Numerisches Rechnen

Lineare Gleichungssysteme

M. Grepl

J. Berger & R. O'Connor

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2015/16

Vorlesungsinhalt

1. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
   a) $y = f(x)$, Eingabefehler $\Delta x \rightarrow$ Ausgabefehler Δy
   b) Fehler aufgrund Gleitpunktdarstellung
   c) Fehler (durch Algorithmus) $\approx$ Fehler (durch Kondition)
2. **Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren**
   geg.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$;
   ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax = b$
3. Lineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 3.1-3.5

- Kondition und Störungssätze
- Zeilenskalierung
- Dreiecksmatrizen
- Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 3.1-3.5

- Kondition und Störungssätze
- Zeilenskalierung
- Dreiecksmatrizen
- Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie ist das Problem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konditioniert?
- Warum benötige ich Zeilenskalierung und Pivotisierung?
- Wie und weshalb funktioniert die LR-Zerlegung?

Motivation

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen (z.B. Filtern verrauschter Bilder).

Motivation

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen (z.B. Filtern verrauschter Bilder).
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (*Normalgleichungen*, siehe nächstes Kapitel).

Motivation

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen (z.B. Filtern verrauschter Bilder).
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (*Normalgleichungen*, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines *nichtlinearen* Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Motivation

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen (z.B. Filtern verrauschter Bilder).
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (*Normalgleichungen*, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines *nichtlinearen* Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Wahl des Lösungsverfahrens hängt vom Problem ab

- dünnbesetztes vs. vollbesetztes Gleichungssystem
- Strukur (Tridiagonal-, Bandmatrizen)

Problemstellung

Notation: $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Menge der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

mit Einträgen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

Aufgabe

Zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bestimme ein $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\,x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}\,x_n & = & b_n \end{array}$$

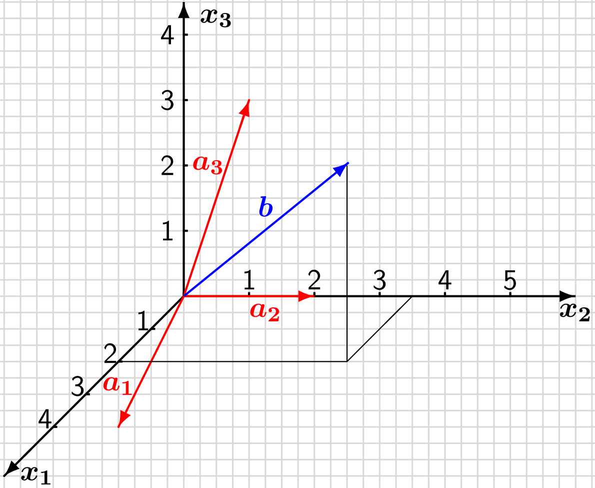
bzw. kurz $Ax = b$ erfüllt.

Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

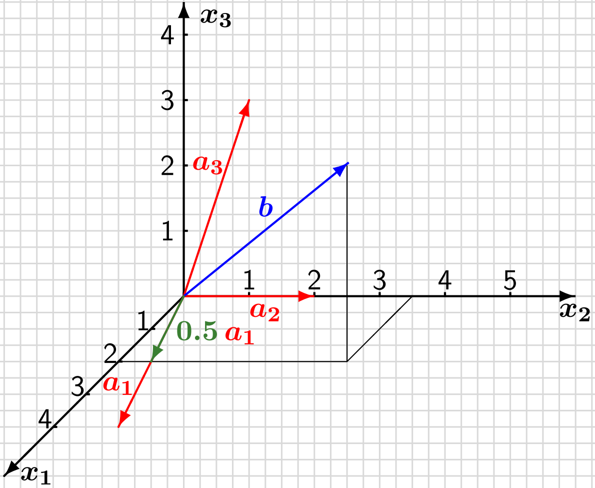


Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ ? \\ ? \end{bmatrix}$$

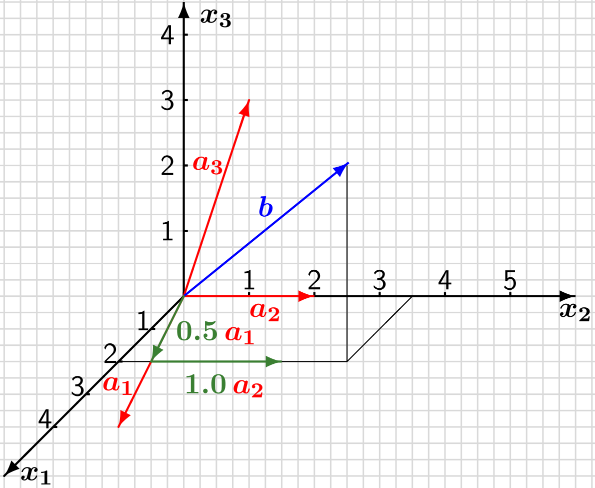


Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ ? \end{bmatrix}$$

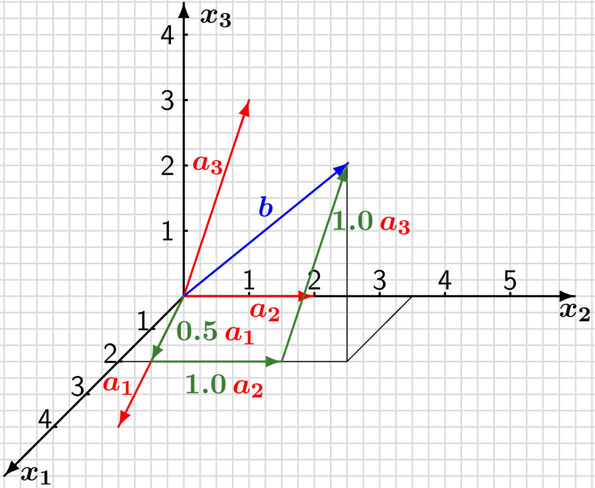


Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$



Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.

Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $\boldsymbol{n}$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$.

Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang n.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Es gilt $\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang n.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Es gilt $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

$\boldsymbol{A}$ heißt *regulär* oder *nichtsingulär*, wenn $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

Annahme: Wir nehmen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme stets an, dass $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ gilt.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.7

Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|}_{\kappa_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \; \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\kappa_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) ist.

Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

Satz 3.7

Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|}_{\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) ist.

Der relative Fehler der Lösung läßt sich durch das Vielfache

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

des relativen Fehlers der rechten Seite (Eingabedaten) abschätzen.

Störung in A und b

Satz 3.9

Sie $x + \Delta x$ die Lösung von

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Falls $\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$ gilt, folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

Störung in $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$

Satz 3.9

Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{\Delta A})(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}.$$

Falls $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} < 1$ gilt, folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \frac{\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})}{1 - \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|}} \left(\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} + \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \right).$$

Beachte: Falls

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{\Delta A}\| \ll 1,$$

beschreibt die Konditionszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ auch maßgeblich die Störungen in den übrigen Eingabedaten.

N3.1

Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.999} \\ \mathbf{4.003} \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.999} \\ \mathbf{4.003} \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \mathbf{2.002} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von $\boldsymbol{A}$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_\infty = 600, \ \|\boldsymbol{A}\|_\infty = 7.997$$

Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

1. Schritt: Berechne Konditionszahl von A

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix}}$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

3. Schritt: Aus Satz 3.9 ergibt sich somit als Schranke für den relativen Fehler der Lösung $\boldsymbol{\tilde{x}}$ von $\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}}$.

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10.49.}$$

Beispiel 3.11

2. Schritt: Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

3. Schritt: Aus Satz 3.9 ergibt sich somit als Schranke für den relativen Fehler der Lösung $\boldsymbol{\tilde{x}}$ von $\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}}$.

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10.49.}$$

Mit exakter Lösung $\boldsymbol{x = (1, -1)^T}$ von $\boldsymbol{Ax = b}$ und gestörter Lösung $\boldsymbol{\tilde{x} = (0.2229, 1.3333)^T}$ von $\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}}$ ergibt sich der tatsächliche relative Fehler

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 2.333}.$$

Bemerkung 3.10

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit $\mathbf{eps}$ seien die Daten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ mit relativen Fehlern $\leq \mathbf{eps}$ behaftet, d.h.

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \mathbf{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \mathbf{eps}.$$

Bemerkung 3.10

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit $\mathbf{eps}$ seien die Daten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ mit relativen Fehlern $\leq \mathbf{eps}$ behaftet, d.h.

