Numerisches Rechnen

Einführung und Motivation

M. Grepl

J. Berger & R. O'Connor

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2015/16

Termine I/III

- Vorlesung
  - Dienstag, 16:15 - 17:45 Uhr, Roter Hörsaal AM (Ro)
  - Donnerstag, 10:15 - 11:45 Uhr, 1515|001 (TEMP1)
  - Anmeldung erforderlich bis 04.12.2015
  - Wichtig: V3 gehalten als ($\sum$: 23 Termine)
    - V4 bis KW50 (07.-11.12.2015)
    - V2 ab KW51 (Vorlesung dienstags)
- Großübung
  - Dienstag, 18:15-19:45 Uhr, Roter Hörsaal AM (Ro)
  - Beginn: 27.10.2015 (Einführung in Matlab)
  - Abgabe 1. Hausaufgabe: 03.11.2015 (Ausgabe: 27.10.2015)

Termine II/III

- Beratungstermine
  - Montag, 10:15-11:45 Uhr, ???
  - Montag, 12:15-13:45 Uhr, 1401 419
  - Donnerstag, 14:15-15:45 Uhr, 1300|408 (TD)
  - ...
- Hausaufgaben
  - Insgesamt 12 Hausaufgaben
  - Zulassungsvoraussetzung: mind. 50 % der max. erreichbaren Punktzahl in Hausaufgaben 1-6 und 7-12
  - Abgabe jeweils dienstags bis 16:00 Uhr im Einwurfkasten vor Raum 102 im Hauptgebäude
  - Abgabe (bevorzugt) in Zweiergruppen oder Einzeln (nur Originale!)
- Weihnachtsübung (Programmieraufgabe)
  - Abgabe freiwillig, Bonuspunkts werden beliebig verteilt

Termine III/III

- Klausur
  - Ersttermin: Donnerstag, 25.02.2016
    Beginn: 16:30 Uhr
  - Nachholtermin: Dienstag, 22.03.2016
    Beginn: 13:30 Uhr
  - Orte werden noch bekanntgegeben
- Webseite & **L2P**
  - `http://www.igpm.rwth-aachen.de/numrech`
  - Infos, Folien, ...
- siehe auch Einträge in CAMPUS

Ansprechpartner I/II

Vorlesung

- Martin Grepl
  - Kontakt: grepl@igpm.rwth-aachen.de
    Tel. 0241/80-96470
  - Sprechstunde: Montag, 14:00-15:00 Uhr
    oder nach Vereinbarung

Fragen, Anregungen, Kritik?

grepl@igpm.rwth-aachen.de

Ansprechpartner II/II

Übungsbetrieb

- E-mail: numrech@igpm.rwth-aachen.de
- Jens Berger
  - Kontakt: berger@igpm.rwth-aachen.de
    Tel. 0241/80-97068
- Robert O'Connor
  - Kontakt: oconnor@aices.rwth-aachen.de
    Tel. 0241/80-99145
- Sprechstunde: nach Vereinbarung

Buch zur Vorlesung

W. Dahmen, A. Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer Verlag, 2006.

⇒ **E-Book und Folien zum Buch siehe Webseite oder L2P**

Weitere Materialien zur Vorlesung

- Folien werden im L2P zur Verfügung gestellt (basierend auf Folien von Dahmen/Reusken)
- Zusätzliche Notizen auf Overhead werden ebenfalls im L2P zur Verfügung gestellt
- Kurze Beweise auf Overhead
- Zuordnung:

  B2.1 . . . Beweis

  N2.1 . . . Herleitung, Zusammenfassung, Beispiel, etc.

  D:xx . . . Demo (MV: Mathe Vital, SC: Scientific Computing, ML: Matlab)

Hinweis zu Klausur, Vorlesung, Hausaufgaben

Klausur

- Aufgabentyp: $\approx$ 40 % Verständnis
  $\approx$ 60 % Rechnen
- Verständnis ist wichtig für das Bestehen der Klausur!

