N3.1

Lineare Gleichungssysteme

ggg.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$Ax = b$$

Kondition

- Störungen in b

$$A(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A^{-1}\| \; \|A\|}_{\varkappa(A)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

- Störungen in A und b

$$(A+\Delta A)(x+\Delta x) = b + \Delta b$$

Annahme: $\varkappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$

$$\Rightarrow \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\varkappa(A)}{1 - \varkappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Beispiel: Stabilität und Kondition

Gegeben sei

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+2\delta}{3} & \frac{\sqrt{2}(1-\delta)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-\delta)}{3} & \frac{2+\delta}{3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Als Lösung von $Ax = b$ ergibt sich

$$x = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Annahme: Störung in rechter Seite b

$$\tilde{b} = b + \varepsilon_{mach} \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = x + \frac{\varepsilon_{mach}}{\delta} \begin{bmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Für den relativen Fehler in x ergibt sich

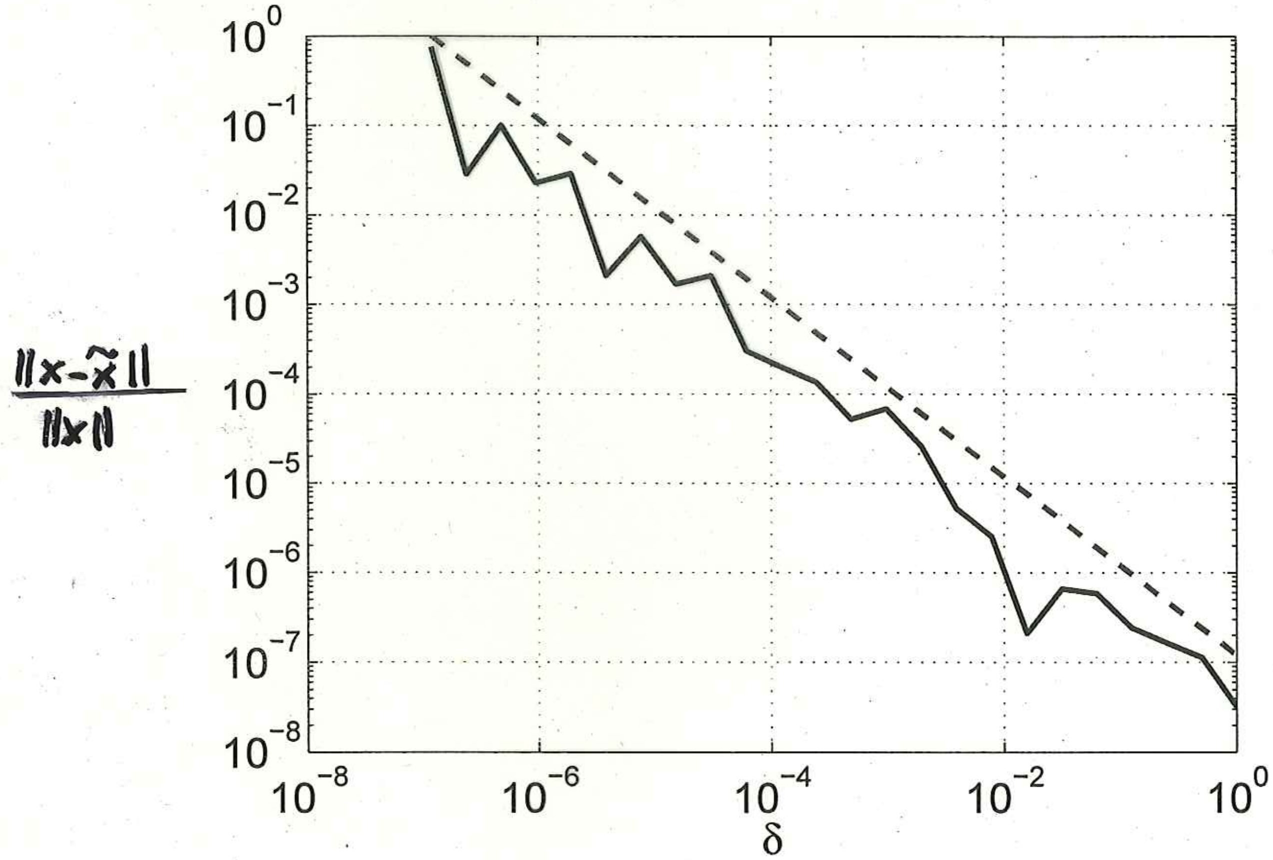
$$\frac{\|\tilde{x} - x\|_2}{\|x\|_2} = \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\kappa(A)} \underbrace{\varepsilon_{mach}}_{\frac{\|\tilde{b} - b\|_2}{\|b\|_2}}$$

