Numerisches Rechnen

Interpolation

M. Grepl

J. Berger & R. O'Connor

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2015/16

Vorlesungsinhalt

4. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
   geg.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$
5. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$
6. **Interpolation**
   geg.: Stützstellen und zugehörige Daten
   $$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots,\ (x_n, f(x_n));$$
   ges.: Polynom $P_n \in \Pi_n$, so dass
   $$P_n(x_j) = f(x_j),\ j = 0, \ldots, n$$

Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 8.1-8.3

- Lagrange-Interpolationsaufgabe
- Darstellung und Auswertung des Interpolationspolynoms
- Fehleranalyse

Was Sie mitnehmen sollten:

- Effiziente Auswertung eines Interpolationspolynoms
- Möglichkeiten zur Darstellung eines Interpolationspolynoms
- Wie groß ist der Fehler bei der Interpolation

Lagrange-Interpolationsaufgabe für Polynome

Lagrange-Polynominterpolation N8.1

Finde für gegebene Stützstellen $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ und zugehörige Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ ein Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Bemerkungen

- Der Raum der Polynome vom Grad n ist gegeben durch

$$\Pi_n = \left\{ \sum_{j=0}^{n} a_j\, x^j \,|\, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \right\}$$

- "Lagrange": Interpolation der Funktionswerte
- Weitere Möglichkeiten:
  - Hermite-Interpolation: zusätzl. Interpolation der Ableitungen
  - Trigonometrische Interpolation, Splineinterpolation, ...

Fragen

N8.2(1-6)

- Wie interpolieren wir?
  - Grad des Interpolationspolynoms: linear, quadratisch, ...
- Existenz und Eindeutigkeit des Interpolationspolynoms
- Auswertung des Interpolationspolynoms
  - An einer oder wenigen Stellen?
  - Darstellung in geschlossener Form?
- Welchen Fehler machen wir?
- Wie können wir den Fehler reduzieren?

Wichtig für: Numerische Differentiation, Integration, Computergraphik und viele weitere Anwendungen...

Existenz und Eindeutigkeit

Satz 8.3.

Das Lagrange-Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h., zu beliebigen Daten $f(x_0), f(x_1), \ldots, f(x_n)$ existiert ein eindeutiges Polynom $P_n \in \Pi_n$ mit

$$P_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \ldots, n.$$

Insbesondere läßt sich $P_n(x)$ explizit in der Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) \ell_{jn}(x)$$

darstellen, wobei

$$\ell_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

die sogenannten Lagrange-Fundamentalpolynome sind.

Existenz und Eindeutigkeit

Definition

Das eindeutige Lagrange-Interpolationspolynom $P_n \in \Pi_n$ der Funktion f an den Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ wird mit

$$P_n =: P(f|x_0, \dots, x_n)$$

bezeichnet.

Aus der *Eindeutigkeit* des Interpolationspolynoms ergibt sich folgende Eigenschaft:

- Für jedes Polynom $Q \in \Pi_n$ und beliebige Stützstellen $x_0 < \dots < x_n$ gilt

$$P(Q|x_0, \dots, x_n) = Q.$$

Begründung: Q interpoliert sich selbst und muss wegen der Eindeutigkeit damit gleich dem Interpolationspolynom sein.

Fragen

Auswertung des Interpolationspolynoms

1. **An einer oder wenigen Stellen?**
   - Neville-Aitken
2. Darstellung in geschlossener Form?
   - Potenzform
   - Lagrange Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig: Die Lösung in 2., d.h. das Interpolationspolynom, ist immer das gleiche!

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Zur Erinnerung: Eine interpolierende Gerade ist als *Konvexkombination* der beiden Punkte darstellbar, d.h. N8.2(2)

$$
\begin{aligned}
P(f|x_0,x_1)(x) &= \frac{x-x_1}{x_0-x_1}f(x_0)+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)\\
&= \frac{x-x_0}{x_1-x_0}f(x_1)+\frac{x_1-x}{x_1-x_0}f(x_0)
\end{aligned}
$$

Erweiterung: Eine interpolierende quadratische Funktion ist als *Konvexkombination* der beiden interpolierende Geraden darstellbar, d.h. N8.3

$$
P(f|x_0,x_1,x_2)(x) = \frac{x-x_0}{x_2-x_0}P(f|x_1,x_2)(x)+\frac{x_2-x}{x_2-x_0}P(f|x_0,x_1)(x)
$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6 (Aitken).