Vorlesung

- Ziel: Verständnis vermitteln
- Regelmäßig Verständnisaufgaben zur Wiederholung

Hausaufgaben

- Teilweise kleinere Programmieraufgaben
- 0. Übungsblatt: Einführung in Matlab (keine Abgabe)
  Ausgabe: 20.10.2015, Besprechung: 27.10.2015

MATLAB

- Hochentwickelte Sprache für technische Berechnungen
- Interaktive Umgebung für
  - Algorithmenentwicklung
  - Visualisierung und Analyse von Daten
  - Numerische Berechnungen
- Name hergeleitet aus MATrix LABoratory

Gute und frei zugängliche Einführung in Matlab mit vielen Beispielen, Demos, . . . :

- C. Moler. *Numerical Computing with MATLAB.* http://www.mathworks.com/moler/index_ncm.html.

Online Ressourcen

- TU München, *Mathe Vital (Visual Interactive Tools for Advanced Learning)*:

  `www-m10.ma.tum.de/bin/view/MatheVital/WebHome`

- University of Illinois at Urbana-Champaign, *Interactive Educational Modules in Scientific Computing*:

  `web.engr.illinois.edu/~heath/iem/`

- C. Moler, *Numerical Computing with MATLAB — NCM Software*:

  `www.mathworks.de/moler/index_ncm.html`

Weiterführende Literatur

- P. Deuflhard, A. Hohmann. *Numerische Mathematik. Eine algorithmisch orientierte Einführung*. De Gruyter Lehrbuch, 1991.
- J. Stoer, R. Bulirsch. *Einführung in die Numerische Mathematik*. Springer, 1983.
- L.N. Trefethen, D.Bau. *Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997
- J.W. Demmel. *Applied Numerical Linear Algebra*. SIAM, 1997
- G.H. Golub, C.F. Van Loan. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.

Vorlesungsinhalt

1. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
2. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
3. Lineare Ausgleichsrechnung
4. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
5. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
6. Interpolation
7. Numerische Integration
8. Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren
9. Optimierung

Vorlesungsinhalt

1. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
   a) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, Eingabefehler $\boldsymbol{\Delta x} \rightarrow$ Ausgabefehler $\boldsymbol{\Delta y}$
   b) Fehler aufgrund Gleitpunktdarstellung
   c) Fehler (durch Algorithmus) $\approx$ Fehler (durch Kondition)
2. Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren
   geg.: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$;
   ges.: $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
3. Lineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}}$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}}$, $\boldsymbol{m} > \boldsymbol{n}$;
   ges.: $\boldsymbol{x}^* \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$, so dass $\boldsymbol{x}^* = \operatorname{arg\,min}_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}} \|\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{b}\|_2$

Vorlesungsinhalt

4. Nichtlineare Gleichungssysteme, iterative Lösungsverfahren
   geg.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(x^*) = 0$
5. Nichtlineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|F(x)\|_2$
6. Interpolation
   geg.: Stützstellen und zugehörige Daten
   $$(x_0, f(x_0)),\ (x_1, f(x_1)), \ldots,\ (x_n, f(x_n));$$
   ges.: Polynom $P_n \in \Pi_n$, so dass
   $$P_n(x_j) = f(x_j),\ j = 0, \ldots, n$$

Vorlesungsinhalt

7. Numerische Integration
   berechne $I = \int_a^b f(x)\,dx$
8. Lineare Gleichungssysteme, iterative Verfahren
   geg.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $n \gg 1$, A dünnbesetzt;
   ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax = b$
9. Optimierung
   geg.: Kostenfunktion $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$;
   ges.: Optimum x^*, so dass $x^* = \arg\min_{x\in X} J(x)$

Numerische Mathematik/Analysis

Definition (eine von vielen. . .)

"Numerical Analysis is the study of algorithms for the problems of continuous mathematics"

L.N.Trefethen

Warum benötigen wir Numerische Mathematik?

- Die meisten ($> \mathbf{99.9\%}$) praktischen Probleme in den Natur-/Ingenieurwissenschaften sind so komplex, dass sie nur numerisch gelöst werden können.
- Analytische Lösungen existieren nur sehr selten, sind aber für die Entwicklung/Analyse/Verständnis der Algorithmen wichtig.

