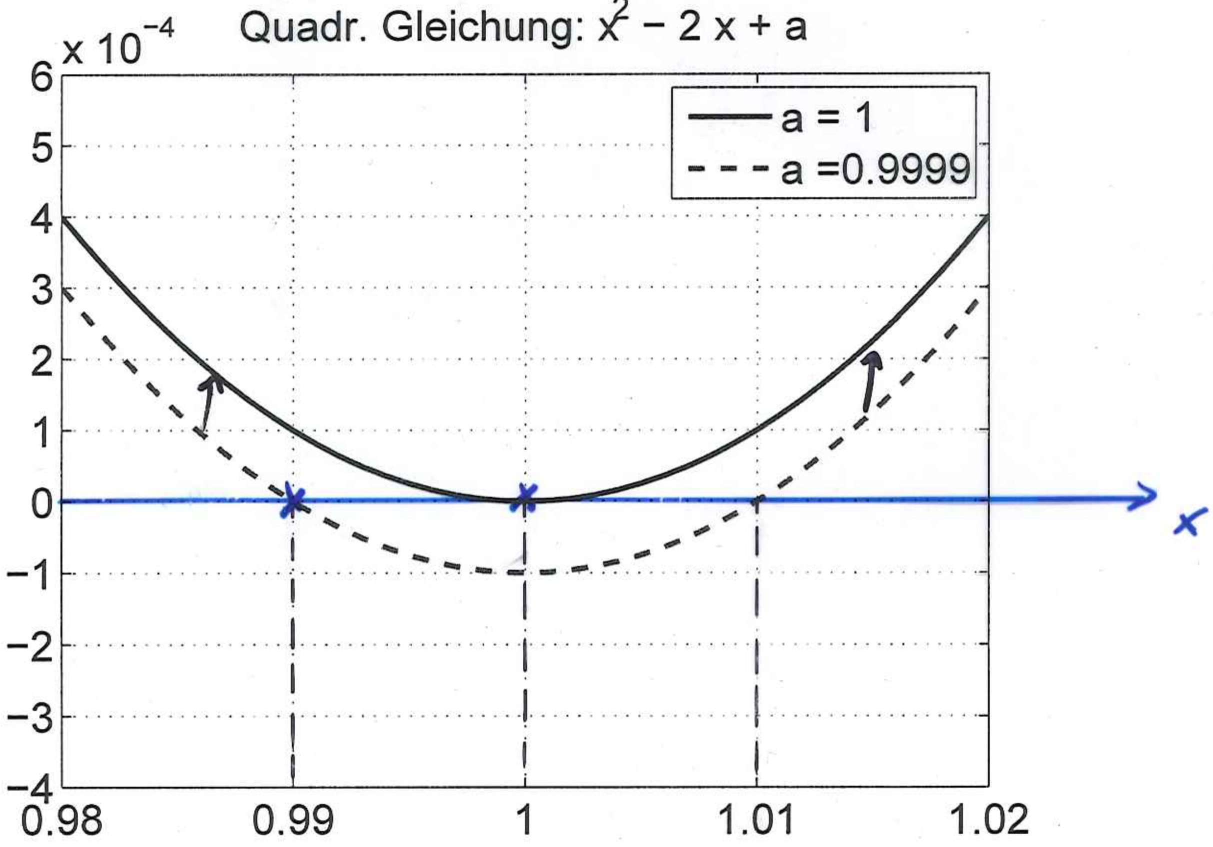
$\Rightarrow \; |\tilde{f}(x) - f(x)| \leq \varepsilon = 10^{-4}$

$\Rightarrow$ doppelte Nullstelle : $m = 2$

$\Rightarrow \; f''(x^*) = 2$

$$|\tilde{x}^* - x^*| \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left| \frac{2!}{f''(x^*)} \right|^{1/2} = 10^{-2}$$