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}\,P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}\,P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

Die Interpolierende an den Stellen $x_0,\dots,x_n$ ist eine Konvexkombination der Interpolierenden niedrigeren Grades an den Teilmengen $\{x_1,\dots,x_n\}$ und $\{x_0,\dots,x_{n-1}\}$ der Gesamtstützstellenmenge.

- Wir setzen für *festes* x

  $$P_{i,k} = P(f|x_{i-k},\dots,x_i)(x), \quad 0 \le k \le i \le n,$$

  d.h. speziell

  $$\begin{aligned} P_{n,n} &= P(f|x_0,\dots,x_n)(x), \\ P_{i,0} &= P(f|x_i)(x) = f(x_i). \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Lemma 8.6 (Aitken).

$$P(f|x_0,\dots,x_n)(x) = \frac{x-x_0}{x_n-x_0}\,P(f|x_1,\dots,x_n)(x) + \frac{x_n-x}{x_n-x_0}\,P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x).$$

Lemma 8.6 ergibt dann das folgende rekursive Schema:

$$\begin{aligned} P_{i,k} &= \frac{x-x_{i-k}}{x_i-x_{i-k}}P_{i,k-1} + \frac{x_i-x}{x_i-x_{i-k}}P_{i-1,k-1} \\ &= P_{i,k-1} + \frac{x-x_i}{x_i-x_{i-k}}(P_{i,k-1}-P_{i-1,k-1}) \end{aligned}$$

Punktweise Auswertung von $P_n(x)$

Neville-Aitken-Schema

Geg.: x und $(x_i, f(x_i))$, $i = 0, \ldots, n$

Ges.: $P_{n,n}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & P_{i,0} & P_{i,1} & P_{i,2} & \cdots & & \\
\hline
x_0 & f(x_0) & & & & & \\
x_1 & f(x_1) & P_{1,1} & & & & \\
x_2 & f(x_2) & P_{2,1} & P_{2,2} & & & \\
x_3 & f(x_3) & P_{3,1} & P_{3,2} & \ddots & & \\
\vdots & \vdots & & & & \ddots & \\
x_n & f(x_n) & P_{n,1} & P_{n,2} & \cdots & \cdots & P_{n,n}
\end{array}
$$

Rekursion: $P_{i,k} = P_{i,k-1} + \dfrac{x - x_i}{x_i - x_{i-k}}(P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1})$

Beispiel 8.7.

Gegeben seien die Daten $f(0) = 1$, $f(1) = 4$, und $f(2) = 2$. Werten Sie das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2)$ an $x = 0.5$ aus.

Wir erhalten für das Neville-Aitken-Schema

	$P_{i,0}$	$P_{i,1}$	$P_{i,2}$
$x_0 = 0$	$P_{0,0} = f(x_0) = 1$		
$x_1 = 1$	$P_{1,0} = f(x_1) = 4$	2.5	
$x_2 = 2$	$P_{2,0} = f(x_2) = 2$	5.0	$3\frac{1}{8}$

1. Einsetzen der gegebenen Werte
2. Auswerten der Rekursion

N8.4(1-3)

Fragen

Auswertung des Interpolationspolynoms

1. An einer oder wenigen Stellen?
   - Neville-Aitken
2. **Darstellung in geschlossener Form?**
   - Potenzform
   - Lagrange Interpolationsformel
   - Newtonsche Interpolationsformel

Wichtig: Die Lösung in 2., d.h. das Interpolationspolynom, ist immer das gleiche!