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \mathbf{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \mathbf{eps}.$$

Nach Satz 3.9 ist wegen der Kondition des Problems $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ der unvermeidliche Fehler in der Lösung $\boldsymbol{x}$ gegeben durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \mathcal{O}(\kappa(A)\,\mathbf{eps}).$$

N3.2

Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben: – Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
– Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definition

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$ is definiert als

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte: – Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
– $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben: – Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
– Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definition

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$ is definiert als

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte: – Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
– $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Frage: Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben: – Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$
– Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

Definition

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$ is definiert als

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte: – Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
– $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Frage: Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Für die Norm des Residuums im Vergleich zu der des Fehlers gilt:

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$\Rightarrow$ hängt wieder von der Kondition ab.

Beispiel 3.12

Sei $\boldsymbol{b} = (3, 6)^T$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}$ $(\kappa_\infty(A) = 4798.2)$.

Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (1, 0)^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 0.99684 \\ 0.00949 \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} 1.000045 \\ 0.000089 \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - A\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 1.95 \times 10^{-5},$$
$$\|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - A\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 4.48 \times 10^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist also viel kleiner als für $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty \ll \|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty.$$

Beispiel 3.12

Sei $\boldsymbol{b} = (\mathbf{3}, \mathbf{6})^T$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}$ $(\kappa_\infty(\boldsymbol{A}) = \mathbf{4798.2})$.

Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.99684} \\ \mathbf{0.00949} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.000045} \\ \mathbf{0.000089} \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \mathbf{1.95} \times \mathbf{10}^{-5},$$
$$\|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \mathbf{4.48} \times \mathbf{10}^{-4}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist also viel kleiner als für $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty \ll \|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty.$$

Der Fehler in $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist aber viel größer als in $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{9.49} \times \mathbf{10}^{-3} \gg \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{8.90} \times \mathbf{10}^{-5}.$$

Zeilenskalierung

Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung
$\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Zeilenskalierung

Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung
$\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Frage: Kann man die Kondition einer Matrix verbessern?

Zeilenskalierung

Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung $\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Frage: Kann man die Kondition einer Matrix verbessern?

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung (Zeilenäquilibrierung), d.h. Multiplikation der i-ten Zeile der Matrix mit einer Zahl $d_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Zeilenskalierung

Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung
$\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Frage: Kann man die Kondition einer Matrix verbessern?

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung (Zeilenäquilibrierung), d.h. Multiplikation der i-ten Zeile der Matrix mit einer Zahl $d_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Forme das Gleichungssystem $Ax = b$ in ein äquivalentes Systems

$$\begin{aligned} \underbrace{D_z A}\, x &= \underbrace{D_z b} \\ A_{\mathrm{neu}} x &= b_{\mathrm{neu}} \end{aligned}$$

um, wobei D_z die Diagonalmatrix $D_z = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ bezeichnet.

Zeilenskalierung

Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung
$\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

Frage: Kann man die Kondition einer Matrix verbessern?

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung (Zeilenäquilibrierung), d.h. Multiplikation der i-ten Zeile der Matrix mit einer Zahl $d_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Forme das Gleichungssystem $Ax = b$ in ein äquivalentes Systems

$$\begin{aligned} \underbrace{D_z A}\, x &= \underbrace{D_z b} \\ A_{\text{neu}} x &= b_{\text{neu}} \end{aligned}$$

um, wobei D_z die Diagonalmatrix $D_z = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ bezeichnet.

Ziel: Wähle D_z so, dass die Kondition der Matrix (wesentlich) verbessert wird.

Zeilenskalierung

Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch

$$d_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)^{-1}$$

Für die skalierte Matrix gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z\, A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Zeilenskalierung

Sei D_z die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch

$$d_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)^{-1}$$

Für die skalierte Matrix gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z\, A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Die Skalierung mit D_z hat folgende

Optimalitätseigenschaft

$\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix D.

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung mit D_z liefert die minimale Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm.

N3.3

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

Für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{10000} \\ \mathbf{50} & \mathbf{-60} \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad \mathbf{10008}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \; 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \; 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.14

Für

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \ 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \ 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$D_z A = \begin{pmatrix} 0.799 \times 10^{-3} & 0.999 \\ 0.455 & -0.545 \end{pmatrix}$$

und damit $\kappa_\infty(D_z A) = 3.40$.