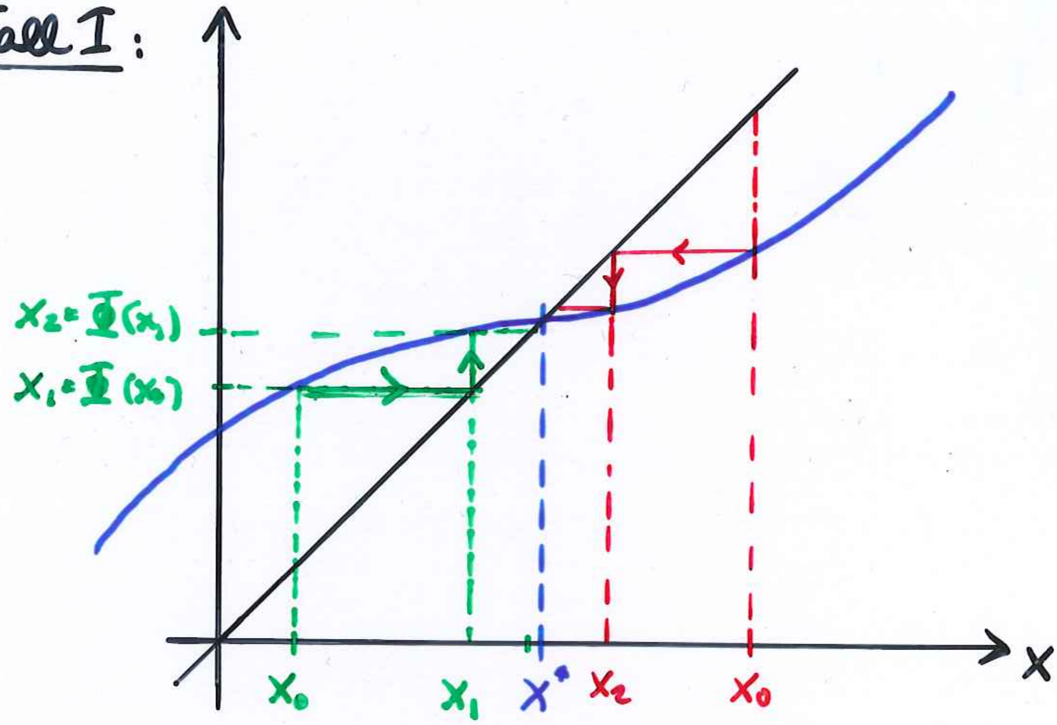


Fixpunktiteration

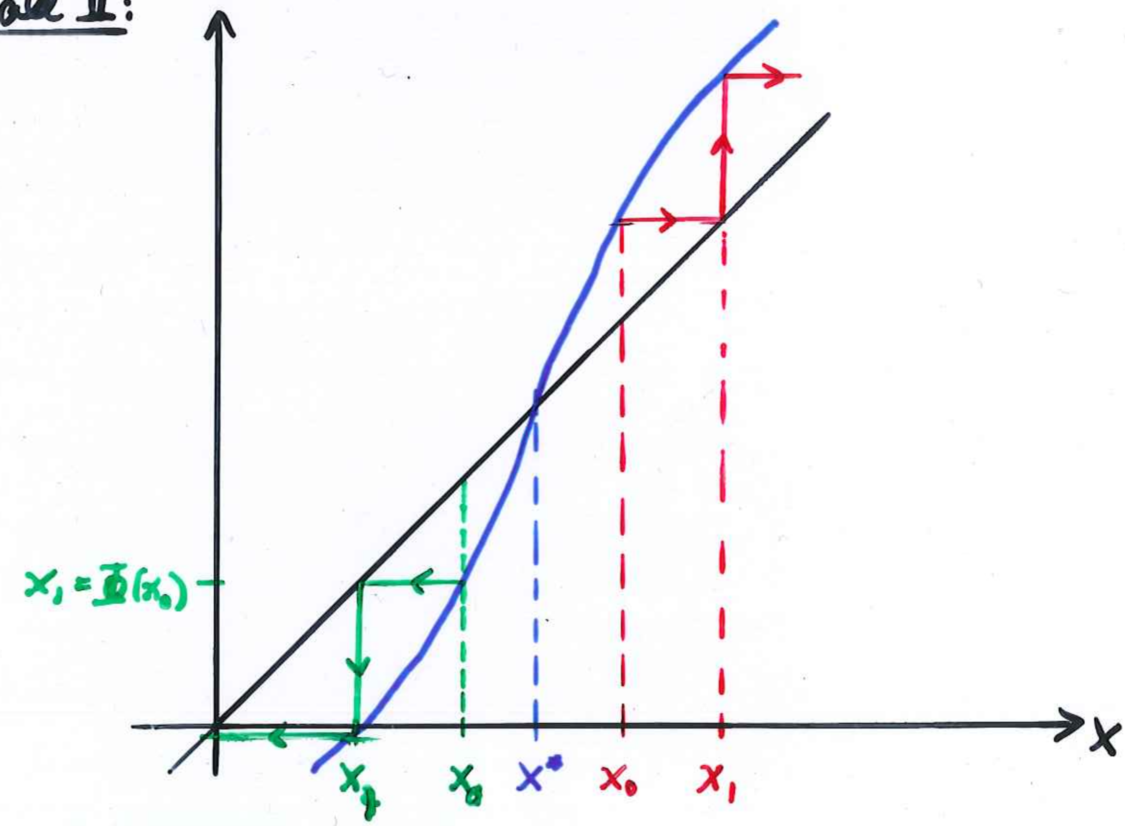
- Wähle Startwert x_0 (in einer Umgebung von x^*)
- Bilde

