N6.1

Gauß-Newton Verfahren

Finde $s^k \in \mathbb{R}^n$, so daß

$$\| F'(x^k)\, s^k + F(x^k) \|_2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \| F'(x^k)\, s + F(x^k) \|_2$$

Lineares Ausgleichsproblem:

Finde $x \in \mathbb{R}^n$, so daß

$$\| A x^* - b \|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \| A x - b \|_2$$

Vergleich:

$$F'(x^k) \;\hat{=}\; A$$

$$s^k \;\hat{=}\; x$$

$$F(x^k) \;\hat{=}\; -b$$

Lösung lineares Ausgleichsproblem:

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\Rightarrow \quad s^k = -\left(F'(x^k)^T F'(x^k) \right)^{-1} F'(x^k)^T F(x^k)$$

↳ Schrittweite

Iteration: $x^{k+1} = x^k + s^k$, $k = 0, 1, 2, \dots$

N6.2

Nichtlineare Gleichungssysteme

geg.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$

Approximation:

$$f(x) = f(x^k) + f'(x^k)\,\underbrace{(\overset{x^{k+1}}{\overset{\downarrow}{x}} - x^k)}_{s^k} + O(\|x - x^k\|_2^2)$$

Lösungsverfahren:

1. Wähle Startwert x^0

Für $k = 0, 1, 2, \dots$

2. Setze Approximation 1. Ordnung "=" 0

$$f(x^k) + f'(x^k)\, s^k = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(x^k)\, s^k = -f(x^k)$$

3. Update

$$x^{k+1} - x^k = s^k$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{k+1} = x^k + s^k$$

Nichtlineare Ausgleichsrechnung

geg.: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| F(x) \|_2$

Approximation:

$$F(x) = F(x^k) + F'(x^k)\,\underbrace{(\overset{x^{k+1}}{\overset{\downarrow}{x}} - x^k)}_{s^k} + O(\|x - x^k\|_2^2)$$

Lösungsverfahren:

1. Wähle Startwert x^0

Für $k = 0, 1, 2, \dots$

2. "Minimiere" Approximation 1. Ordnung

$$s^k = \arg\min_{s \in \mathbb{R}^n} \| F(x^k) + F'(x^k)\, s \|_2$$

$$\Leftrightarrow \quad (F'(x^k)^T F'(x^k))\, s^k = -F'(x^k)^T F(x^k)$$

3. Update

$$x^{k+1} - x^k = s^k$$

$$\Leftrightarrow \quad x^{k+1} = x^k + s^k$$

ACHTUNG: Schritt 2 und 3 identisch mit

$$x^{k+1} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| F(x^k) + F'(x^k)(x - x^k) \|_2$$

Gauß-Newton Iteration (Annahme: $\operatorname{Rang}(F'(x)) = n$)

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k + s^k \\
&= x^k - \left(F'(x^k)^T F'(x^k)\right)^{-1} F'(x^k)^T F(x^k) \\
&= \Phi(x^k)
\end{aligned}
$$

Fixpunktiteration mit

$$\Phi(x) = x - \left(F'(x)^T F'(x)\right)^{-1} F'(x)^T F(x)$$

Es gilt: $x = \Phi(x) \iff \nabla\phi(x) = F'(x)^T F(x) = 0$

$\iff x = x^*$

Vergleich: Newton-Verfahren

Bestimme Nullstelle von $f(x) = \nabla\phi(x)$, $\phi(x) = \frac{1}{2} F(x)^T F(x)$

Lösung von $\nabla\phi(x) = 0$ mit Newton:

$$
\begin{aligned}
x^{k+1} &= x^k - \left[\phi''(x^k)\right]^{-1} \nabla\phi(x^k) \\
&= x^k - \left[F'(x^k)^T F'(x^k) + \sum_{i=1}^{m} F_i(x^k) F_i''(x^k)\right]^{-1} F'(x^k)^T F(x^k)
\end{aligned}
$$