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n-1}$

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{n}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^T$: $\boldsymbol{n^2}$

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\, \boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\, n - 1}$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\, \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{2}}$
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\, \boldsymbol{x}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x^T\, y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x\, y^T}$: $\boldsymbol{n^2}$
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A\, x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$ und Vektoren $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}\,\boldsymbol{y}$: $\boldsymbol{2\,n - 1}$
- Dyadisches Produkt $\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{T}}$: $\boldsymbol{n^2}$
- Matrix-Vektor Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$: $\boldsymbol{2\,n^2 - n}$
- Matrix-Matrix Produkt $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$:

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen A, $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und Vektoren x, $y \in \mathbb{R}^n$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $x^T y$: $2n - 1$
- Dyadisches Produkt $x\, y^T$: n^2
- Matrix-Vektor Produkt $A\, x$: $2n^2 - n$
- Matrix-Matrix Produkt $A\, B$: $2n^3 - n^2$

Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $x^T y$: $2n - 1$ $\qquad \mathcal{O}(n)$
- Dyadisches Produkt $x\,y^T$: n^2 $\qquad \mathcal{O}(n^2)$
- Matrix-Vektor Produkt $A\,x$: $2n^2 - n$ $\qquad \mathcal{O}(n^2)$
- Matrix-Matrix Produkt $A\,B$: $2n^3 - n^2$ $\qquad \mathcal{O}(n^3)$

Beachte

Bei der Zählung der Rechenoperationen in einem Algorithmus werden

- (traditionsgemäß) nur Multiplikationen und Divisionen, und
- nur Terme höchster Ordnung gezählt.

Beispiel 3.16

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ (obere Dreiecksmatrix) erlaubt eine einfache Lösung:

Beispiel 3.16

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ (obere Dreiecksmatrix) erlaubt eine einfache Lösung:

$$x_3 \;=\; 4/2 \;=\; 2$$

Beispiel 3.16

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ (obere Dreiecksmatrix) erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{4/2} = \mathbf{2} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \mathbf{1 - 3 \cdot 2} = \mathbf{-5} \end{aligned}$$

Beispiel 3.16

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ (obere Dreiecksmatrix) erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_3 &= \mathbf{4/2 = 2} \\ \boldsymbol{x}_2 &= \mathbf{1 - 3 \cdot 2 = -5} \\ \boldsymbol{x}_1 &= \mathbf{\tfrac{1}{3}(0 - (-1)(-5) - 2 \cdot 2) = -3} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Definition

Eine Martix $\boldsymbol{R} = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls

$$r_{i,j} = 0 \text{ für } i > j$$

gilt.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_{1,1}\,x_1 & + & r_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & r_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & r_{n-1,n-1}\,x_{n-1} & + & r_{n-1,n}\,x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & r_{n,n},\,x_n & = & b_n.
\end{array}$$

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Lösbarkeit

Da

$$\det \boldsymbol{R} = r_{1,1} r_{2,2} \dots r_{n,n},$$

ist $\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ genau dann stets eindeutig lösbar, wenn alle Diagonaleinträge $r_{j,j}$, $j = 1, \dots, n$, von Null verschieden sind.

Vorgehen:

- Beginnend bei der letzten Gleichung

$$x_n = b_n / r_{n,n}.$$

- Einsetzen von x_n in die zweitletzte Gleichung

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - r_{n-1,n} x_n) / r_{n-1,n-1}.$$

- ...

Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Für $j = n, n-1, \ldots, 2, 1$ berechne

$$x_j = \left(b_j - \sum_{k=j+1}^{n} r_{j,k} x_k \right) \Big/ r_{j,j},$$

wobei die Summe für $j = n$ leer ist und als Null interpretiert wird.

Analog: untere Dreiecksmatrix L

- $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $l_{i,j} = 0$ für $i < j$
- Eindeutig lösbar, wenn $l_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden
- Vorwärtseinsetzen

D:MV

Rechenaufwand

Für jedes $j = n-1, \ldots, 1$:

$n - j$ Multiplikationen / Additionen,
eine Division,
und für $j = n$ eine Division. Also insgesamt

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1}(n-j) = \frac{n(n-1)}{2}$ Additionen / Multiplikationen,
- n Divisionen.

