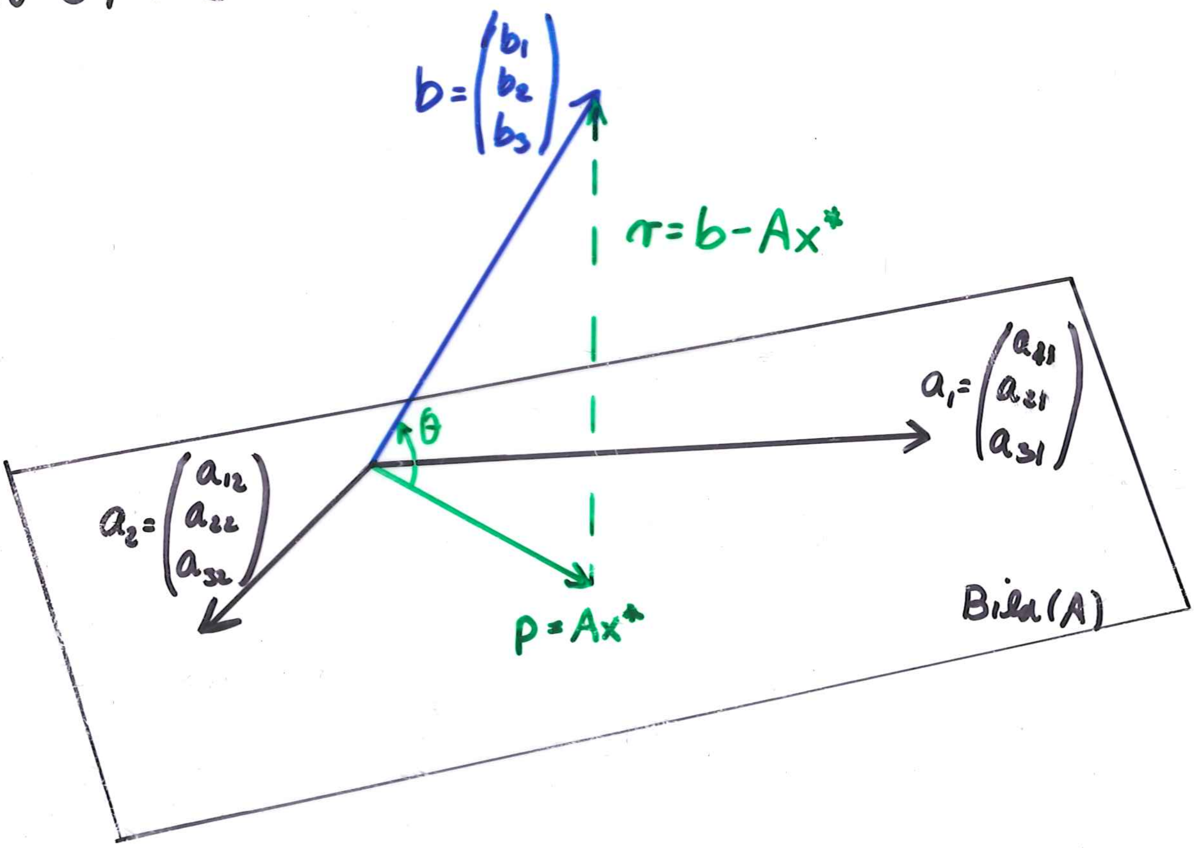
Normalgleichung

Ziel: $\|Ax^* - b\|_2 = \min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

$m = 3,\ n = 2$:



Bildraum: $\text{Bild}(A) = \{ Ax \mid x \in \mathbb{R}^2 \}$

Residuum: $r = b - Ax$

Ziel: Minimiere Residuum in der 2-Norm

Lösung (geometrisch):

Residuum $r = b - Ax$ orthogonal zu Bild (A)

$\Rightarrow \quad (Ay)^T (Ax - b) = 0 \quad$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \quad y^T (A^T Ax - A^T b) = 0 \quad$ für alle $y \in \mathbb{R}^2$

$\Leftrightarrow \quad A^T Ax - A^T b = 0$

$\Rightarrow$ "Normal"gleichungen

vgl. Projektion

$p = Ax^*$ ist orthogonale Projektion von b auf Bild (A)

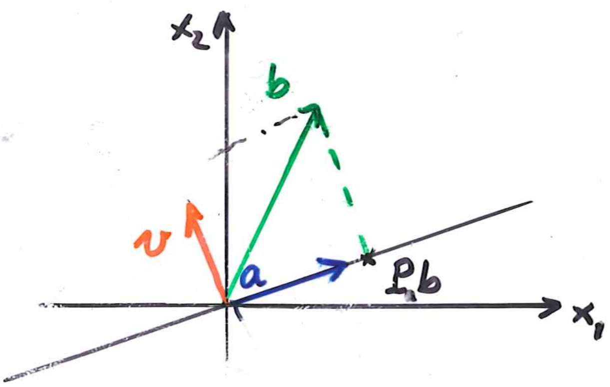
Lösung der Normalgleichung

$$x^* = (A^T A)^{-1} A^T b$$

$$\Rightarrow p = Ax^* = \underbrace{A (A^T A)^{-1} A^T}_{\text{Projektor } P} b = P b$$

