Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

5. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 01.12.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Permutationsmatrizen als Householdermatrizen) [3 Punkte]
Seien $m, n \in \mathbb{N}^{>0}$ gegeben. Seien $1 \leq i < j \leq m$ und sei $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$ die elementare Permutationsmatrix, die durch Linksmultiplikation an eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ die Zeilen i und j der Matrix A tauscht. Zeigen Sie, dass P eine Householdermatrix ist. Geben Sie dafür konkret die Ebene an, an der P spiegelt.

Aufgabe 2: (Lineares Ausgleichsproblem mit Householder) [1+7+1 Punkte]
Die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sollen so gewählt werden, dass die Messwerte

i	1	2	3
x_i	–1	0	1
f_i	5	9	–5

im Sinne kleinster Fehlerquadrate durch die Modellfunktion

$$f(x) = \alpha\Big(\frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{2}x\Big) + \beta\Big(- 8x^2 - 3x + 12\Big)$$

optimal approximiert werden.

a) Stellen Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem auf.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem mit dem Householder-Verfahren.

c) Geben Sie das Residuum des Ausgleichsproblems an.

Aufgabe 3: (Lineares Ausgleichsproblem mit Givens) [5+2 Punkte]
Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 12 & 13 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 2} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung mit Hilfe von Givens-Rotationen. Berechnen Sie Q nicht explizit, sondern wenden Sie die Rotationen in jedem Schritt auch auf b mit an.

b) Bestimmen Sie den Residuumsvektor sowie dessen Norm.

Aufgabe 4: (Stabilität des Ausgleichsproblems) [2+2+3+1 Punkte]
Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min_{x \in \mathbb{R}^n}$.

a) Schreiben Sie ein Program, welches das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der QR-Zerlegung löst. Sie können dafür sowohl die Matrixmultiplikation als auch die 'qr'-Funktion von Matlab benutzen.

b) Schreiben Sie ein Program, welches das lineare Ausgleichsproblem mit Hilfe der Normalgleichungen löst. Sie können dafür sowohl die Matrixmultiplikation als auch den '\'-Operator von Matlab benutzen.

c) Seien nun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & \sigma & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 3}, \qquad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4.$$

Die exakte Lösung des linearen Ausgleichsproblems ist in diesem Fall durch

$$x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{\sigma} \\ \frac{1}{\sigma} \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den relativen Fehler des Lösungsvektors einmal, wenn dieser mittels QR-Zerlegung bestimmt wird und einmal, wenn dieser mit Hilfe der Normalgleichungen bestimmt wird. Wählen Sie hierbei für σ nacheinander die Werte $\sigma = 10^{-2}$, $\sigma = 10^{-3}$ und $\sigma = 10^{-4}$. Der relative Fehler soll jeweils in der 2-Norm gemessen werden.

d) Wie sind die Ergebnisse von Teil c) zu verstehen?

Hinweis: Die Nutzung von Matlab ist empfohlen aber Sie dürfen auch andere Sprachen benutzen. Bibliotheken für Matrixoperationen, Lösungen von Gleichungssystemen und QR-Zerlegungen dürfen Sie auch in diesem Fall benutzen, nicht aber Bibliotheken, die das Ausgleichsproblem direkt lösen.