# Numerisches Rechnen

## Lineare Gleichungssysteme

M. Grepl

J. Berger & R. O'Connor

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
RWTH Aachen

Wintersemester 2015/16

# Vorlesungsinhalt

1. Fehleranalyse: Kondition, Rundungsfehler, Stabilität
   a) $y = f(x)$, Eingabefehler $\Delta x \rightarrow$ Ausgabefehler $\Delta y$
   b) Fehler aufgrund Gleitpunktdarstellung
   c) Fehler (durch Algorithmus) $\approx$ Fehler (durch Kondition)
2. **Lineare Gleichungssysteme, direkte Lösungsverfahren**
   geg.: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$;
   ges.: $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax = b$
3. Lineare Ausgleichsrechnung
   geg.: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$;
   ges.: $x^* \in \mathbb{R}^n$, so dass $x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2$

# Übersicht

Themen: Dahmen & Reusken Kap. 3.1-3.5

- Kondition und Störungssätze
- Zeilenskalierung
- Dreiecksmatrizen
- Gauß-Elimination und LR-Zerlegung

Was Sie mitnehmen sollten:

- Wie ist das Problem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ konditioniert?
- Warum benötige ich Zeilenskalierung und Pivotisierung?
- Wie und weshalb funktioniert die LR-Zerlegung?

# Motivation

- Diskretisierung von Integralgleichungen und gewöhnlichen oder partiellen Differentialgleichungen (z.B. Filtern verrauschter Bilder).
- In der linearen Ausgleichsrechnung entsteht auf natürliche Weise ein lineares Gleichungssystem (*Normalgleichungen*, siehe nächstes Kapitel).
- Zur Lösung eines *nichtlinearen* Gleichungssystems werden oft Linearisierungsverfahren, wie z.B. das Newton-Verfahren, eingesetzt. Bei so einem Verfahren ergibt sich eine Reihe von linearen Gleichungssystemen (siehe übernächstes Kapitel).

Wahl des Lösungsverfahrens hängt vom Problem ab

- dünnbesetztes vs. vollbesetztes Gleichungssystem
- Strukur (Tridiagonal-, Bandmatrizen)

# Problemstellung

Notation: $\mathbb{R}^{m\times n}$ ist die Menge der Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

mit Einträgen $a_{i,j} \in \mathbb{R}$.

## Aufgabe

Zu gegebenem $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ bestimme ein $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, so dass

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}\, x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}\, x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}\, x_1 & + & \cdots & + & a_{n,n}\, x_n & = & b_n \end{array}$$

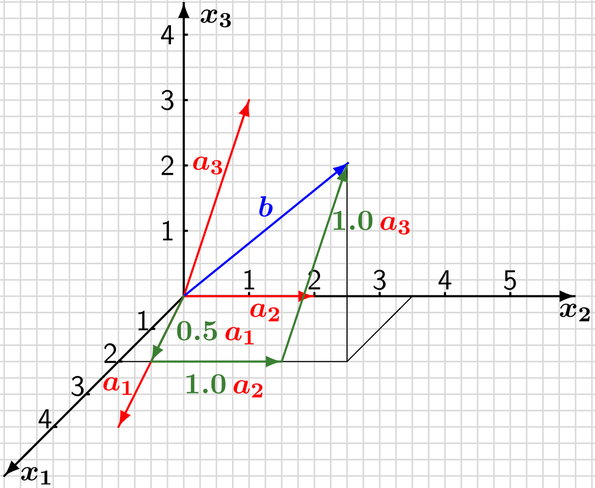
bzw. kurz $Ax = b$ erfüllt.

# Geometrische Interpretation $Ax = b$ $(n = 3)$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3.5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$



# Bemerkung

Folgende Aussagen sind äquivalent für das System $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ mit $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

- Das System hat für jedes $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ eine eindeutige Lösung $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$.
- Die Matrix $\boldsymbol{A}$ hat vollen Rang $n$.
- Das *homogene* System $\boldsymbol{Ax} = \mathbf{0}$ hat nur die triviale Lösung $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.
- Es gilt $\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

$\boldsymbol{A}$ heißt *regulär* oder *nichtsingulär*, wenn $\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.

**Annahme**: Wir nehmen bei der Lösung linearer Gleichungssysteme stets an, dass $\det \boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$ gilt.

