Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

10. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 19.1.2016, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

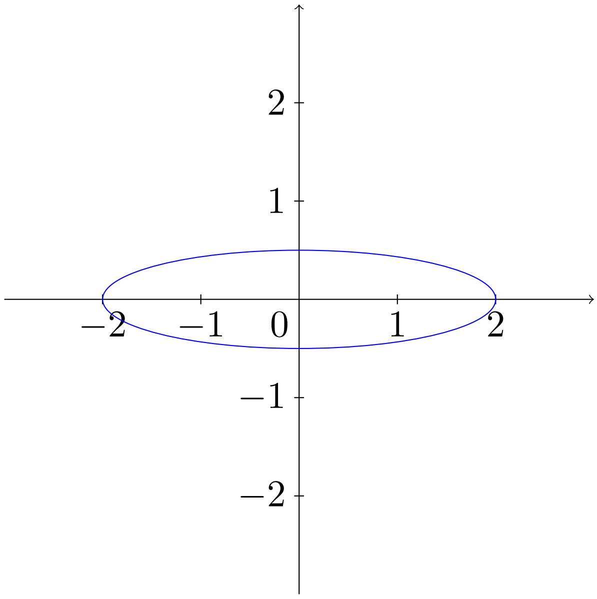
Aufgabe 1: (Verständnisfragen zur Wiederholung) [6×1 Punkt]

Geben Sie jeweils mit einer kurzen Begründung an, welche der Aussagen wahr und welche falsch sind.

a) Die Zahl 72.25 ist in $\mathcal{M}(2, 9, -8, 8)$ exakt darstellbar.

b) Für $f, g \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ gilt $\kappa_{\text{rel}}(f + g, x) = \kappa_{\text{rel}}(f, x) + \kappa_{\text{rel}}(g, x)$.

c) Die invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ transformiere die Einheitsspähre in der Euklidischen Norm auf folgende Menge:



Dann gilt $\|A\|_2 = 2$ und $\kappa_2(A) = 2$.

d) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische Matrix mit vollem Rang und sei $A = LDL^T$ die Cholesky-Zerlegung der Matrix und $A = \tilde{L}\tilde{R}$ die LR-Zerlegung der Matrix. Dann gilt $L = \tilde{L}$ und $R = DL^T$.

e) Sei $a = (0, 2, 0)^T \in \mathbb{R}^3$. Sowohl für den Vektor $v = (1, 1, 0)^T$ als auch für den Vektor $\tilde{v} = (-1, 1, 0)^T$ liefert die zugehörige Householdermatrix angewendet auf a einen Vektor der in der x-Achse liegt, d.h.

$$Q_v a = (c, 0, 0)^T \text{ und } Q_{\tilde{v}} a = (d, 0, 0)^T \text{ mit } c, d \in \mathbb{R}.$$

f) Die Funktion $f(x) = x^2$ hat auf $\mathbb{R}$, obwohl ihre Ableitung unbeschränkt ist, einen eindeutigen Fixpunkt.

Aufgabe 2: (Numerische Differentiation) [4+6+3 Punkte]

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom 3. Grades. Bestimmen Sie Konstanten k_1, k_2 und k_3, sodass

$$f''(x) = \frac{k_1 f(x-h) + k_2 f(x) + k_3 f(x+h)}{h^2}.$$

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom 4. Grades. Bestimmen Sie Konstanten c_1, c_2, c_3 und c_4, sodass

$$f'(x) = \frac{c_1 f(x-2h) + c_2 f(x-h) + c_3 f(x+h) + c_4 f(x+2h)}{h}.$$

c) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grad n.

(i) Sei $n \geq 2$. An wievielen Punkten muss man den Wert von f kennen um die Werte von $f''(x)$ für alle x bestimmen zu können?

(ii) Sei $4 \geq n \geq 2$. Man will jetzt $f''(x)$ für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ bestimmen. An wievielen Stellen muss man f mindestens auswerten um $f''(x)$ zu bestimmen? Man darf die Stellen hierbei frei wählen um möglichst wenige Auswertungen zu benötigen. (Hier ist kein Beweis nötig.)

Aufgabe 3: (Numerische Integration) [6 Punkte]

Gesucht wird der Wert des Integrals $I := \int_0^1 f(x)dx$, wobei die Werte der Funktion $f(x)$ nur an bestimmten Stellen bekannt sind:

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(x)$	1	$\frac{49}{64}$	$\frac{5}{8}$	1

Interpolieren Sie die Funktion f mit einem Polynom 3. Grades und bestimmen Sie eine Näherung für I, indem Sie das Interpolationspolynom exakt integrieren.