Problem: Auswertung $F''(x^k)$ aufwendig $\Rightarrow$ vernachlässigen

Fehler klein wenn: - $F(x)$ annähernd linear

- Komponenten von $F(x)$ klein nahe Lösung

Lineare vs. Nichtlineare Ausgleichsrechnung

Meßwerte :

t_i	2	3	4	5
b_i	2	2	3	5

1.) Funktion

$$y(t) = \frac{\alpha}{t-1} + \beta t$$

=> lineare Ausgleichsrechnung

2.) Funktion

$$y(t) = \frac{1}{t-\alpha} + \beta t$$

=> nichtlineare Ausgleichsrechnung

zu 1.) $y(t) = \frac{\alpha}{t-1} + \beta t$

Residuum $r = Ax - b$

Lineares Ausgleichsproblem: $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

wir haben:

$$x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1 - 1} & t_1 \\ \frac{1}{t_2 - 1} & t_2 \\ \frac{1}{t_3 - 1} & t_3 \\ \frac{1}{t_4 - 1} & t_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 3 \\ \frac{1}{3} & 4 \\ \frac{1}{4} & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

=> analytische Lösung: $A^T A x^* = A^T b$

zu 2.) $y(t) = \frac{1}{t-\alpha} + \beta t$, $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ $\boxed{N6.4(2)}$

- Aufstellen von $F(x): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$

i-te Zeile: $F_i = y(t_i) - b_i = \underbrace{\frac{1}{t_i-\alpha} + \beta t_i - b_i \; (= r_i)}_{\text{Residuum}}$

$$F(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1-\alpha} + \beta t_1 - b_1 \\ \frac{1}{t_2-\alpha} + \beta t_2 - b_2 \\ \frac{1}{t_3-\alpha} + \beta t_3 - b_3 \\ \frac{1}{t_4-\alpha} + \beta t_4 - b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2-\alpha} + \beta 2 - 2 \\ \frac{1}{3-\alpha} + \beta 3 - 2 \\ \frac{1}{4-\alpha} + \beta 4 - 3 \\ \frac{1}{5-\alpha} + \beta 5 - 5 \end{bmatrix}$$

Nichtlineares Ausgleichsproblem: $\|F(x^*)\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$

Iterative Lösung: Gauß-Newton

- Jakobimatrix $F'(x) \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

i-te Zeile: $\frac{\partial F_i}{\partial \alpha} = \frac{1}{(t_i-\alpha)^2}$, $\frac{\partial F_i}{\partial \beta} = t_i$

$$F'(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(t_1-\alpha^k)^2} & t_1 \\ \frac{1}{(t_2-\alpha^k)^2} & t_2 \\ \frac{1}{(t_3-\alpha^k)^2} & t_3 \\ \frac{1}{(t_4-\alpha^k)^2} & t_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 2} \qquad F(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t_1-\alpha^k} + \beta^k t_1 - b_1 \\ \frac{1}{t_2-\alpha^k} + \beta^k t_2 - b_2 \\ \frac{1}{t_3-\alpha^k} + \beta^k t_3 - b_3 \\ \frac{1}{t_4-\alpha^k} + \beta^k t_4 - b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

N6.4(3)

Setze t_i und b_i ein

$$F'(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(2-\alpha^k)^2} & 2 \\ \frac{1}{(3-\alpha^k)^2} & 3 \\ \frac{1}{(4-\alpha^k)^2} & 4 \\ \frac{1}{(5-\alpha^k)^2} & 5 \end{bmatrix}, \quad F(x^k) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2-\alpha^k} + \beta^k 2 - 2 \\ \frac{1}{3-\alpha^k} + \beta^k 3 - 2 \\ \frac{1}{4-\alpha^k} + \beta^k 4 - 3 \\ \frac{1}{5-\alpha^k} + \beta^k 5 - 5 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ für gegebenes α^k, β^k lässt sich $F'(x^k)$ und $F(x^k)$ explizit angeben.