Beispiel: Quadratische Gleichung

Nullstellenproblem:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

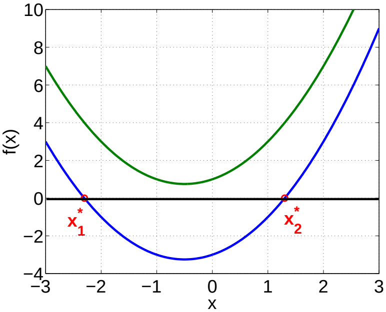
$\Rightarrow$ Schnittpunkte der Parabel mit x-Achse

Analytische Lösung:

- $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- $x \in \mathbb{R}$ wenn $b^2 - 4ac \geq 0$

Numerische Lösung:

- Nur für ein Set (a, b, c)
- Näherung – Fehlerabschätzung notwendig



$x^2 + x - 3 = 0$
$\Rightarrow$ Lösungen $x^*_{1,2}$

$x^2 + x + 1 = 0$
$\Rightarrow$ keine reelle Lösung

Nullstellenproblem:

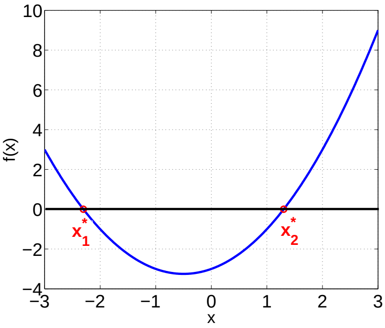
$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $x_1^* = 1.30277563\ldots$

oder $x_2^* = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

Nullstellenproblem:

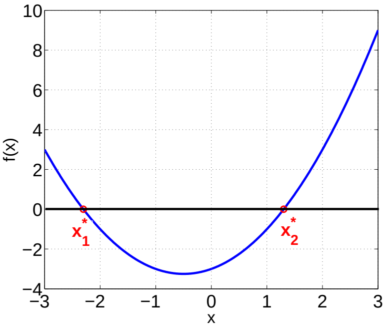
$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $\quad x_1^* = 1.30277563\ldots$

oder $\quad x_2^* = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

- Idee basiert auf Nullstellensatz von Bolzano

Nullstellenproblem:

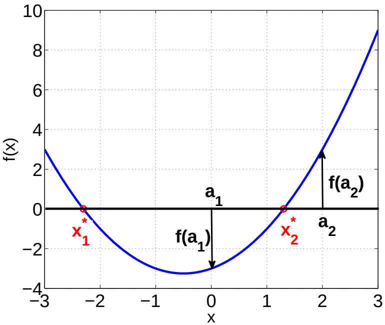
$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $\quad x_1^* = 1.30277563\ldots$

oder $\quad x_2^* = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

- Idee basiert auf Nullstellensatz von Bolzano
- Wähle zwei Punkte, a_1 und a_2, so dass $f(a_1)$ und $f(a_2)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.

Nullstellenproblem:

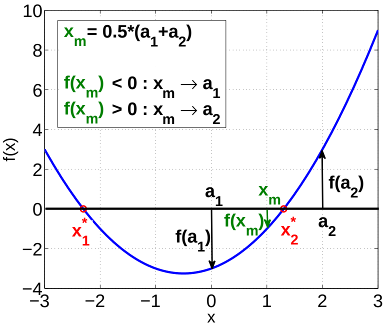
$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $\quad x_1^* = 1.30277563\ldots$

oder $\quad x_2^* = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

- Idee basiert auf Nullstellensatz von Bolzano
- Wähle zwei Punkte, a_1 und a_2, so dass $f(a_1)$ und $f(a_2)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.
- Werte f am Mittelwert $x_m = 0.5(a_1 + a_2)$ aus, wenn $f(x_m) < 0$ setze $a_1 = x_m$, ansonsten $a_2 = x_m$.

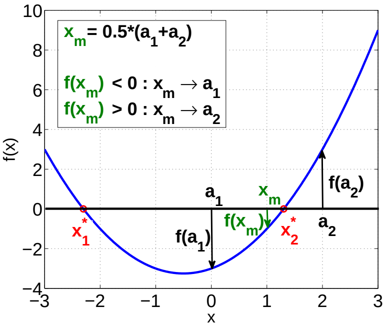
Nullstellenproblem:

$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $x_1^* = 1.30277563\ldots$
oder $x_2^* = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

- Idee basiert auf Nullstellensatz von Bolzano
- Wähle zwei Punkte, a_1 und a_2, so dass $f(a_1)$ und $f(a_2)$ unterschiedliche Vorzeichen haben.
- Werte f am Mittelwert $x_m = 0.5(a_1 + a_2)$ aus, wenn $f(x_m) < 0$ setze $a_1 = x_m$, ansonsten $a_2 = x_m$.
- Wiederhole bis gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

