Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

6. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 08.12.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Theorie zu Positiver Definitheit) [6+2 Punkte]
Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wird positiv definit genannt, wenn $x^T Ax > 0$, für alle $x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$.

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit ausschließlich positiven Eigenwerten.
   (i) Zeigen Sie, dass A nicht unbedingt positiv definit ist.
   (ii) Zeigen Sie, dass A positiv definit ist, sofern A symmetrisch ist.

b) Sei A positiv definit und sei $A = LDL^T$ wobei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine normalisierte Dreiecksmatrix ist und $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ diagonal ist. Zeigen Sie, dass D nur strikt positive Diagonaleinträge hat.

Aufgabe 2: (Eigenschaften der Householder-Transformation) [4+2+2 Punkte]
Zu einem Vektor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$ sei eine Matrix $Q_v \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben durch

$$Q_v := I - 2\frac{vv^T}{v^Tv}.$$

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften
   (i) $Q_v = Q_v^{-1}$
   (ii) $Q_{\alpha v} = Q_v \quad$ für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
   (iii) $Q_v y = y \iff v \perp y$
   (iv) $Q_v v = -v$

b) Seien $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Finden Sie einen Vektor v, so dass $Q_v x$ ein Vielfaches von y ist.

c) Finden Sie die Menge von Eigenvektoren der Matrix Q_v. Geben Sie für jeden Eigenvektor den zugehörigen Eigenwert an.

Bem.: Q_v wird auch Householder-Transformation genannt.

Aufgabe 3: (Linearer Ausgleich bei Rangdefizit) [1+6+1 Punkte]
Gegeben sei das Ausgleichsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^3} \|Ax - b\|_2 = \min_{x\in\mathbb{R}^3} \left\| \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 16 & 52 & 80 \\ 44 & 80 & -32 \\ -9 & -36 & -72 \\ -16 & -16 & 64 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2$$

und die Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$ mit

$$U = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 32 & 5 & 24 & -20 \\ 4 & 40 & 3 & 20 \\ -27 & 0 & 36 & 0 \\ 16 & -20 & 12 & 35 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V^T = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 4 & 7 & -4 \\ -8 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Welchen Rang hat die Matrix A und woran kann man das sehen?

b) Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des Ausgleichsproblems.

c) Welche unter den Lösungen hat minimale 2-Norm? Begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 4: (Banachscher Fixpunktsatz, 1D) [7 Punkte]

Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^2 e^{-x} + 0.5 = x \quad (*)$$

genau eine Lösung im Intervall $[0, 1]$ hat.