Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

9. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 12.01.2016, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Polynominterpolation, einfache Erweiterbarkeit der Newton-Basis) [2+2+1 Punkte]
Gegeben ist die Wertetabelle

i	0	1	2
x_i	2	3	4
f_i	7	7	5

a) Berechnen Sie mit dem Newton-Interpolationsschema das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom 2. Grades durch die obigen Wertepaare

b) Bestimmen Sie das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom 5. Grades durch die obigen Wertepaare unter Hinzunahme der folgenden Tabellenwerte:

i	3	4	5
x_i	5	6	7
f_i	1	-5	107

c) Welchen Grad hat das Interpolationspolynom aus b.), wenn man das Wertepaar (x_5, f_5) nicht hinzunimmt?

Aufgabe 2: (Interpolationsfehler, Abschätzung und Anwendung) [2+3+4 Punkte]
Gegeben ist die auf $[0, \pi/4]$ beliebig oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \int_0^x \frac{6\,\cos(2t)}{1+\cos(2t)}\,\mathrm{d}t$$

mit der Wertetabelle

x_i	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$
$f(x_i)$	0	$\pi - \sqrt{3}$	$\frac{3}{2}\pi - 3$

a) Berechnen Sie mit dem Interpolationsverfahren nach Newton das Interpolationspolynom p zweiten Grades, das alle Stützstellen der Wertetabelle berücksichtigt.

b) Ermitteln Sie mit Hilfe des zweiten Fundamentalsatzes der Differential- und Integralrechnung und den Werten $p(\pi/8)$ und $p(\pi/6)$ eine einfache Näherung des Integrals

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{6\,\cos(2t)}{1+\cos(2t)}\,\mathrm{d}t.$$

c) Schätzen Sie den Interpolationsfehler $|p(\pi/8) - f(\pi/8)|$ nach oben ab (eine Extremwertuntersuchung der Ableitung ist nicht gefordert). Wie groß ist der Fehler Ihrer Näherung des Integrals in Aufgabenteil b)?

Hinweis:
$$f^{(3)}(x) = -24 \cdot \frac{2 - \cos(2x)^2 + \cos(2x)}{(1 + \cos(2x))^3}, \quad \pi^3 \leq 32.$$

Aufgabe 3: (Basiswechsel bei Polynomen) [2+2 Punkte]

a) Gegeben ist das Polynom
$$p(x) = 1(7 + (x-3)(2 + (x-4)(-6 + x)))$$
in Newton-Basis mit Horner-Schema. Bestimmen Sie die Darstellung des Polynoms in der Lagrange-Basis zu den Stützstellen $x_0 = 3$, $x_1 = 4$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 5$.

b) Gegeben sei das Polynom
$$q(x) = -5 \cdot \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(-1-0)(-1-1)(-1-4)} + 2 \cdot \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(0+1)(0-1)(0-4)} \dots$$
$$+ 1 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-4)}{(1+1)(1-0)(1-4)} - 1 \cdot \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(4+1)(4-0)(4-1)}$$
in Lagrange-Basis. Geben Sie die Darstellung des Polynoms in Monom-Basis im Horner-Schema an.

Aufgabe 4: (Polynominterpolation und Oszillation) [10 Punkte]

$p_{t_1,t_2} \in \mathcal{P}^3$ sei das eindeutig bestimmte Polynom dritten Grades, dass die Interpolationsaufgabe
$$p(-1) = 0,\ p(t_1) = -1,\ p(t_2) = 1,\ p(1) = 0,\ \text{mit } -1 < t_1 < t_2 < 1$$
löst. Bestimmen Sie
$$\sup_{-1<t_1<t_2<1} \max_{x,y\in[-1,1]} |p_{t_1,t_2}(x) - p_{t_1,t_2}(y)| \quad \text{und} \quad \inf_{-1<t_1<t_2<1} \max_{x,y\in[-1,1]} |p_{t_1,t_2}(x) - p_{t_1,t_2}(y)|.$$

Anmerkung: Die Aufgabe soll verdeutlichen, zu welch starken Oszillationen es kommen kann, wenn man mit Polynomen arbeitet. Dieses Wissen ist hilfreich, wenn es darum geht einzuschätzen wo die Grenzen der Polynominterpolation liegen.

Hinweis: Es ist sinnvoll sich vorab eine Skizze zu machen und zu überlegen, wie man Symmetrie ins Spiel bringen kann, um die Rechnung möglichst einfach zu halten.