Nullstellenproblem:

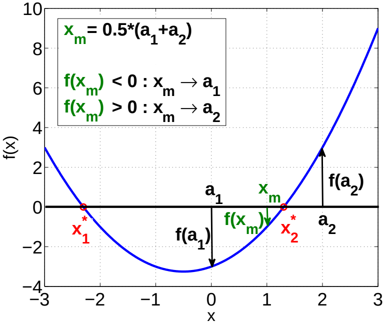
$$f(x) = x^2 + x - 3$$

Analytische Lösung:

$$x^*_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

d.h. $x^*_1 = 1.30277563\ldots$

oder $x^*_2 = -2.30277563\ldots$



Numerische Lösung (Bisektion):

n	a_1	a_2	x_m	Δx	update
1	0	2	1	1	$x_m \rightarrow a_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1.30078125	1.30468750	1.30273437	0.00195313	$x_m \rightarrow a_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
20	1.30277252	1.30277633	1.30277443	0.00000191	⋮

Nach 20 Iterationen: $x_m = 1.30277443 \pm 0.00000191$

Kubische Gleichung: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

Analytische Lösung[†]

Solution of Cubic Equations

3.8.2 Given $z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$, let

$$q=\frac{1}{3}a_1-\frac{1}{9}a_2^2;\ r=\frac{1}{6}(a_1a_2-3a_0)-\frac{1}{27}a_2^3.$$

If $q^3+r^2>0$, one real root and a pair of complex conjugate roots,

$q^3+r^2=0$, all roots real and at least two are equal,

$q^3+r^2<0$, all roots real (irreducible case).

Let

$$s_1=[r+(q^3+r^2)^{1/2}]^{1/3},\ s_2=[r-(q^3+r^2)^{1/2}]^{1/3}$$

then

$$z_1=(s_1+s_2)-\frac{a_2}{3}$$

$$z_2=-\frac{1}{2}(s_1+s_2)-\frac{a_2}{3}+\frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1-s_2)$$

$$z_3=-\frac{1}{2}(s_1+s_2)-\frac{a_2}{3}-\frac{i\sqrt{3}}{2}(s_1-s_2).$$

If z_1, z_2, z_3 are the roots of the cubic equation

$$z_1+z_2+z_3=-a_2$$

$$z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3=a_1$$

$$z_1z_2z_3=-a_0$$

Numerische Lösung

Bisektion funktioniert unverändert . . .

[†] Abramowitz & Stegun

Quartische Gleichung: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Analytische Lösung†

Solution of Quartic Equations

3.8.3 Given $z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0$, find the real root u_1 of the cubic equation

$$u^3-a_2u^2+(a_1a_3-4a_0)u-(a_1^2+a_0a_3^2-4a_0a_2)=0$$

and determine the four roots of the quartic as solutions of the two quadratic equations

$$v^2+\left[\frac{a_3}{2}\mp\left(\frac{a_3^2}{4}+u_1-a_2\right)^{\frac{1}{2}}\right]v+\frac{u_1}{2}\mp\left[\left(\frac{u_1}{2}\right)^2-a_0\right]^{\frac{1}{2}}=0$$

If all roots of the cubic equation are real, use the value of u_1 which gives real coefficients in the quadratic equation and select signs so that if

$$z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=(z^2+p_1z+q_1)(z^2+p_2z+q_2),$$

then

$$p_1+p_2=a_3, p_1p_2+q_1+q_2=a_2, p_1q_2+p_2q_1=a_1, q_1q_2=a_0.$$

If z_1, z_2, z_3, z_4 are the roots,

$$\Sigma z_i=-a_3, \Sigma z_iz_jz_k=-a_1,$$

$$\Sigma z_iz_j=a_2, z_1z_2z_3z_4=a_0.$$

Numerische Lösung

Bisektion funktioniert unverändert ...

† Abramowitz & Stegun

Gleichung 5. Grades: $ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$

Analytische Lösung

Existiert (im Allgemeinen) nicht mehr

(Abel-Ruffini Theorem)

Numerische Lösung

Bisektion funktioniert unverändert ...

...ab jetzt nur noch numerische Lösung möglich!

