Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

Zusatzblatt
Musterlösung

Abgabe: nicht abzugeben

Aufgabe 1: (Optimierung)

Musterlösung

Um kritische Punkte zu finden wendet man das notwendige Kriterium erster Ordnung an: $\nabla f(x^*) = 0$. Es ist

$$\nabla f(x^*) = \frac{1}{2}(A + A^T)x^* - b.$$

Wegen der vorausgesetzten Symmetrie von A gilt hier

$$\nabla f(x^*) = \frac{1}{2}(A + A^T)x^* - b = Ax^* - b \overset{!}{=} 0$$

und somit $Ax^* = b$.

Aufgabe 2: (Optimierung)

Musterlösung

a) Sei $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x + c &= \frac{1}{2}(x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - (b_1, b_2)^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + c \\ &= \frac{1}{2}(x_1, x_2)^T \begin{pmatrix} a_1x_1 + a_2x_2 \\ a_3x_1 + a_4x_2 \end{pmatrix} - b_1x_1 - b_2x_2 + c \\ &= \frac{1}{2}(a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_1x_2 + a_4x_2^2) - b_1x_1 - b_2x_2 + c \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich mit $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1$ liefert: $b_1 = -2$, $b_2 = 0$, $c = 0$, $a_1 = 2$, $a_4 = 4$, $a_2 + a_3 = 4$. Wähle $a_2 = a_3 = 2$, dann ist A symmetrisch. Darüber hinaus gilt für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ per Konstruktion:

$$x^T Ax = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 > 0$$

Damit ist A positiv definit.

b) Es ist $\nabla f(x) = Ax - b$ und $\nabla^2 f(x) = A$. Bestimme x^* mit $\nabla f(x^*) = 0 \Leftrightarrow Ax^* = b$:

$$\begin{aligned} x^* = A^{-1}b &= \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_4 & -a_2 \\ -a_3 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4 - 2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Damit erfüllt x^* das hinreichende Kriterium 2.Ordnung für eine Minimalstelle von f.

Aufgabe 3: (Optimierung)
Musterlösung

Sei $g(t) := f(x + ty)$. Die Kettenregel liefert: $\frac{dg}{dt}(t) = y^T \nabla f(x + ty)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x+y) - f(x) = g(1) - g(0) &= \int_0^1 \frac{dg(t)}{dt} \,\mathrm{dt} = \int_0^1 y^T \nabla f(x + ty) \,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^1 y^T (\nabla f(x + ty) + \nabla f(x) - \nabla f(x)) \,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^1 y^T \nabla f(x) \,\mathrm{dt} + \int_0^1 y^T (\nabla f(x + ty) - \nabla f(x)) \,\mathrm{dt} \\ &\leq y^T \nabla f(x) \int_0^1 \mathrm{dt} + \int_0^1 \|y^T\| \underbrace{\|\nabla f(x + ty) - \nabla f(x)\|}_{\leq Lt\|y\|} \,\mathrm{dt} \\ &\leq y^T \nabla f(x) + L\|y\|^2 \int_0^1 t \,\mathrm{dt} = y^T \nabla f(x) + \frac{L\|y\|^2}{2} \end{aligned}$$