Rechenaufwand für Rückwärtseinsetzen

ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen

Operation = Multiplikation oder Division.

Eigenschaften 3.18

- Das Produkt von oberen (unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Inverse einer oberen (unteren) nichtsingulären Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gerade das Produkt aller Diagonaleinträge.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonaleinträge.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix, $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix,
  $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix

Matrix-Zerlegung

Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Vorgehensweise: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem "leichter" lösbar ist.

Verfahren:

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix, $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonale Matrix

Gauß-Elimination

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0})$$

auf Dreieckgestalt zu bringen, ist die *Gauß-Elimination*.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)}$$

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}}$$

Gauß-Elimination

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$$

auf Dreieckgestalt zu bringen, ist die *Gauß-Elimination*.

$$\underset{\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{(1)}}{\left[\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right]} \rightarrow \underset{\boldsymbol{A}^{(2)}}{\left[\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline \boldsymbol{0} & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \boldsymbol{0} & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right]}$$

Gauß-Elimination

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq 0)$$

auf Dreieckgestalt zu bringen, ist die *Gauß-Elimination*.

$$\underset{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)}}{\left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|} \rightarrow \underset{\boldsymbol{A}^{(2)}}{\left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|} \rightarrow \underset{\boldsymbol{A}^{(3)}}{\left|\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right|}$$

Gauß-Elimination

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq 0)$$

auf Dreieckgestalt zu bringen, ist die *Gauß-Elimination*.

$$\underset{\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)}}{\left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|} \;\to\; \underset{\boldsymbol{A}^{(2)}}{\left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right|} \;\to\; \underset{\boldsymbol{A}^{(3)}}{\left|\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{\boldsymbol{A}}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right|}$$

- Einträge der Matrix $\boldsymbol{A}^{(k)}$ werden mit $a_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- Eintrag $a_{k,k}^{(k)}$ ($\circledast$ oben) heißt *Pivotelement*.
- In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ umzuformen.

Beispiel 3.19.

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax = b}$, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimiation.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow \ (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array} \right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ $\times$ Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1$$

$$\rightarrow \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=1 \\ \longrightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{matrix} j = 1 \\ \longrightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 1 \\ \longrightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1 \quad \xrightarrow[\ell_{2,1} = \frac{4}{2}]{} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1 \quad \underset{\ell_{2,1} = \frac{4}{2}}{\rightarrow} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ $\times$ Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{l}
j = 1 \\
\quad \rightarrow \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\
-2 & -5 & 4 & 1 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,1}} \times$ Zeile $\mathbf{1}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{j = 1}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{2,1} = \frac{4}{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{3,1} = \frac{6}{2}} \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{l}
j = 1 \\
\qquad \rightarrow \\
\quad \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\quad \ell_{3,1} = \frac{6}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 1 & -1 & 6 & -16 \\
-2 & -5 & 4 & 1 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{ll}
j = 1 & \\
\quad \rightarrow & \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right) \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} & \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} &
\end{array}
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,1}} \times$ Zeile $\mathbf{1}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\begin{array}{l} \boldsymbol{j = 1} \\ \qquad \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{2,1} = \frac{4}{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{3,1} = \frac{6}{2}} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{cc}
j = 1 & \\
\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
-2 & -5 & 4 & 1 & -12
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,1}} \times$ Zeile $\mathbf{1}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{j = 1}$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{2,1} = \frac{4}{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{3,1} = \frac{6}{2}} \\ \boldsymbol{\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{-3} & \mathbf{-19} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,1} \times \text{Zeile } 1)$ von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 1 \\
\rightarrow \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 1 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 1 \\
\rightarrow \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -12
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1$$

$$\begin{array}{c} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 2 \\ \rightarrow \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1}=\frac{4}{2} \\ \ell_{3,1}=\frac{6}{2} \\ \ell_{4,1}=\frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2}=\frac{4}{2} \\ \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 1 \\
\to \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 2 \\
\to \\
\ell_{3,2} = \frac{4}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 1 \\
\rightarrow \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 2 \\
\rightarrow \\
\ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\
\\
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & 7 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile 1) von Zeile i

$$j = 1 \quad \begin{array}{c} \to \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile 2) von Zeile i