Projektion auf eine Linie:

$\Rightarrow A = a \in \mathbb{R}^m$ (Vektor)



$$P_a b = \frac{a a^T}{a^T a} b$$

$$\Rightarrow P_a = \frac{a a^T}{a^T a}$$

Mit Normalenrichtung v:

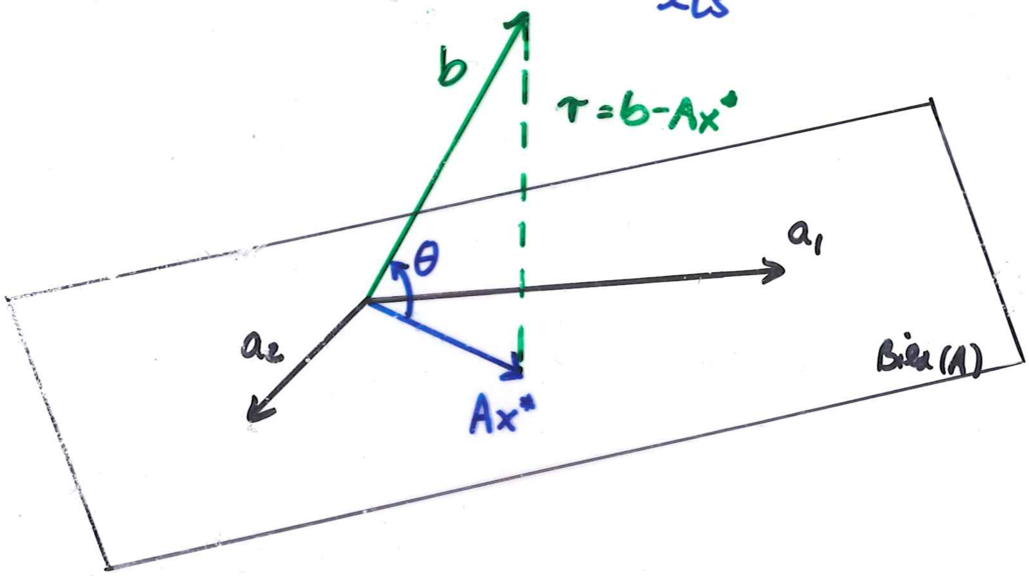
$$P_v = I - \frac{v v^T}{v^T v}$$

Kondition

Relative Fehler in Daten A, b aufgrund Maschinengenauigkeit eps, d.h.

$$\frac{\|\tilde{b}-b\|_2}{\|b\|_2} \le eps \qquad \frac{\|\tilde{A}-A\|_2}{\|A\|_2} \le eps$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\|\tilde{x}-x^*\|_2}{\|x^*\|_2} \le \underbrace{\left(\overbrace{\frac{\chi_2(A)}{\cos\theta}}^{\delta_b} + \overbrace{\chi_2(A) + \chi_2(A)^2 \tan\theta}^{\delta_A} \right)}_{\chi_{LS}} eps = \chi_{LS}\, eps$$



$A = [a_1\ a_2]$

3 Fälle:

1. $\theta \approx 0$: $\chi_{LS} \approx 2\,\chi(A)$: vergleichbar lineares Gleichungssystem
   $\|r\|_2$ klein

2. $\theta \approx \frac{\pi}{4}$: $\chi_{LS} \approx \chi(A)^2$:

3. $\theta \approx \frac{\pi}{2}$: $\chi_{LS} \to \infty$: $x^* = 0$ Lösung für $\theta = \frac{\pi}{2}$
   $\|r\|_2 = \|b\|_2$ $\Rightarrow$ minimale Änderung in A oder b führen zu $\tilde{x} \neq 0$

Lineare Ausgleichsrechnung

ges.: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, Rang $(A) = n$

ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$$

Definiere:

- Winkel $\theta = \sphericalangle(Ax^*, b)$

- Konditionszahl $\kappa_2(A) = \dfrac{\max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}}{\min_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}}$

Kondition des Problems

θ	0	$\pi/4$	$\pi/2$
κ_{LS}	$\approx \kappa(A)$	$\approx \kappa(A)^2$	$\to \infty$

Kondition des Lösungsverfahrens

- Normalgleichungen: $A^T A x = A^T b$ (=> Cholesky)

$$\kappa_{NG} = \kappa_2(A^T A) = \kappa_2(A)^2$$

- QR-Zerlegung

$$\kappa_{QR} = \kappa(A)$$

N4.5

Matlab Beispiel: Kondition lineare Ausgleichsrechnung

Gegeben sei die Funktion

$$g(x) = \exp(\sin(4x)) \quad , \quad x \in [0,1]$$

Approximiere $g(x)$ durch Polynom 14. Grades

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots + a_{14} x^{14}$$

mit 100 Messpunkten.

$$\Rightarrow \quad A \in \mathbb{R}^{100 \times 15}, \quad b \in \mathbb{R}^{100},$$

$$x^* = [a_0 \; a_1 \; \ldots \; a_{14}] \in \mathbb{R}^{15}$$

Vergleich: QR, "\", Normalgl., SVD

$g(x)$ normalisiert, so dass $a_{14} = 1$