N6.4(4)

1.) gegeben: Startwerte α^0, β^0 $\Rightarrow$ $x^0 = \begin{bmatrix} \alpha^0 \\ \beta^0 \end{bmatrix}$

2.) Löse lineares Ausgleichsproblem

$$\|F'(x^k)\, s^k + F(x^k)\|_2 = \min_{s \in \mathbb{R}^n} \|F'(x^k)\, s + F(x^k)\|_2$$

nach $s^k = \begin{pmatrix} \Delta\alpha^k \\ \Delta\beta^k \end{pmatrix}$

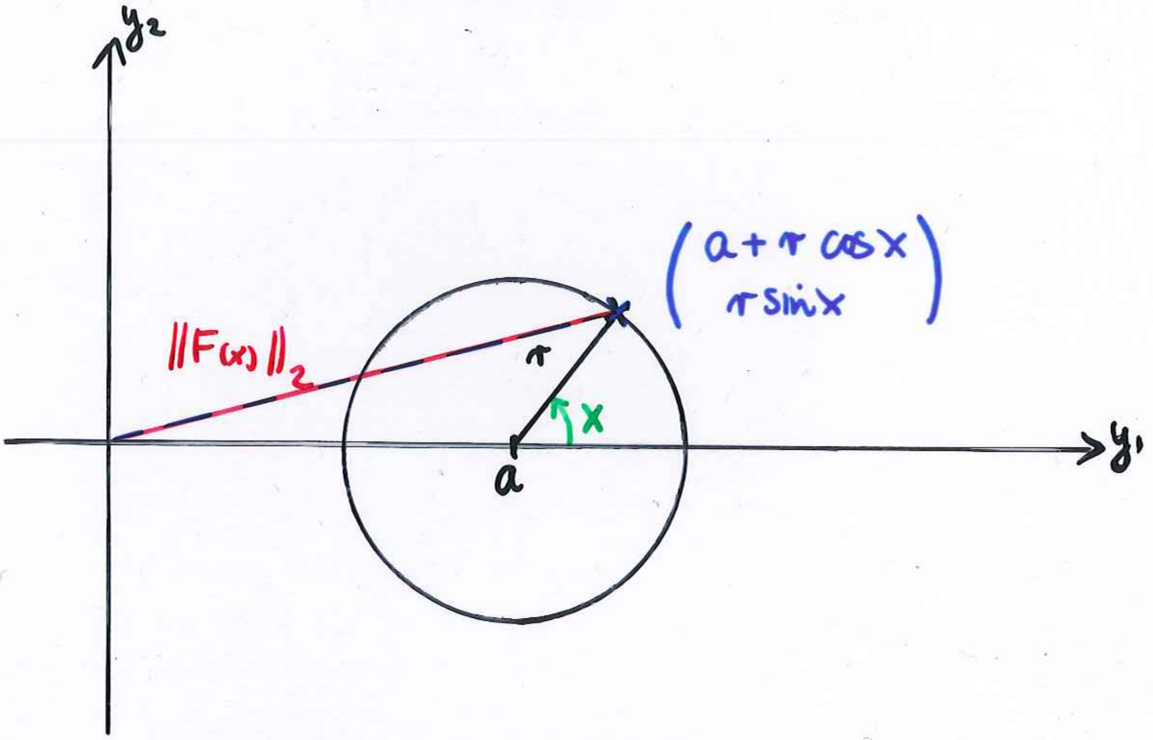
3) Update:

$$x^{k+1} = x^k + s^k \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha^{k+1} &= \alpha^k + \Delta\alpha^k \\ \beta^{k+1} &= \beta^k + \Delta\beta^k \end{aligned}$$

4) Gehe zu 2.)

$\Rightarrow$ Lösung nichtlineares Ausgleichsproblem durch wiederholte Lösung eines linearen Ausgleichsproblems für s^k.

Beispiel 6.4



$$F(x) = \begin{pmatrix} a + r\cos x \\ r\sin x \end{pmatrix}, \text{ mit } a > r > 0,\ x \in [0, 2\pi]$$

Ausgleichsproblem

$$\min_x \underline{\|F(x)\|_2} = \min_x \sqrt{a^2 + 2ar\cos x + r^2}$$