$$j = 2 \quad \begin{array}{c} \to \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} = \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1}=\frac{4}{2} \\ \ell_{3,1}=\frac{6}{2} \\ \ell_{4,1}=\frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2}=\frac{4}{2} \\ \ell_{4,2}=\frac{-6}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} = \frac{-6}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ × Zeile 1) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 1 \\ \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ × Zeile 2) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} = \frac{-6}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -11 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1}$ $\times$ Zeile 1) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 1 \\
\rightarrow \\
\ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\
\ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\
\ell_{4,1} = \frac{-2}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\
0 & -6 & 1 & 4 & -11
\end{array}\right)
$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2}$ $\times$ Zeile 2) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 2 \\
\rightarrow \\
\ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\
\ell_{4,2} = \frac{-6}{2}
\end{array}
\quad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 10 & -11 & -41
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$
\begin{array}{c}
j = 3 \\
\to \\
\ell_{4,3} = \frac{10}{2}
\end{array}
\qquad
\left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\
0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\
0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\
0 & 0 & 10 & -11 & -41
\end{array}\right)
$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} \\ j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} \\ j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -41 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \to \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = (\quad , \quad , \quad , \quad)^T .$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j=3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R\,|\,c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = (\quad,\quad,\quad,\ 1)^T.$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\boldsymbol{\ell_{i,3}} \times$ Zeile $\mathbf{3}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{j = 3} \\ \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{4,3} = \frac{10}{2}} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-46} & \mathbf{-46} \end{array}\right) = (\boldsymbol{R} \,|\, \boldsymbol{c})$$

Wegen

$$\boldsymbol{Ax = b \Leftrightarrow Rx = c}$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\boldsymbol{x} = (\quad , \quad , \mathbf{-3}, \quad 1)^{\boldsymbol{T}}.$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3}$ × Zeile $\mathbf{3}$) von Zeile $\boldsymbol{i}$

$$\begin{array}{c} \boldsymbol{j = 3} \\ \rightarrow \\ \boldsymbol{\ell_{4,3} = \frac{10}{2}} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{-5} & \mathbf{-10} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-46} & \mathbf{-46} \end{array}\right) = (\boldsymbol{R} \,|\, \boldsymbol{c})$$

Wegen

$$\boldsymbol{Ax = b \Leftrightarrow Rx = c}$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$\boldsymbol{x} = (\quad ,\ \mathbf{2}, \mathbf{-3},\ \mathbf{1})^{\boldsymbol{T}}.$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,3} \times$ Zeile 3) von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\tfrac{9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T .$$

Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,3} \times \text{Zeile } 3)$ von Zeile i

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\tfrac{9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T.$$

Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- Bestimme $(A \,|\, b) \rightarrow (R \,|\, c)$
- Löse $R\,x = c$

Beispiel 3.22.

Für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$A = L\,R,$$

wobei

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

N3.4 B3.1

Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine *Faktorisierung* von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

Satz 3.21.

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

N3.5 D:ML

Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine *Faktorisierung* von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

Satz 3.21.

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

N3.5 D:ML

Frage:

- Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- Was passiert, wenn das Pivotelement “sehr klein” ist? B3.2

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet nicht, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.
- Als Pivotelement wählt man das *betragsgrößte* Element der jeweiligen Spalte.
- Da man das j-te Pivotelement in der j-ten Spalte sucht, nennt man diesen Vertauschungsvorgang *Spaltenpivotisierung*. Die Matrix sollte zuvor äquilibriert werden.

Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0.00031} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} \\ \mathbf{-7} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array}\right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \qquad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach Spaltenpivotisierung mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0.9997 & -2.998 \end{array}\right)$$

und damit

$$x_1 \approx -4.001, \quad x_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

Spaltenpivotisierung

Ziel: Vertauschen der Zeilen in Matrix $\boldsymbol{A}$ wärend LR-Zerlegung.

Fragen

1. Möglich durch Matrix-Matrix-Multiplikation (vgl. Elimination)?
2. Auswirkung auf die LR-Zerlegung?

Spaltenpivotisierung

Ziel: Vertauschen der Zeilen in Matrix A wärend LR-Zerlegung.