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Zur Erinnerung: Mit der *monomialen Basis* $1, x, \ldots, x^n$ lässt sich das Interpolationspolynom schreiben als

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Die Bedingungen

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \ldots, n,$$

zur Bestimmung der unbekannten Koeffizienten a_i führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix } V_n} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix}.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Potenzform

Nachteile dieses Verfahrens:

- Die Konditionszahl der Vandermonde-Matrix, $\kappa(V_n) = \|V_n\|\|V_n^{-1}\|$, ist oft sehr groß $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert.
- Bestimmung der Koeffizienten erfordert Lösung eines $(n+1) \times (n+1)$ linearen Gleichungssystems.

Beispiel 8.10

Sei $h = 1/n$ und $x_i = 1 + ih, i = 0, 1, \dots, n$. Für diese Stützstellenverteilung hat die Vandermonde-Matrix eine Konditionszahl bzgl. der 2-Norm wie folgt:

n	4	6	8	10
$k_2(V_n)$	$4.1\mathrm{e}+4$	$2.0\mathrm{e}+7$	$1.1\mathrm{e}+10$	$6.5\mathrm{e}+12$

Effiziente Methode zur Auswertung der Potenzform

Sei $p \in \Pi_n$ ein Polynom, das in der Potenzform vorliegt, d.h.,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$$

mit bekannten Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$. Es gilt

$$p(x) = a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \ldots + x(a_{n-1} + x a_n) \ldots)).$$

Algorithmus 8.12 (Horner-Schema).

Setze $b_n = a_n$,

für $k = n-1, n-2, \ldots, 0$ berechne

$$b_k = a_k + x b_{k+1}$$

Dann ist

$$p(x) = b_0.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

- **Annahme:** Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})$ wurde bereits bestimmt
- **Aufgabe:** Bestimme Interpolationspolynom $P(f|x_0, \dots, x_n)$, d.h. eine weitere Stützstelle soll einbezogen werden.

Idee/Ansatz

Bestimme einen Korrekturterm, durch dessen Ergänzung man $P(f|x_0, \dots, x_n)(x)$ aus $P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x)$ erhält, d.h.

$$P(f|x_0, \dots, x_n)(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) + \delta_n \underbrace{(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})}_{\in \Pi_n}$$

Beachte:
- δ_n ist ein skalarer (fester) Wert.
- δ_n ist der Koeffizient der höchsten Potenz x^n.

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.13.

Für die Lagrange-Interpolationspolynomspolynome

$$P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \dots, x_{n-1})(x) \in \Pi_{n-1}$$

und

$$P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n)(x) \in \Pi_n$$

gilt

$$P_n(x) = P_{n-1}(x) + \delta_n (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

mit

$$\delta_n = \frac{f(x_n) - P_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0) \dots (x_n - x_{n-1})} \in \mathbb{R}.$$

Da der Koeffizient δ_n von f und von den Stützstellen x_i abhängt, schreibt man auch

$$\delta_n =: [x_0, \dots, x_n] f.$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkung 8.14.

$\delta_n = [x_0, \ldots, x_n]f$ ist offensichtlich der *führende Koeffizienz* des Interpolationspolynoms $P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$, d.h. der Koeffizient der Potenz x^n.

Wendet man dieselbe Argumentation auf das Interpolationspolynom $P_{n-1}(x) = P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x)$ an, so ergibt sich induktiv die

Newtonsche Interpolationsformel

$$\begin{aligned} P(f|x_0, \ldots, x_n)(x) = \; & [x_0]f + (x - x_0)[x_0, x_1]f \\ & + (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2]f + \ldots \\ & + (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})[x_0, \ldots, x_n]f. \end{aligned}$$

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Bemerkungen:

- Die Knotenpolynome
$$\begin{aligned} \omega_0(x) &:= 1 \\ \omega_1(x) &:= (x - x_0) \\ &\vdots \\ \omega_n(x) &:= (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$
bilden die Newton-Basis von Π_n.

- Für die Koeffizienten erhält man zum Beispiel
$$\delta_0 = [x_0]f = f(x_0)$$
$$\delta_1 = [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - P_0(x_1)}{(x_1 - x_0)} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{(x_1 - x_0)}$$
bzw. verallgemeinert dann ...