N3.2

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1+2\delta}{3} & \frac{\sqrt{2}(1-\delta)}{3} \\ \frac{\sqrt{2}(1-\delta)}{3} & \frac{2+\delta}{3} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}, \quad Ax = b$$

$eps \approx 1.19 \cdot 10^{-7}$ (MATLAB eps('single'))

$$\frac{\|x - \tilde{x}\|}{\|x\|} \approx \underbrace{\frac{1}{\delta}}_{\kappa(A)} \cdot eps$$



$\Rightarrow$ Algorithmus stabil (Lösung von $Ax=b$)

aber

Problem schlecht konditioniert

N3.3

Zeilenskalierung

LGS: $Ax = b$

$\Rightarrow D_z A x = D_z b$, mit $D_z = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$

Wähle: $d_i = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \right)^{-1}$

dann gilt: $\sum_{j=1}^{n} |(D_z A)_{ij}| = 1$ für alle i

Optimalitätseigenschaft

$\chi_\infty(D_z A) \leq \chi_\infty(DA)$

für jede reguläre Diagonalmatrix D

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung mit D_z liefert minimale Konditionszahl bzgl. der Maximumnorm

WICHTIG

Problem immer zuerst skalieren.

N3.4

<u>Warum?</u> (siehe Beispiel 3.19)

$$(A \quad b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{2} & 0 & 1 & 0 \\ +\frac{2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -3 & 1 & -8 \\ 6 & 1 & -1 & 6 & -16 \\ -2 & -5 & 4 & 1 & -12 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

↓ Faktor 1. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{2} & 1 & 0 \\ 0 & +\frac{6}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

↓ Faktor 2. Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{2} & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right)$$

↳ Faktor 3. Zeile

N3.4

Zusammengefasst (siehe Beispiel 3.19)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{10}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L_3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{2} & 1 & 0 \\ 0 & +\frac{6}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_2} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{2} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{2} & 0 & 1 & 0 \\ +\frac{2}{2} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$\Rightarrow L_3 L_2 L_1 A = R$$

$$A = (L_3 L_2 L_1)^{-1} R$$

$$= \underbrace{L_1^{-1} L_2^{-1} L_3^{-1}}_{L} R$$

wobei $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4/2 & 1 & 0 & 0 \\ 6/2 & 4/2 & 1 & 0 \\ -2/2 & -6/2 & 10/2 & 1 \end{pmatrix}$

Zufall?

Zufall? Nein!