Probleme, für die (im Prinzip) eine analytische Lösung existiert bzw. die in einer endlichen Zahl von Operationen gelöst werden können

- Löse ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten
- Lineare Programmierung: minimiere eine lineare Funktion mit n Variablen unter m linearen Nebenbedingungen
- "Travelling Salesman Problem"

Probleme, für die (im Prinzip) eine analytische Lösung existiert bzw. die in einer endlichen Zahl von Operationen gelöst werden können

- Löse ein lineares Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten
- Lineare Programmierung: minimiere eine lineare Funktion mit n Variablen unter m linearen Nebenbedingungen
- "Travelling Salesman Problem"

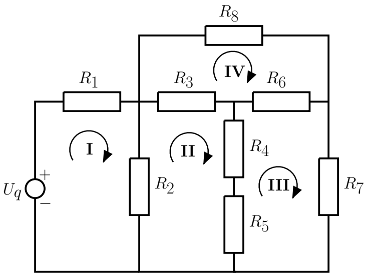
Probleme, für die i.A. keine analytische Lösung existiert

- Bestimme den Eigenwert einer $n \times n$ Matrix ($Av = \lambda v$)
- Minimiere eine multivariable Funktion
- Berechne ein Integral
- Löse eine gewöhnliche (partielle) Differentialgleichung

Numerische Mathematik für Informatiker

- IC Design
  - Netzwerkanalyse
  - Laufzeitverluste in ICs
  - Elektromagnetische Verträglichkeit
- Suchmaschinen
- Bildverarbeitung
  - Bildentrauschen
  - Optical Flow
  - Shape from Shading
- Computergraphik

Netzwerkanalyse



Kirchhoffsche Gesetze:

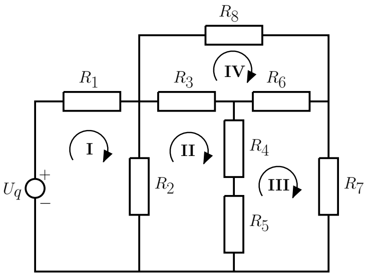
1. “Maschenregel”

$$\sum_k U_k = 0$$

2. “Knotenregel”

$$\sum_k I_k = 0$$

$$\begin{aligned}
R_1 I_1 + R_2(I_1 - I_2) &= U_q \\
R_2(I_2 - I_1) + R_3(I_2 - I_4) + (R_4 + R_5)(I_2 - I_3) &= 0 \\
(R_4 + R_5)(I_3 - I_2) + R_6(I_3 - I_4) + R_7 I_3 &= 0 \\
R_3(I_4 - I_2) + R_8 I_4 + R_6(I_4 - I_3) &= 0
\end{aligned}$$



Kirchhoffsche Gesetze:

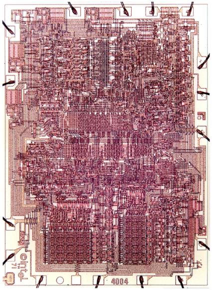
1. "Maschenregel"
$$\sum_k U_k = 0$$
2. "Knotenregel"
$$\sum_k I_k = 0$$

$$\begin{bmatrix} R_1+R_2 & -R_2 & 0 & 0 \\ -R_2 & R_2+R_3+R_4+R_5 & -R_4-R_5 & -R_3 \\ 0 & -R_4-R_5 & R_4+R_5+R_6+R_7 & -R_6 \\ 0 & -R_3 & -R_6 & R_3+R_6+R_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_q \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Lineares Gleichungssystem: $Ax = b$
- Hier Sonderfall: A symmetrisch, d.h. $A = A^T$
  (tritt häufig bei Modellierung physikalischer Systeme auf!)