Darstellung von $P_n(x)$: Newtonsche Interpolationsformel

Lemma 8.16.

Seien die Stützstellen x_i paarweise verschieden. Dann gilt

$$[x_0, \ldots, x_n]f = \frac{[x_1, \ldots, x_n]f - [x_0, \ldots, x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$$

Da $[x_i]f = f(x_i)$ erhält man das rekursive Schema

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
 & [x_i]f & & [x_i, x_{i+1}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]f & & [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]f \\
\hline
x_0 & [x_0]f & & & & & & \\
 & & > & [x_0, x_1]f & & & & \\
x_1 & [x_1]f & & & > & [x_0, x_1, x_2]f & & \\
 & & > & [x_1, x_2]f & & & > & [x_0, x_1, x_2, x_3]f \\
x_2 & [x_2]f & & & > & [x_1, x_2, x_3]f & & \vdots \\
 & & > & [x_2, x_3]f & & \vdots & & \\
x_3 & [x_3]f & & \vdots & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$. Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

x_i	$f(x_i)$			
$x_0 = 0$	1.000			
		> -0.0995		
$x_1 = 0.2$	0.9801		> -0.4888	
		> -0.2950		> 0.0480
$x_2 = 0.4$	0.9211		> -0.4600	
		> -0.4790		
$x_3 = 0.6$	0.8253			

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0)(x) &= 1.000 \\
P(\cos x|0, 0.2)(x) &= 1.000 - 0.0995x \\
P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) &= 1.000 - 0.0995x - 0.4888x(x - 0.2)
\end{aligned}
$$

Beispiel 8.18.

Gegeben seien die Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$ und die Funktion $f(x_i) = \cos(x_i)$ für $i = 0, \ldots, 3$. Man bestimme das Interpolationspolynom $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)$.

$$
\begin{array}{c|ccccccc}
x_i & f(x_i) & & & & & & \\
\hline
x_0 = 0 & 1.000 & & & & & & \\
 & & > & -0.0995 & & & & \\
x_1 = 0.2 & 0.9801 & & & > & -0.4888 & & \\
 & & > & -0.2950 & & & > & 0.0480 \\
x_2 = 0.4 & 0.9211 & & & > & -0.4600 & & \\
 & & > & -0.4790 & & & & \\
x_3 = 0.6 & 0.8253 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
P(\cos x|0, 0.2, 0.4, 0.6)(x) \\
&= P(\cos x|0, 0.2, 0.4)(x) + 0.0480x(x-0.2)(x-0.4) \\
&= 1.000 - 0.0995x - 0.4888x(x-0.2) \\
&\qquad + 0.0480x(x-0.2)(x-0.4).
\end{aligned}
$$

Satz 8.21

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $[x_0, \ldots, x_n]f$ ist eine symmetrische Funktion der Stützstellen, d.h. hängt *nicht* von der Reihenfolge der Stützstellen ab (konkret gilt zum Beispiel $[x_0, x_1, x_2]f = [x_1, x_0, x_2]f$).

(ii) Für $Q \in \Pi_{k-1}$ gilt $[x_0, \ldots, x_k]Q = 0$

(iii) Für die *Newton-Basispolynome* ω_k gilt

$$[x_0, \ldots, x_k]\omega_j = \delta_{jk}, \quad \text{für} j, k = 0, \ldots, n.$$

(iv) Sei $a := \min_{0 \le i \le n} x_i$, $b := \max_{0 \le i \le n} x_i$, $I := [a, b]$ und $f \in C^n(I)$. Dann existiert ein $\xi \in I$, so dass

$$[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Fehleranalyse — Restglieddarstellung

N8.5/6

Satz 8.22.

Seien $x_0, \ldots, x_n$ paarweise verschiedene Stützstellen, $x \in R$, $a := \min\{x_0, \ldots, x_n\}$, $b := \max\{x_0, \ldots, x_n\}$ und $I := [\min\{a, x\}, \max\{b, x\}]$.