B 3.1

$L_1: \quad l_1 = (0 \quad +\frac{4}{2} \quad +\frac{6}{2} \quad -\frac{2}{2})^T$

$$\Rightarrow L_1 = I - \underbrace{l_1 e_1^T}_{\text{dyadisches Produkt}} \quad \text{mit } e_1 = (1\ 0\ 0\ 0)^T$$

$L_2: \quad l_2 = (0 \quad 0 \quad \frac{4}{2} \quad -\frac{6}{2})^T$

$$\Rightarrow L_2 = I - l_2 e_2^T \quad \text{mit } e_2 = (0\ 1\ 0\ 0)^T$$

$L_3: \quad l_3 = (0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{10}{2})^T$

$$\Rightarrow L_3 = I - l_3 e_3^T \quad \text{mit } e_3 = (0\ 0\ 1\ 0)^T$$

1. Glücksfall: Inverse der L_k

Für $L_k = I - l_k e_k^T$ ist Inverse gegeben durch $L_k^{-1} = I + l_k e_k^T$

Beweis: $L_k L_k^{-1} = (I - l_k e_k^T)(I + l_k e_k^T)$

$$= I - l_k \underbrace{e_k^T l_k}_{=0\text{, per Definition von } l_k} e_k^T = I$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Glücksfall: Multiplikation der L_k

$$L_k^{-1} L_{k+1}^{-1} = (I + l_k e_k^T)(I + l_{k+1} e_{k+1}^T)$$

$$= I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T + l_k \underbrace{e_k^T l_{k+1}}_{=0} e_{k+1}^T$$

$$= I + l_k e_k^T + l_{k+1} e_{k+1}^T$$

$$L_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -c & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1^{-1} L_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 \\ -b & -c & 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

ges.: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $\det(A) \neq 0$

ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$A x = b$$

Lösungsverfahren

- Gauß-Elimination, LR-Zerlegung ohne Pivotisierung

Ist im Gauß-Algorithmus das Pivot-Element immer ungleich null, dann erhält man

$$A = LR$$

mit

L... normierte untere Dreiecksmatrix

R... obere Dreiecksmatrix

z.B. $n=4$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \times & 1 & 0 & 0 \\ \times & \times & 1 & 0 \\ \times & \times & \times & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \times & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & \times \end{bmatrix}$$

Problem: Verfahren ohne Pivotisierung instabil!

N3.5

ggg.:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Schritt : $a_{11} \neq 0$

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & ? & 1 \end{bmatrix} \qquad \tilde{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \underline{a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}} & a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13} \\ 0 & a_{32} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{12} & a_{33} - \frac{a_{31}}{a_{11}} a_{13} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{R} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \underline{\tilde{a}_{22}} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix}$$

2. Schritt : $\tilde{a}_{22} \neq 0$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & 1 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \underbrace{\tilde{a}_{33} - \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} a_{23}}_{\tilde{\tilde{a}}_{33}} \end{bmatrix}$$

Speicherung von L, R durch überschreiben von A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & \tilde{\tilde{a}}_{33} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ "1" auf Diagonale in L wird nicht gespeichert

B3.2

Instabilität bei Gauß-Elimination

Bsp 1: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

wobei

$$\operatorname{rang}(A) = 2, \quad \kappa_2(A) = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \approx 2.618$$

Bsp 2: $A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x \approx \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

wobei

$$\operatorname{rang}(A) = 2, \quad \kappa_2(A) \approx 2.618$$

a) ohne Pivotisierung

$$|\cdot 10^{20} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & 1-10^{20} & -10^{20} \end{array}\right)$$

Ergibt ungefähr ($\mathrm{eps} \approx 10^{-16}$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 0 & -10^{20} & -10^{20} \end{array}\right) \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) mit Pivotisierung

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10^{-20} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|\cdot 10^{-20} \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1-10^{-20} & 1 \end{array}\right)$$

B3.2

Ergibt ungefähr (Eps $\approx 10^{-16}$)

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Was passiert in der LR-Zerlegung?

Für
$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
erhält man ohne Pivotisierung
$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } R = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & 1-10^{20} \end{pmatrix}$$
also mit Eps $\approx 10^{-16}$
$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sehr kleiner Fehler in $\tilde{R}$ ($O(10^{-20})$) aber

$$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ergibt sich $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ anstelle von $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bsp.: LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

N3.6

Gegeben ist

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0.3 & -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & -0.4 & -0.3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Spaltenpivotisierung (ohne Zeilen-Äquilibrierung). Geben Sie P, L und R an.