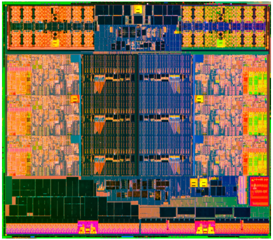
Integrated Circuits

Intel 4004 Micro Processor



Jahr: 1971
Anzahl Transistoren: 2,300

Intel Core i7 4960x

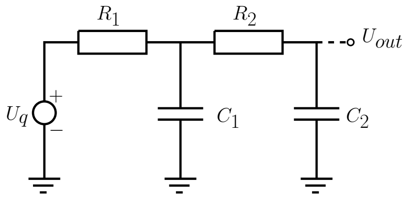


Jahr: 2013
Anzahl Transistoren: 1.86 Milliarden

- Kirchhoff $\Rightarrow$ gewöhnliche DGL
- Maxwell $\Rightarrow$ partielle DGL

lineare Gleichungssysteme

Laufzeitverluste in ICs – RC-Modell



Modellierung der Laufzeitverluste

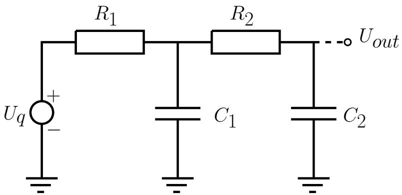
- Widerstand aufgrund
  - Leitungslänge ($R = \rho \frac{l}{A}$)
  - "ON" Transistoren
- Kondensator aufgrund
  - kapazitive Kopplung der Leitungen
  - Nebensignaleffekte

Übertragungsverhalten:

$$
\begin{aligned}
C_1 \frac{dU_{C_1}}{dt} &= -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_{C_1} + \frac{1}{R_2} U_{C_2} + \frac{1}{R_1} U_q \\
C_2 \frac{dU_{C_2}}{dt} &= \frac{1}{R_2} U_{C_1} - \frac{1}{R_2} U_{C_2}
\end{aligned}
$$

Ausgang: $U_{out} = U_{C_2}(t)$

Laufzeitverluste in ICs – RC-Modell



Modellierung der Laufzeitverluste

- Widerstand aufgrund
  - Leitungslänge ($\boldsymbol{R = \rho \frac{l}{A}}$)
  - "ON" Transistoren
- Kondensator aufgrund
  - kapazitive Kopplung der Leitungen
  - Nebensignaleffekte

Übertragungsverhalten:

$$\begin{bmatrix} \frac{dU_{C_1}}{dt} \\ \frac{dU_{C_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{R_1C_1} + \frac{1}{R_2C_1}\right) & \frac{1}{R_2C_1} \\ \frac{1}{R_2C_2} & -\frac{1}{R_2C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{R_1C_1} \\ 0 \end{bmatrix} U_q$$

Ausgang $U_{out} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{C_1} \\ U_{C_2} \end{bmatrix}$ (⇒ gewöhnliche DGL)

Elektromagnetische Verträglichkeit

Signalausbreitung auf einem Integrated Circuit Board

(Quelle: TEMF, TU Darmstadt)

- Lösung der Maxwell Gleichungen
- Diskretisierungsverfahren (FEM, . . .)
  - Numerische Integration, Interpolation
- Gleichungssystemlöser
- . . .

Latent Semantic Indexing (LSI)

Ziel

Suche nach Informationen in großen Datenmengen (Dokumenten).

- Dokumente

  D1 = "Numerisches Rechnen ist sehr interessant"
  D2 = "Das ist eine interessante Frage"
  D3 = "Kopfrechnen wird überbewertet"

- Term-document Matrix $\boldsymbol{A}$

	D1	D2	D3	...
T1 = Numerisches	1	0	0	...
T2 = Rechnen	1	0	1	...
T3 = interessant	1	1	0	...

M.W. Berry, M. Browne, Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval

Latent Semantic Indexing (LSI)

Ziel

Suche nach Informationen in großen Datenmengen (Dokumenten).

- Term-document Matrix wird gewichtet (z.B. mit Häufigkeit)
- Singulärwertzerlegung: Niedrig-Rang Approximation zur
  - Reduktion des Speicherbedarfs und Rechenzeit
  - Entfernen von "Rauschen"
  - $\boldsymbol{A}$ dünnbesetzt - Synonyme und Polysemie (Mehrdeutigkeit)
- "Relevance ranking" basiert auf Winkel zwischen Dokumentenvektor $\boldsymbol{d}$ und Suchvektor $\boldsymbol{q}$ (Kosinus-Ähnlichkeit)

$$\cos(\theta) = \frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{q}}{\|\boldsymbol{d}\| \, \|\boldsymbol{q}\|}.$$

M.W. Berry, M. Browne, Understanding Search Engines: Mathematical Modeling and Text Retrieval

PageRank

Ziel

Bestimmung der Relevanz der gefundenen Webseiten

Bekannt: PageRank Algorithmus (Google)*

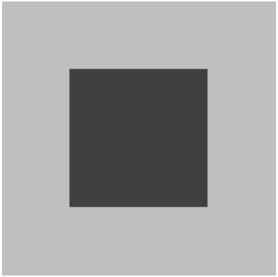
- Linkstruktur entscheidet über Bewertung (Linkpopularität): "Eine Webseite ist bedeutend, wenn viele bedeutende Webseiten auf sie verlinken."
- Mathematik hinter PageRank relevant auf vielen Gebieten
  D.F. Gleich, PageRank Beyond the Web, *SIAM Review* 57(3), 2015.
  Anwendungen: biology and bioinformatics, chemistry, neuroscience, physics, engineering (traffic networks), ...

