|\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}\|_\infty}{\|\boldsymbol{u}\|_\infty} = \frac{1.8}{1} \approx 1.8$$

Schlechte Kondition wird quantifiziert durch

$$\|A\|_\infty \, \|A^{-1}\|_\infty = 4798.2.$$

D:MV

Zusammenfassung

Kondition

- ist unabhängig von einem speziellen Lösungweg (Algorithmus)
- gibt an, welche Genauigkeit man bestenfalls (bei exakter Rechnung) bei gestörten Eingangsdaten erwarten kann.

Was ist die (relative) Kondition eines Problems?

- Die relative Kondition eines Problems bezeichnet das Verhältnis des relativen Ausgabefehlers zum relativen Eingabefehler, d.h. die Sensitivität des Problems unter Störungen der Eingabedaten.

Zusammenfassung

Wie wird die Kondition berechnet?

- Wir haben folgende Fälle betrachtet
  - $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Skalar, Ausgabe: Skalar)
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Skalar)
  - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Eingabe: Vektor, Ausgabe: Vektor)
    $\Rightarrow$ Fall $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ nur für f linear

Wie sind die elementaren Rechenoperationen konditioniert?

- Multiplikation und Division sind für alle Eingangsdaten gut konditioniert.
- Addition (bzw. Subtraktion) ist
  - gut konditioniert, wenn beide Zahlen das gleiche (bzw. unterschiedliches) Vorzeichen haben;
  - sehr schlecht konditioniert, wenn $x_1 \approx -x_2$ (bzw. $x_1 \approx x_2$).