# Störung in der rechten Seite $\boldsymbol{b}$

## Satz 3.7

Sie $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}$ die Lösung von $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\Delta x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{\Delta b}$. Dann gilt:

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \underbrace{\|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|}_{\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A})} \; \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

wobei

$$\boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

die (relative) Konditionszahl der Matrix $\boldsymbol{A}$ (bzgl. der Norm $\|\cdot\|$) ist.

Der relative Fehler der Lösung läßt sich durch das Vielfache

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{\kappa}_{\|\cdot\|}(\boldsymbol{A}) \equiv \|\boldsymbol{A}^{-1}\| \; \|\boldsymbol{A}\|$$

des relativen Fehlers der rechten Seite (Eingabedaten) abschätzen.

# Störung in $A$ und $b$

## Satz 3.9

Sie $x + \Delta x$ die Lösung von

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

Falls $\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} < 1$ gilt, folgt für den relativen Fehler

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right).$$

**Beachte**: Falls

$$\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} = \|A^{-1}\|\|\Delta A\| \ll 1,$$

beschreibt die Konditionszahl $\kappa(A)$ auch maßgeblich die Störungen in den übrigen Eingabedaten.

N3.1

# Beispiel 3.11

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1.001 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1.999 \\ 4.003 \end{pmatrix},$$

sowie die gestörten Daten

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 1.997 \end{pmatrix}, \text{ und } \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2.002 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Schätzen Sie den relativen Fehler in der Lösung ab.

**1. Schritt:** Berechne Konditionszahl von $A$

$$A^{-1} = \frac{-1}{0.015} \begin{pmatrix} 1.997 & -1.001 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

und damit erhalten wir

$$\|A^{-1}\|_\infty = 600, \ \|A\|_\infty = 7.997 \ \Rightarrow \ \kappa_\infty(A) = 4798.2.$$

# Beispiel 3.11

**2. Schritt:** Abschätzen der Störungen

$$\boldsymbol{\Delta A = \tilde{A} - A = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta A\|_\infty = 0.001,}$$

$$\boldsymbol{\Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix} 0.003 \\ -0.003 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\Delta b\|_\infty = 0.003.}$$

**3. Schritt:** Aus Satz 3.9 ergibt sich somit als Schranke für den relativen Fehler der Lösung $\boldsymbol{\tilde{x}}$ von $\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}}$.

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \leq 10.49.}$$

Mit exakter Lösung $\boldsymbol{x = (1, -1)^T}$ von $\boldsymbol{Ax = b}$ und gestörter Lösung $\boldsymbol{\tilde{x} = (0.2229, 1.3333)^T}$ von $\boldsymbol{\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}}$ ergibt sich der tatsächliche relative Fehler

$$\boldsymbol{\frac{\|\Delta x\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 2.333}.$$

# Bemerkung 3.10

In einer Maschine mit Maschinengenauigkeit $\mathbf{eps}$ seien die Daten $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{b}$ mit relativen Fehlern $\leq \mathbf{eps}$ behaftet, d.h.

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta A}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \leq \mathbf{eps} \quad \text{und} \quad \frac{\|\boldsymbol{\Delta b}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \mathbf{eps}.$$

Nach Satz 3.9 ist wegen der Kondition des Problems $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b}) \to \boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ der unvermeidliche Fehler in der Lösung $\boldsymbol{x}$ gegeben durch

$$\frac{\|\boldsymbol{\Delta x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} = \mathcal{O}(\kappa(A)\,\mathbf{eps}).$$

N3.2

# Residuum als Maß für Genauigkeit

Gegeben:
- Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$
- Näherungslösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$.

**Definition**

Das Residuum $\tilde{\boldsymbol{r}}$ is definiert als

$$\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}.$$

Beachte:
- Residuum ist ohne Kenntnis der Lösung $\boldsymbol{x}$ berechenbar
- $\tilde{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \tilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

**Frage**: Wie aussagekräftig ist die Größe des Residuums in Bezug auf den tatsächlichen Fehler?

Für die Norm des Residuums im Vergleich zu der des Fehlers gilt:

$$\kappa(\boldsymbol{A})^{-1}\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|} \leq \frac{\|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \leq \kappa(\boldsymbol{A})\frac{\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}$$

$\Rightarrow$ hängt wieder von der Kondition ab.

# Beispiel 3.12

Sei $\boldsymbol{b} = (\mathbf{3}, \mathbf{6})^T$ und $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1.001} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1.997} \end{pmatrix}$ $(\boldsymbol{\kappa_\infty(A) = 4798.2})$.
Exakte Lösung: $\boldsymbol{x} = (\mathbf{1}, \mathbf{0})^T$.