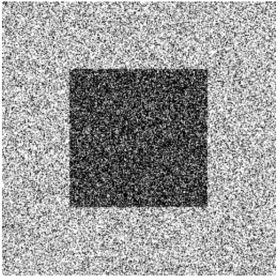
*S. Brin, L. Page, R. Motwami, and T. Winograd. *The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web*, Technical Report 1999-0120, Computer Science Department, Stanford University, Stanford, CA, 1999.

Filtern verrauschter Bilder

- Bild $u(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ mit Graustufen $[0, 255]$
- Weißes Rauschen $n(x, y) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- Verrauschtes Bild: $u_n(x, y) = u(x, y) + n(x, y)$

Kanten (Sprünge in der Helligkeit) beinhalten wichtige Informationen
$\Rightarrow$ Kantendetektion ist wesentlicher Schritt in der Bildverarbeitung



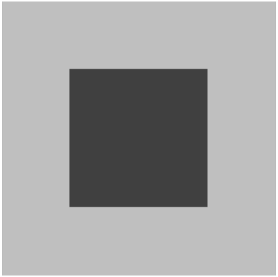


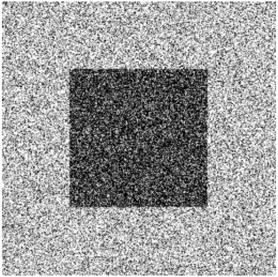
Filtern verrauschter Bilder

Kantendetektion basiert auf

- Auswertung der ersten Ableitung (Kante $\longrightarrow$ großer Gradient)
- Nulldurchgang der zweiten Ableitung

Problem: Echte Kanten werden durch Rauschen verdeckt.



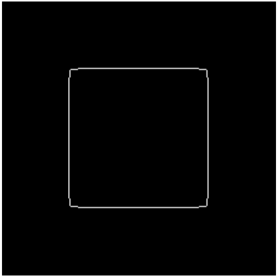


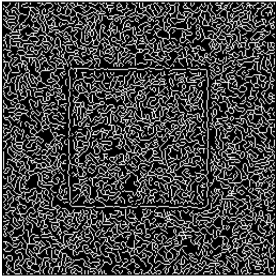
Filtern verrauschter Bilder

Kantendetektion basiert auf

- Auswertung der ersten Ableitung (Kante $\longrightarrow$ großer Gradient)
- Nulldurchgang der zweiten Ableitung

Problem: Echte Kanten werden durch Rauschen verdeckt.





Filtern verrauschter Bilder

Filtern mit Hilfe (nicht)linearer Partieller Differentialgleichungen

Vorgehen:

- Verrauschtes Bild als Anfangsbedingung

$$u(x, y, t = 0) = u_n(x, y)$$

- Lösen einer (nicht)linearen Diffusionsgleichung
  - Linearer Filter (lineare Diffusionsgleichung)

$$u_t = \mathrm{div}(\nabla u)$$

  - Total Variation Minimization

$$u_t = \mathrm{div}\left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|}\right) + \lambda(u - u_n)$$

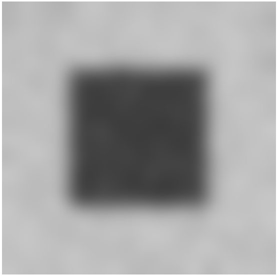
Ziel: Rauschen entfernen und gleichzeitig Kanten erhalten.