Für $f \in C^{n+1}(I)$ existiert $\xi \in I$, so dass

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots x_n)(x) = (x - x_0) \ldots (x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

gilt. Insbesondere gilt

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)|$$
$$\leq \max_{x\in[a,b]} \left| \prod_{j=0}^{n} (x - x_j) \right| \max_{x\in[a,b]} \frac{|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1+x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = 1$ linear interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$. N8.7

- Mit den Ableitungen

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$$

erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0,1)(x) = -(x-0)(x-1)\frac{1}{2(1+\xi)^2}.$$

- Da $\max_{x\in[0,1]} |(x-0)(x-1)| = \frac{1}{4}$ und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0,1)(x)| \leq \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

Beispiel 8.24

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$ und $x_2 = 1$ quadratisch interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler im Intervall $[0, 1]$.

- Mit der Ableitung $f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$ erhält man für $\xi \in [0, 1]$

$$f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{2}, 1)(x) = (x - 0)(x - \tfrac{1}{2})(x - 1)\frac{2}{3!(1 + \xi)^3}$$

- Da

$$\max_{x\in[0,1]} \left|x(x - \tfrac{1}{2})(x - 1)\right| = \frac{\sqrt{3}}{36},$$

und $\xi > 0$ gilt für den Interpolationsfehler

$$\left|f(x) - P(f|0, \tfrac{1}{2}, 1)(x)\right| \leq \frac{1}{36\sqrt{3}}.$$

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Definiere

$$M_{n+1}(f) := \max_{x\in[a,b]} \frac{\left|f^{(n+1)}(x)\right|}{(n+1)!} \text{ und } \omega_{n+1}(x) := \prod_{j=0}^{n}(x-x_j)$$

Dann erhält man für die Fehlerschranke

$$|f(x) - P(f|x_0,\ldots x_n)(x)| \leq \left|\omega_{n+1}(x)\right| M_{n+1}(f)$$

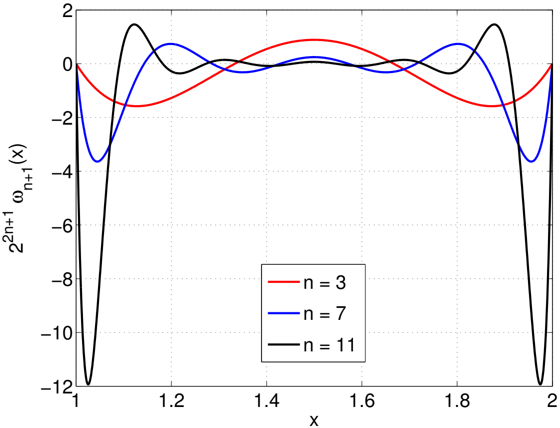
für $x \in [a,b]$ und $x_j \in [a,b], j = 0,1,2,\ldots,n.$

Beachte

- $M_{n+1}(f)$ hängt nur von f ab, aber *nicht* von Stützstellen
- $\omega_{n+1}(x)$ hängt nur von den Stützstellen ab, aber *nicht* von f.

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei *äquidistanten* Stützstellen.
- Beispiel: $x_j = 1 + \frac{j}{n}$, $j = 0, \ldots, n$ für $n = 3, 7, 11.$



Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

Bemerkung 8.25:

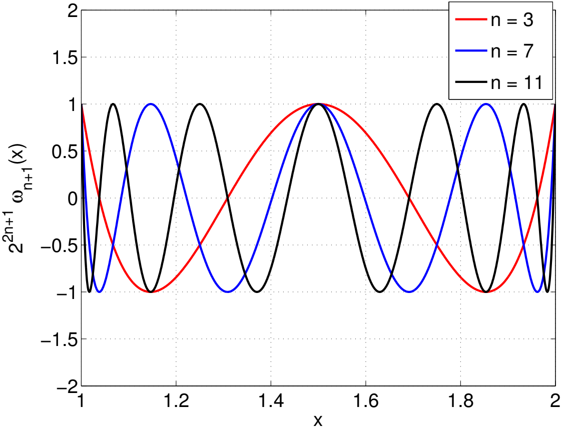
- Das Verhalten der Funktion ω_{n+1} kann für eine andere Wahl der Stützstellen wesentlich besser sein.
- Es ist bekannt, dass die Nullstelle der sogenannten *Tschebyscheff-Polynome* wesentlich günstiger Stützstellen liefern.
- Für diese Nullstelle gibt es explizite Formeln, z.B. für das Intervall $[1, 2]$ hat man die Formeln

$$x_j = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2j+1}{2n+2}\pi\right), \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