Lösung: 1. Schritt

$$\xrightarrow[P_1]{\text{Pivotisierung}} \boxed{\begin{matrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0.3 & -0.3 & 0.1 \\ 0.4 & -0.4 & -0.3 \end{matrix}} \xrightarrow[L_1]{\text{Elimination}} \boxed{\begin{matrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0.15 & -0.315 & 0.19 \\ 0.2 & -0.42 & -0.18 \end{matrix}}$$

Das bedeutet:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.15 & 1 & 0 \\ -0.2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R_1 = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0 & -0.315 & 0.19 \\ 0 & -0.42 & -0.18 \end{bmatrix}$$

2. Schritt

$$\xrightarrow[P_2]{\text{Pivotisierung}} \boxed{\begin{matrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0.2 & -0.42 & -0.18 \\ 0.15 & -0.315 & 0.19 \end{matrix}} \xrightarrow[L_2]{\text{Elimination}} \boxed{\begin{matrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0.2 & -0.42 & -0.18 \\ 0.15 & 0.75 & 0.325 \end{matrix}}$$

Das bedeutet:

$$P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{R_2} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0 & -0.42 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0.325 \end{bmatrix}$$

<u>Ausführlich geschrieben</u>:

$$L_2 P_2 L_1 P_1 A = R$$

$$\Rightarrow L_2' L_1' \underline{P_2 P_1} A = R$$

$$\left.\begin{aligned} \text{mit } L_1' &= P_2 L_1 P_2^{-1} \\ L_2' &= L_2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{L = (L_1')^{-1} (L_2')^{-1}}$$

BEACHTE: Bei der Berechnung der L_j' werden nur Zeilen / Spalten mit Index strikt größer j permutiert.

<u>Zusammenfassend</u>:

$$P = P_2 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L = (L_1')^{-1} (L_2')^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 1 & 0 \\ 0.15 & 0.75 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 2.0 & 0.1 & -0.6 \\ 0 & -0.42 & -0.18 \\ 0 & 0 & 0.325 \end{bmatrix},$$

Permutationsmatrix P

P ist eine Einheitsmatrix mit vertauschten Zeilen

Beispiel: $n = 3$ (siehe Beispiel 3.30)

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P_{1,3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad P_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Achtung: $P_{1,3} P_{2,3} \neq P_{2,3} P_{1,3}$

$\Rightarrow$ Reihenfolge bei Berechnung von P beachten

Schnellere Berechnung:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \leftrightarrow 3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = P$$

Determinante:

$\Rightarrow$ Aufpassen bei Skalierung

$$\det(A) = -36 = \underbrace{(-1)^2}_{(-1)^{\#\text{Zeilenvertausch.}}} \cdot \underbrace{\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{5}{6}\right) \cdot \left(\tfrac{3}{5}\right)}_{\prod_{i=1}^{3} r_{ii}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 4}_{\prod_{i=1}^{3} \frac{1}{d_{ii}}}$$

- Gauß-Elimination, LR-Zerlegung mit Pivotisierung

Zu jeder nicht singulären Matrix A existiert eine Permutationsmatrix P, so dass

$$PA = LR$$

mit

P... Permutationsmatrix ($P^{-1} = P^T$)

=> Einheitsmatrix mit permutierten Zeilen

=> Nicht im vornherein bekannt!

L... normierte untere Dreiecksmatrix

=> Eindeutige Lösung

=> Alle Einträge betragsmäßig durch 1 beschränkt

R... obere Dreiecksmatrix

Rechenaufwand: $\mathcal{O}(\frac{1}{3} n^3)$ Operationen

Vorgehen:

- Zeilenäquilibrierung ($O(n^2)$)
- Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

=> Pivotzeile mit betragsmäßig größtem Element in der jeweiligen ersten Spalte