Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

2. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 10.11.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Matrix-Norm) [2+2 Punkte]

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie für Matrizen A und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die durch $\|\cdot\|$ induzierte Operatornorm:

a) Es gilt $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

b) Es gilt $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Aufgabe 2: (Maschinenzahlen) [1+1+3+3 Punkte]

Sei $\mathbb{M}(b, m, r, R)$ die Menge der Maschinenzahlen. Erinnerung: Kopfrechnungen sind nicht genug. Ohne Zwischenschritte gibt es kein Punkt.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Maschinenzahlen in der Menge $\mathbb{M}(4{,}6, -1, 3)$.

b) Bestimmen Sie das kleinste Element in der Menge $\mathbb{M}$(3,4, −3,4), das größer als 4 ist.

c) Bestimmen Sie die normalisierte Dualdarstellung folgender Dezimalzahlen:

$$(98)_{10}, \qquad (35{,}25)_{10}, \qquad (78{,}75)_{10}$$

d) Bestimmen Sie die normalisierte Dezimaldarstellung folgender Dualzahlen:

$$(1101)_2, \qquad (0{,}011)_2, \qquad (1010{,}1)_2$$

Aufgabe 3: (Differenzenquotient) [2+4+5 Punkte]

a) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine beliebige, aber glatte Funktion und $h > 0$. Zeigen Sie die folgende Aussagen mit Hilfe der Taylor-Entwicklung:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2} f^{(2)}(\xi), \text{ für ein } \xi \in [x, x+h], \tag{1}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f^{(3)}(\xi), \text{ für ein } \xi \in [x, x+h]. \tag{2}$$

b) Betrachen Sie Formel (2). In welcher Größenordnung sollten Sie h optimalerweise wählen, so dass der Gesamtfehler in der Approximation der Ableitung möglichst klein wird? (Gehen Sie bei Ihren Berechnungen von einer relativen Maschinengenauigkeit eps $= 10^{-16}$ aus.)

c) Sei $f(x) := \sin(x)$. Schreiben Sie ein Programm, um die zweite Ableitung an der Stelle $x_0 = 1$ zu approximieren. Benutzen Sie dabei (2) und $h = 10^{-2}, 10^{-2{,}1}, 10^{-2{,}2}, 10^{-2{,}3}, \ldots, 10^{-12}$. Bestätigt sich Ihr Ergebnis aus b)? Plotten Sie den relativen Fehler über h. Drucken Sie auch Ihren Quellcode mit aus und reichen Sie Plot und Quellcode mit ein.

Aufgabe 4: (Reduktionsabbildung) [2+2+3+3 Punkte]

Sei fl die Reduktionsabbildung (siehe Seite 38 im Buch) für die Menge $\mathbb{M}(2{,}2,-1{,}2)$.

a) Bestimmen Sie $x_{\min}$, $x_{\max}$ und eps.

b) Skizzieren Sie $\mathrm{fl}(x)$ über den Bereich $[x_{\min}, x_{\max}]$.

c) Skizzieren Sie $|fl(x) - x|$ über den Bereich $[x_{\min}, x_{\max}]$. Markieren Sie auch eps.

d) Skizzieren Sie $\frac{|fl(x)-x|}{|x|}$ über den Bereich $[x_{\min}, x_{\max}]$. Markieren Sie auch eps.