$$x_{k+1} = \Phi(x_k), \quad k = 0,1,2,\dots$$

Fall I:



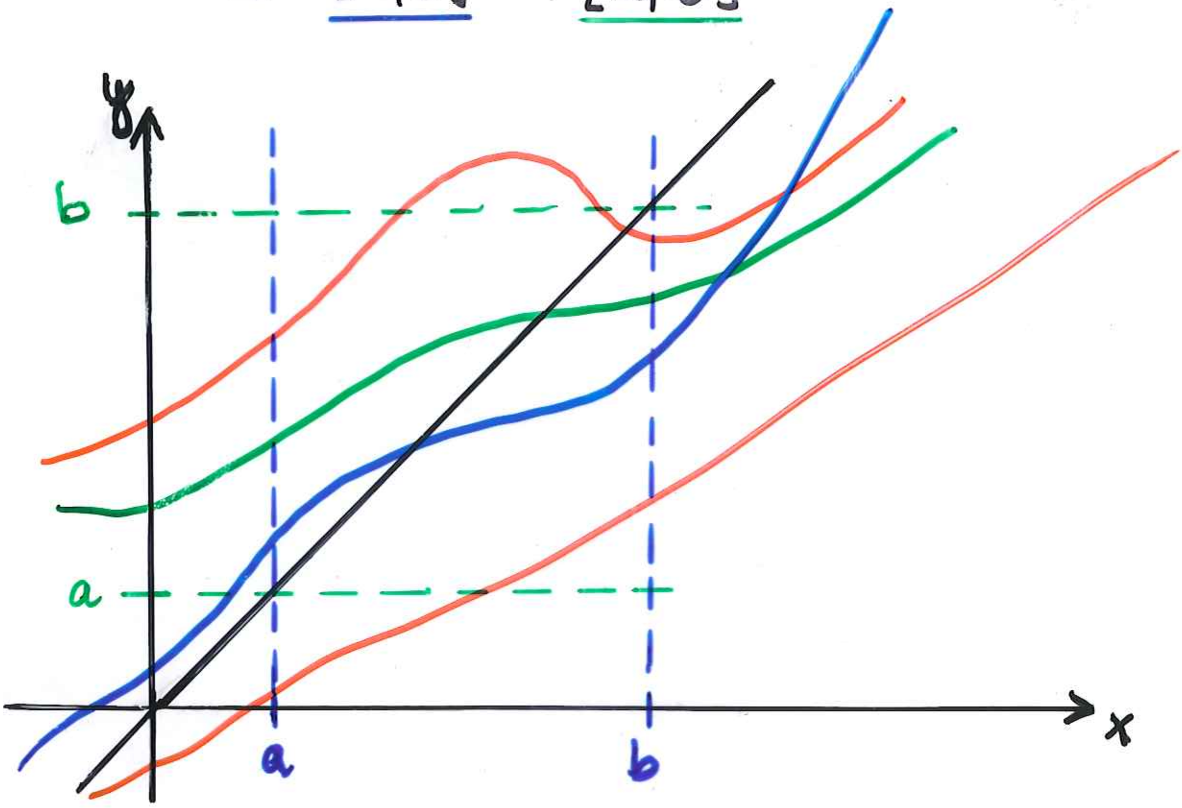
Fall II:



Selbstabbildung

Spezialfall: $X = \mathbb{R}$, $E = [a,b]$

$$\Phi : [a,b] \to [a,b]$$



Nachweis: z. B.

1.) $\Phi(x)$ monoton steigend und

$\Phi(a) \geq a$, $\Phi(b) \leq b$

2.) $\Phi(x)$ beschränkt

$\Phi(x) = 2 + \sin x$

da $-1 \leq \sin x \leq 1$ $\Rightarrow$ $1 \leq \Phi(x) \leq 3$

Fixpunktiteration: $x_{k+1} = \Phi(x_k)$, Φ stetig differenzierbar

Fall I: $|\Phi'(x^*)| < 1$

$\Phi'(x)$ stetig, d.h. $|\Phi'(x)| < 1$ für alle $x \in U_\delta = [x^*-\delta, x^*+\delta]$

Mittelwertsatz: für jedes $x, y \in U_\delta$ existiert ein $\xi \in U_\delta$ mit

$$|\Phi(x) - \Phi(y)| = |\Phi'(\xi)(x-y)| \leq \max_{z \in U_\delta} |\Phi'(z)|\,|x-y| = L\,|x-y|$$

und $L = \max_{z \in U_\delta} |\Phi'(z)| < 1$.

$\Rightarrow \Phi$ Kontrahierend und für $x_0 \in U_\delta$

$$|x_{k+1} - x^*| = |\Phi(x_k) - \Phi(x^*)| \leq L\,|x_k - x^*| \leq L^{k+1}\,|x_0 - x^*|, \text{ für alle } k>0$$

$$\boxed{\Rightarrow \lim_{k \to \infty} x_k = x^*}$$

Fall II: $|\Phi'(x^*)| > 1$

... analog ...

$$|x_{k+1} - x^*| = |\Phi(x_k) - \Phi(x^*)| = |\Phi'(\xi)(x_k - x^*)|$$

$$> |x_k - x^*| \quad \text{für alle } x_k \in U_\delta$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Fehler wird vergrößert}}$

