RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE

INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

12. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 2.2.2016, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Rechteckregel) [4+4+2 Punkte]

Seien $f(x)$ eine hinreichend glatte Funktion auf $[a,b]$ und unterteile $[a,b]$ in Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$, wobei

$$x_k = a + kh, k = 0, 1, \dots, n, \quad \text{und} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

a) Versuchen Sie anhand von einer Skizze (oder mehreren Skizzen) und einigen wenigen Sätzen zu veranschaulichen, warum folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\left| hf(x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2}h^2 \max_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} |f'(\xi_k)|.$$

b) Zeigen Sie nun formal, dass

$$\left| hf(x_{k-1}) - \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \right| \leq \frac{1}{2}h^2 \max_{\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]} |f'(\xi_k)|.$$

gilt.

c) Zeigen Sie, dass für die Rechteckregel

$$R(h) = h \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$$

die Abschätzung

$$\left| R(h) - \int_a^b f(x)dx \right| \leq \frac{h}{2}(b-a) \max_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

gilt.
Hinweis: Benutzen Sie die in Teil a) und b) gegebene Abschätzung.

Aufgabe 2: (Iterative Löser) [2+6+6+2+2 Punkte]

Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$$

soll mit Hilfe eines iterativen Verfahrens gelöst werden.

a) Konvergieren das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren für das obige System?

b) Führen Sie zwei Schritte des Gauß-Seidel-Verfahrens (Einzelschrittverfahren) zum Startwert $x_0 = (3, 2, 1)^T$ durch.

c) Führen Sie zwei Schritte des Jacobi-Verfahrens (Gesamtschrittverfahren) zum Startwert $x_0 = (3, 2, 1)^T$ durch.

d) Zeigen Sie, dass die Iterierte des Jacobi-Verfahrens für die angegebene Matrix A die Abschätzung

$$\left\| x^\star - x^{(m)} \right\|_\infty \leq \left(\frac{3}{4} \right)^m \left\| x^\star - x^{(0)} \right\|_\infty$$

erfüllt, wobei $x^\star$ die Lösung zu $Ax^\star = b$ ist.
Hinweis: Berechnen Sie die Iterationsmatrix explizit.

e) Wie viele Schritte sind laut Abschätzung nötig, damit der absolute Fehler kleiner als $\frac{1}{5}$ ausfällt?

Hinweis: Die exakte Lösung von $Ax = b$ lautet $x = \left(\frac{128}{113}, \frac{346}{113}, -\frac{239}{226} \right)^T$.