N8.8

Erhöhung Polynomgrad bzw. Stützstellenanzahl

- Verhalten der Funktion ω_{n+1} bei Tschebyscheff-Stützstellen.

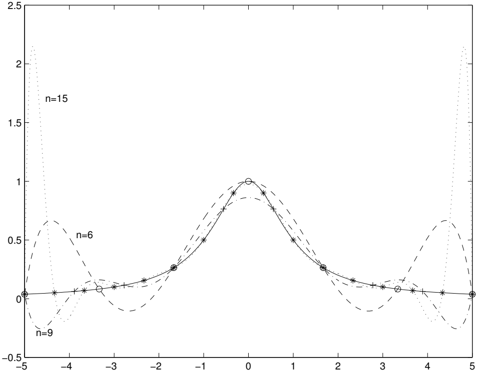


Grenzen der Polynominterpolation

Beispiel: Runges Phänomen

- Die Funktion
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar.
- Die Folge der Interpolationspolynomspolynome
$$P_n(x) = P(f|x_0, \ldots, x_n)(x)$$
mit
$$x_j = -5 + \frac{10j}{n}, \quad j = 0, \ldots, n,$$
divergiert auf $[-5, 5]$.

Grenzen der Polynominterpolation



D:MV

Fazit: Als Mittel, über immer mehr Stützstellen immer bessere Appproximationen zu gewinnen, taugt die Polynominterpolation im allgemeinen nicht.

Fester Polynomgrad

- Sei $a := \min\{x_0, \ldots, x_n\}$ und $b := \max\{x_0, \ldots, x_n\}$ mit n fest.
- Die Länge des Intervalls $h := b - a$ sei veränderbar.
- Falls $x \in I := [a, b]$ liegt, erhält man sofort die grobe Abschätzung
$$|\omega_{n+1}(x)| \leq h^{n+1},$$
und somit
$$\|f - P(f|x_0, \ldots, x_n)\|_{L_\infty(I)} \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{n+1}\|_{L_\infty(I)}.$$
- Der Fehler wird kleiner, wenn die Stützstellen gemäß h zusammenrücken.

Dieser Effekt wird in den *meisten Anwendungen* benutzt.

Beispiel 8.26

Die Funktion $f(x) = \log(1 + x)$ wird an $x_0 = 0$ und $x_1 = h$ linear interpoliert. Bestimmen Sie den zugehörigen Interpolationsfehler in $[0, h]$ in Abhängigkeit von h.

- Wir erhalten (siehe Beispiel 8.24)

$$f(x) - P(f|0, h)(x) = -(x - 0)(x - h)\frac{1}{2(1 + \xi)^2}.$$

- Da $\max_{x\in[0,h]} |(x - 0)(x - h)| = \frac{h^2}{4}$ und $\xi > 0$ folgt für den Interpolationsfehler

$$|f(x) - P(f|0, h)(x)| \leq \frac{h^2}{8}, \quad \text{für } x \in [0, h].$$

- Der Verfahrensfehler strebt also mit der *Ordnung* 2 gegen 0.