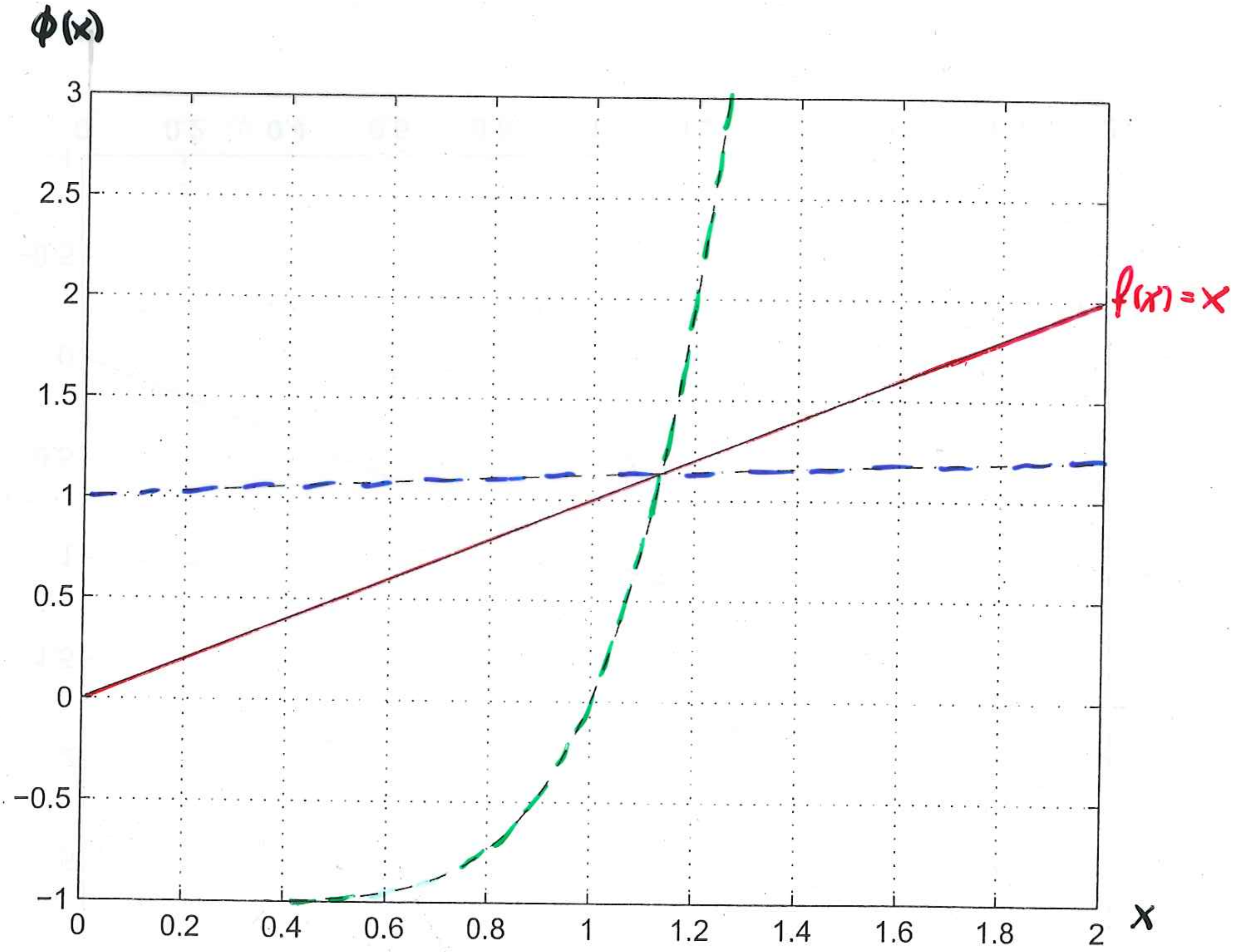
Beispiel Fixpunktgleichung (siehe D:5C)

Finde die größere der beiden Nullstellen von

$$f(x) = x^2 - x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x^* = 2, \quad E = [1,3]$$

Fixpunktfunktion $\Phi(x)$	Ableitung	Konvergenz
1. $\Phi(x) = x^2 - 2$	$\Phi'(x) = 2x$ $\Rightarrow \lvert\Phi'(x)\rvert > 1 \quad \forall x \in E$	nein
2. $\Phi(x) = \sqrt{x+2}$	$\Phi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$ $\Rightarrow \lvert\Phi'(x)\rvert < 1 \quad \forall x \in E$	ja (+ Selbstabb.)
3. $\Phi(x) = 1 + \frac{2}{x}$	$\Phi'(x) = -\frac{2}{x^2}$ $\Rightarrow \lvert\Phi'(x)\rvert < 1 \quad \forall x > \sqrt{2}$ Achtung $x_0 = 1 < \sqrt{2}$	ja
4. $\Phi(x) = \frac{x^2+2}{2x-1}$ vgl. $x_{k+1} = \underbrace{x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}_{= \Phi(x_k)}$	$\Phi'(x) = \frac{2x^2-2x-4}{(2x-1)^2}$ $\Rightarrow \lvert\Phi'(x)\rvert < 1 \quad \forall x > \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}) \approx 1.366$ Achtung $x_0 = 1 < 1.366$	ja