Fragen

1. Möglich durch Matrix-Matrix-Multiplikation (vgl. Elimination)?
2. Auswirkung auf die LR-Zerlegung?

1. **Permutationsmatrix:** Die Permutationsmatrix

$$P_\pi : (e^{\pi(1)}\ e^{\pi(2)} \dots e^{\pi(n)})^T.$$

entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der Zeilen gemäß der Permutation $\pi \in S_n$, wobei

- e^i den i-ten Basisvektor bezeichnet, und
- S_n die Permutationen auf der Menge $\{1, \dots, n\}$ bezeichnet.

Beispiel: $\pi : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ mit $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$ (oder $\pi = (3,1,2)$) ist eine Permutation in S_3.

Permutationsmatrix

Wir bezeichnen mit $P_{i,k}$ die Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Permutationsmatrix

Wir bezeichnen mit $P_{i,k}$ die Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel: für $n = 4$, $i = 2$, $k = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutationsmatrix

Wir bezeichnen mit $P_{i,k}$ die Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der i-ten und k-ten Zeile der Einheitsmatrix I entsteht.

Beispiel: für $n = 4$, $i = 2$, $k = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ -1 & \text{für } i \neq k, \end{cases}$$

und

$$P_{i,k}^{-1} = P_{i,k}^T.$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\, A \;=$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{P_{2,3}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{P_{2,3}\,A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ Vertauschen der 2. und 3. Zeile

$$A\,P_{2,3} =$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3}\,A\,P_{2,3}^{-1} =$$

Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3}\,A\,P_{2,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der Einträge } a \text{ und } b$$

LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination *mit* Spaltenpivotisierung ist für *jede* nicht-singuläre Matrix durchfürbar und es gilt folgende Verallgemeinung von Satz 3.21.

Satz 3.25.

Zu jeder nichtsingulären Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}$, eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$, deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch eins beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

N3.6

Durchführung der LR-Zerlegung

Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Bestimme die Diagonalmatrix
$$D = \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_n),$$
so dass $D\,A$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.
$$d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\right)^{-1}, \quad i = 1, \dots, n.$$
- Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $D\,A$ an. Im j-ten Schritt der Gauß-Elimination wählt man diejenige Zeile als Pivotzeile, die das betragsmäßig größte Element in der ersten Spalte der $(n+1-j) \times (n+1-j)$ rechten unteren Restmatrix hat. Falls diese Pivotzeile und die j-te Zeile verschieden sind, werden sie vertauscht.

Aufwand

- Zeilensummenberechnung: $n(n-1)$ Additionen;
- Berechnung der Skalierung: n Divisionen;
- Für $j = 1, 2, \ldots, n-1$
  - Berechnung der neuen Einträge in L: $(n-j)$ Divisionen;
  - Berechnung der neuen Einträge in R: $(n-j)^2$ Multiplik./Additionen

Dominierender Aufwand: $\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3.$

Rechenaufwand 3.29

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{1}{3} n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D =$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA =$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{DA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$\boldsymbol{DA} \xrightarrow{\textit{Vertauschung}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{Vertauschung}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\textit{Elimination}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{Vertauschung} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{Elimination} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ & & \\ & & \end{matrix}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\text{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & & \\ & & \end{array}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ & & \end{array}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & & \end{array}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}} \xrightarrow{\text{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\text{Vertauschung}} \boxed{\begin{matrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{matrix}} \xrightarrow{\text{Elimination}} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\text{Vertauschung}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{Vertauschung} \boxed{\begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \end{array}} \xrightarrow{Elimination} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{array}}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{Vertauschung} \boxed{\begin{array}{c|cc} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline & & \\ & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \\ \hline \end{array}$$

Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \cline{2-3} -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$, und $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Man rechnet einfach nach, dass

$$LR = PDA$$

gilt, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist das Produkt von $P_{2,3}$ und $P_{1,3}$.

N3.7

Ergebnis: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$, und $R = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Man rechnet einfach nach, dass

$$LR = PDA$$

gilt, wobei

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix P ist das Produkt von $P_{2,3}$ und $P_{1,3}$. N3.7

Merke

- Skalierung/Äquilibrierung verbessert die *Kondition* des Problems.
- Pivotisierung verbessert die *Stabilität* der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{n}}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ bekannt.

Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ bekannt.