Numerische Lösung

- Matlab demo

Numerische Lösung

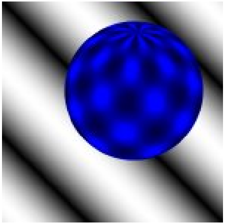
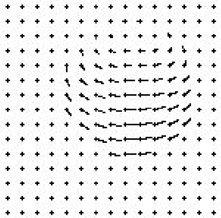
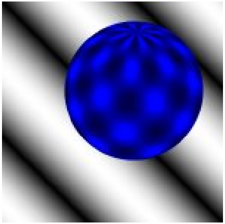
- Matlab demo
- Ergebnis linearer (links) und nichtlinearer (rechts) Filter



Optical Flow

Definition

Optical flow is the distribution of *apparent* velocities of movement of brightness patterns in an image. [Horn/Schunk,1980]

 ⇒  ⇒ 

Computer Vision Research Group, University of Otago

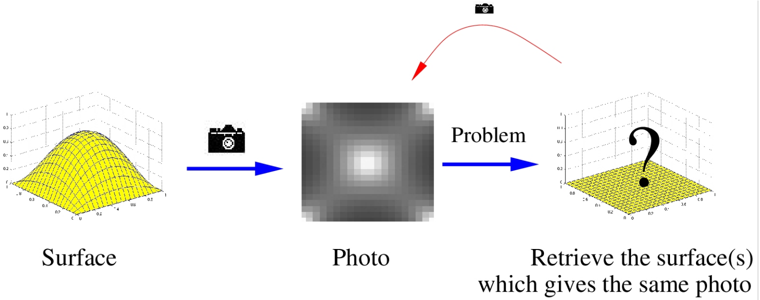
Anwendungen:

- Objekterkennung und -verfolgung
- Bewegungsschätzung (Fahrzeuge, Personen, . . .)
- Video compression

Shape from Shading

Ziel

Berechne die 3-dimensionale Form eines Objekts/Bildes von einem oder mehreren Scharz-Weiß-Bildern.



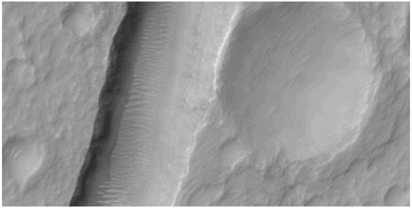
Quelle: Prados & Faugeras

Shape from Shading

Ziel

Berechne die 3-dimensionale Form eines Objekts/Bildes von einem oder mehreren Scharz-Weiß-Bildern.

Mars Global Surveyor Orbiter (Quelle: NASA)

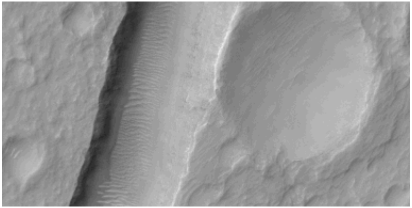


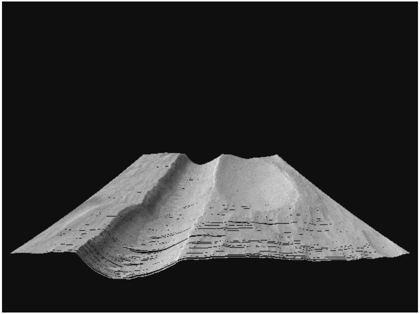
Shape from Shading

Ziel

Berechne die 3-dimensionale Form eines Objekts/Bildes von einem oder mehreren Scharz-Weiß-Bildern.

Mars Global Surveyor Orbiter (Quelle: NASA)





Zwei-Phasen-Strömungen

Ron Fedkiw (siehe `http://physbam.stanford.edu/~fedkiw/`):

- Boat straight: play
- Boat turning: play
- Smoke sphere: play
- Smoke rising: play
- Splash: play
- Glass: play

RWTH LNM & SC: `http://www.igpm.rwth-aachen.de/drops`

Ziele der Vorlesung

Für unterschiedliche Problemstellungen (Lösen eines linearen Gleichungssystems, Berechnung eines Integrals, ...) werden folgende Themen behandelt:

- Kondition (= Empfindlichkeit für Störungen) eines Problems
- Wichtige numerische Lösungsverfahren
- Stabilität der Lösungsverfahren (= Verstärkung von Rundungsfehlern)
- Effizienz (= Anzahl der Rechenoperationen, Speicherbedarf) der Lösungsverfahren, d.h. der numerische Aufwand, der nötig ist, um eine gewünschte "Lösungsqualität", sprich Genauigkeit zu erzielen.

Nächstes Mal

- Kondition eines Problems