Numerische Differentiation

Zur Erinnerung: In der Newton-Interpolationsformel ist

$$\delta_n := [x_0, \ldots, x_n]f$$

der Koeffizient der Potenz x^n. Daraus folgt

$$P(f|x_0, \ldots, x_n)^{(n)}(x) = n![x_0, \ldots, x_n]f \approx f^{(n)}(x).$$

1. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$f'(x) \approx [x_0, x_1]f = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} \quad (x \in [x_0, x_1]),$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - \frac{1}{2}h$ und $x_1 = x + \frac{1}{2}h$

$$f'(x) = \frac{f(x + \frac{1}{2}h) - f(x - \frac{1}{2}h)}{h} - \frac{h^2}{24} f'''(\xi).$$

(zentrale Differenzen)

Numerische Differentiation

2. Ableitung: Speziell erhält man bei äquidistanten Stützstellen $x_j = x_0 + jh$,

$$\begin{aligned} f''(x) &\approx 2![x_0, x_1, x_2]f \\ &= \frac{f(x_2) - 2f(x_1) + f(x_0)}{h^2} \quad (x \in [x_0, x_2]), \end{aligned}$$

und aus der Taylor-Entwicklung ergibt sich für $x_0 = x - h$, $x_1 = x$ und $x_2 = x + h$ schließlich

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi).$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Differenzenquotient
$$\Delta_h := \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$
- Fehler in den Daten
$$\tilde{\Delta}_h := \frac{\tilde{f}(x+h) - 2\tilde{f}(x) + \tilde{f}(x-h)}{h^2}.$$
- Fehler in Δ_h aufgrund Datenfehler ($|f(y) - \tilde{f}(y)| \leq \epsilon$)

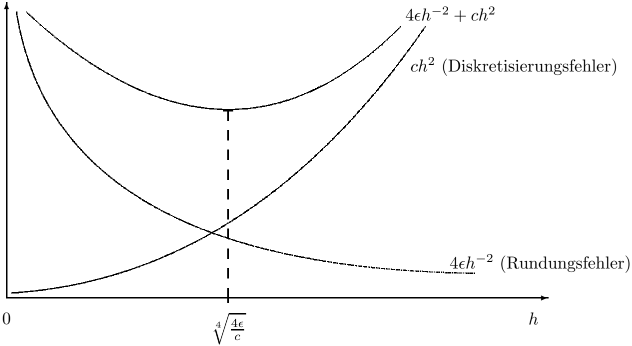
$$\begin{aligned}\left|\Delta_h - \tilde{\Delta}_h\right| = \frac{1}{h^2}\Big|&\Big(f(x+h) - \tilde{f}(x+h)\Big) - 2\Big(f(x) - \tilde{f}(x)\Big) \\ &+ \Big(f(x-h) - \tilde{f}(x-h)\Big)\Big| \leq \frac{4\epsilon}{h^2}.\end{aligned}$$

Gesamtfehler

$$\left|\tilde{\Delta}_h - f''(x)\right| \leq \left|\tilde{\Delta}_h - \Delta_h\right| + |\Delta_h - f''(x)| \leq 4\epsilon h^{-2} + ch^2$$

Auslöschung bei numerischer Differentiation

- Die Schranke wird für $h = \sqrt[4]{4\epsilon/c}$ minimal.
- Bsp.: $\epsilon = 10^{-9} \Rightarrow h \approx 10^{-2}$, kleineres h vergrößert Fehler



Merke: Man sollte stets dafür sorgen, dass Rundungsfehler einen kleineren Einfluß haben als Diskretisierungsfehler.

Beispiel 8.27.

Aufgabe

Annäherung der zweiten Abteilung von $f(x) = \sin x + 3x^2$ an der Stelle $x = 0.6$ mit dem Differenzquotienten

$$\Delta_h = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

- Wir rechnen auf einer Maschine mit $\mathbf{eps} \approx 10^{-16}$
- Man erwartet, dass für $h \approx 10^{-4}$ der Gesamtfehler minimal ist
- Die Tabelle bestätigt dies:

h	$\tilde{\Delta}_h$	$\lvert\tilde{\Delta}_h - f''(x)\rvert$
10^{-2}	5.4353622319	4.71e-06
10^{-3}	5.4353575738	4.72e-08
10^{-4}	5.4353575196	6.98e-09
10^{-5}	5.4353566092	9.17e-07
10^{-6}	5.4352078394	1.50e-04
10^{-7}	5.4400928207	4.74e-03