N5.6



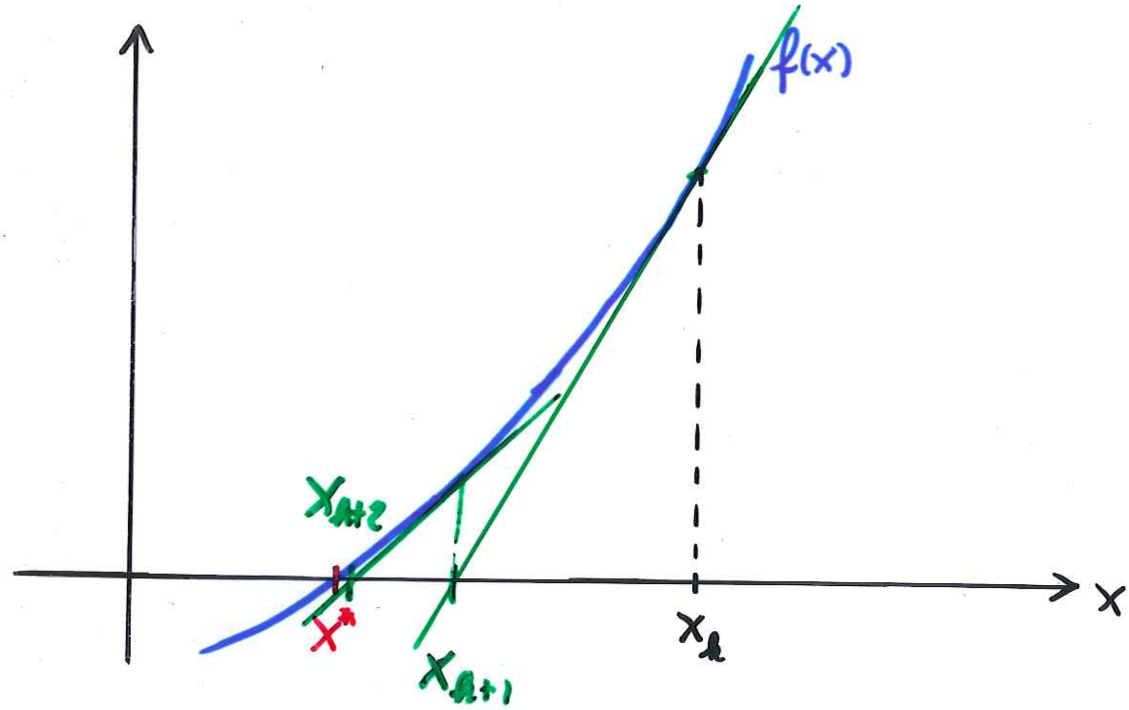
$\Phi_1(x) = x^6 - 1$

$\Phi_2(x) = (x+1)^{1/6}$

Newton Verfahren

ges.: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

ges.: Nullstelle $f(x^*) = 0$



Taylor-Reihe

$$f(x) = \underbrace{f(x_k) + f'(x_k)(\overset{x_{k+1}}{\downarrow}{x} - x_k)}_{\text{Tangente } T(x)} + \frac{1}{2} f''(x_k)(x - x_k)^2 + \ldots$$

Nullstelle der Tangente ergibt nächsten Wert x_{k+1}

$$T(x_{k+1}) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \doteq \Phi(x_k)$$

Fixpunktiteration mit

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Vorgehen

1. Berechne $f'(x)$ analytisch
2. Bestimme Anfangswert x_0
3. Iteration

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

bis $\left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right| \leq$ gewünschte Fehlertoleranz

Zusammenfassung

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x^*) = 0$

Lösungsverfahren	Konvergenzordnung
- Fixpunktiteration	$p = 1$
Konstruiere geeignete Iterationsfunktion $\Phi(x)$	
$\Phi(x) = x - M_x f(x)$, $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$ invertierbar	
Konvergenzordnung $p=2$ wenn $\Phi'(x^*) = 0$	
- Newton-Verfahren	$p=2$
$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$	
wenn $f'(x^*) \neq 0$	
- Sekanten-Verfahren	$p=1.6$
$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}\right)$	
- Bisektionsverfahren	$p = 1.0$

Fixpunktiteration (auch Newton) im allgemeinen nur lokal konvergent $\Rightarrow$ Startpunkt ist wichtig