1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$$

1. Bestimme $\boldsymbol{y}$ durch Vorwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$.
2. Berechne $\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ durch Rückwärtseinsetzen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x^k}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A\,x^k = b^k, \quad k = 1, \ldots, K,}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b^k,\ k = 1, \ldots, K,}$ verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x}^k$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^k = \boldsymbol{b}^k, \quad \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{K},$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b}^k,\ \boldsymbol{k} = \boldsymbol{1}, \ldots, \boldsymbol{K}$, verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, d.h.

$$\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y}^k &= \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}^k \\ \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}^k &= \boldsymbol{y}^k \end{aligned}$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x^k}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A\,x^k = b^k, \quad k = 1, \ldots, K,}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b^k,\ k = 1, \ldots, K,}$ verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

Vorgehen

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, d.h.

$$\boldsymbol{P\,A = L\,R}$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L\,y^k} &= \boldsymbol{P\,b^k} \\ \boldsymbol{R\,x^k} &= \boldsymbol{y^k} \end{aligned}$$

Aufwand: $\boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + K n^2}$ (vs. $\boldsymbol{K\frac{1}{3}n^3}$ ohne LR-Zerlegung)

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die i-te Spalte der Inversen von A:

$$A^{-1} = (x^1 \; x^2 \; \dots \; x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$A\,x^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die i-te Spalte der Inversen von A:

$$A^{-1} = (x^1\ x^2\ \ldots\ x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$A\,x^i = e^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- Bestimme die LR-Zerlegung $P\,A = L\,R$ über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- Löse die Gleichungssysteme

$$L\,R\,x^i = P\,e^i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.

Anwendungen der LR-Zerlegung

4. Berechnung von Determinanten

Aus $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ folgt

$$\det \boldsymbol{P} \;\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{L} \;\det \boldsymbol{R} = \det \boldsymbol{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{P} &= \det \boldsymbol{P}_{n,r_n} \dots \det \boldsymbol{P}_{n-1,r_{n-1}} \\ &= (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^{n} r_{j,j}.$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

5. Nachiteration

- Rechnerarithmetik: statt $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{R}$ erhält man Näherungen $\tilde{\boldsymbol{L}}$, $\tilde{\boldsymbol{R}}$.
- Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist daher nicht exakte Lösung von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- **Ziel der Nachiteration**: Näherung *iterativ* verbesern

Anwendungen der LR-Zerlegung

5. Nachiteration

- Rechnerarithmetik: statt $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{R}$ erhält man Näherungen $\tilde{\boldsymbol{L}}$, $\tilde{\boldsymbol{R}}$.
- Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist daher nicht exakte Lösung von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- **Ziel der Nachiteration**: Näherung *iterativ* verbesern
- Zur Erinnerung: Sei $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} := \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{0}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$. Der Fehler $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{0}} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ ist gerade die Lösung des *Defektsystems*
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{0}}.$$

Anwendungen der LR-Zerlegung

5. Nachiteration

- Rechnerarithmetik: statt $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{R}$ erhält man Näherungen $\tilde{\boldsymbol{L}}$, $\tilde{\boldsymbol{R}}$.
- Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist daher nicht exakte Lösung von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- **Ziel der Nachiteration**: Näherung *iterativ* verbesern
- Zur Erinnerung: Sei $\boldsymbol{x}^0 := \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^0 := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0$. Der Fehler $\boldsymbol{\delta}^0 := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0$ ist gerade die Lösung des *Defektsystems*
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}^0 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{r}^0.$$
- Verfahren:

Für $\boldsymbol{k} = 0, 1, 2, \ldots,$ gegeben $\boldsymbol{r}^0$, berechne:

$$\tilde{\boldsymbol{L}}\,\boldsymbol{y}^k = \boldsymbol{r}^k,\ \tilde{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\delta}^k = \boldsymbol{y}^k;$$
$$\boldsymbol{x}^{k+1} := \boldsymbol{x}^k + \boldsymbol{\delta}^k;$$
$$\boldsymbol{r}^{k+1} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^{k+1};$$

Zusammenfassung

- Die Kondition des Problems $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ wird im wesentlichen durch die Konditinszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschrieben.
- Dreiecksmatrizen ergeben leicht lösbare Systeme: Aufwand ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen.
- Zeilenskalierung vs. Pivotisierung
  - Skalierung/Äquilibrierung verbessert die *Kondition* des Problems.
  - Pivotisierung verbessert die *Stabilität* der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.
- LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung $\boxed{\text{N3.8}}$