Für die Annäherungen

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0.99684} \\ \mathbf{0.00949} \end{pmatrix}, \qquad \hat{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1.000045} \\ \mathbf{0.000089} \end{pmatrix},$$

gilt

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \mathbf{1.95} \times \mathbf{10^{-5}},$$
$$\|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty = \|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}\|_\infty = \mathbf{4.48} \times \mathbf{10^{-4}}.$$

Die Norm des Residuums für $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist also viel kleiner als für $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{r}}\|_\infty \ll \|\hat{\boldsymbol{r}}\|_\infty.$$

Der Fehler in $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist aber viel größer als in $\hat{\boldsymbol{x}}$:

$$\|\tilde{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{9.49} \times \mathbf{10^{-3}} \gg \|\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\|_\infty = \mathbf{8.90} \times \mathbf{10^{-5}}.$$

# Zeilenskalierung

## Motivation

Kondition einer Matrix ist verantwortlich für die Fehlerverstärkung
$\Rightarrow$ wesentlicher Faktor in der Lösung linearer Gleichungssysteme.

**Frage**: Kann man die Kondition einer Matrix verbessern?

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung (Zeilenäquilibrierung), d.h. Multiplikation der $i$-ten Zeile der Matrix mit einer Zahl $d_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$.

Forme das Gleichungssystem $Ax = b$ in ein äquivalentes Systems

$$\begin{aligned} \underbrace{D_z A}\, x &= \underbrace{D_z b} \\ A_{\text{neu}} x &= b_{\text{neu}} \end{aligned}$$

um, wobei $D_z$ die Diagonalmatrix $D_z = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ bezeichnet.

**Ziel**: Wähle $D_z$ so, dass die Kondition der Matrix (wesentlich) verbessert wird.

# Zeilenskalierung

Sei $D_z$ die Diagonalmatrix mit Diagonaleinträgen definiert durch

$$d_i = \left( \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)^{-1}$$

Für die skalierte Matrix gilt

$$\sum_{j=1}^{n} |(D_z\, A)_{i,j}| = 1 \quad \text{für alle } i,$$

also sind die Betragssummen aller Zeilen gleich eins. Eine Matrix mit dieser Eigenschaft heißt zeilenweise äquilibriert.

Die Skalierung mit $D_z$ hat folgende

**Optimalitätseigenschaft**

$\kappa_\infty(D_z A) \leq \kappa_\infty(DA)$ für jede reguläre Diagonalmatrix $D$.

$\Rightarrow$ Zeilenskalierung mit $D_z$ liefert die minimale Konditionszahl bezüglich der Maximumnorm.

N3.3

# Beispiel 3.14

Für

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 8 & 10000 \\ 50 & -60 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{1,j}|} \quad 10008 \\ \xrightarrow{\sum_{j=1}^{2} |a_{2,j}|} \quad 110 \end{array}$$

erhält man $\kappa_\infty(A) = 201.2$.

Mit der Diagonalmatrix

$$D_z = \begin{pmatrix} \frac{1}{10008} & 0 \\ 0 & \frac{1}{110} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$D_z A = \begin{pmatrix} 0.799 \times 10^{-3} & 0.999 \\ 0.455 & -0.545 \end{pmatrix}$$

und damit $\kappa_\infty(D_z A) = 3.40$.

# Rechenaufwand

Gegeben seien Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Wie hoch ist der Rechenaufwand zur Bestimmung von

- Skalarprodukt $x^T y$: $2n - 1$ $\mathcal{O}(n)$
- Dyadisches Produkt $x\, y^T$: $n^2$ $\mathcal{O}(n^2)$
- Matrix-Vektor Produkt $A\,x$: $2n^2 - n$ $\mathcal{O}(n^2)$
- Matrix-Matrix Produkt $A\,B$: $2n^3 - n^2$ $\mathcal{O}(n^3)$

## Beachte

Bei der Zählung der Rechenoperationen in einem Algorithmus werden

- (traditionsgemäß) nur Multiplikationen und Divisionen, und
- nur Terme höchster Ordnung gezählt.

# Beispiel 3.16

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, wobei

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die spezielle Struktur von $\boldsymbol{R}$ (obere Dreiecksmatrix) erlaubt eine einfache Lösung:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4/2 = 2 \\ x_2 &= 1 - 3 \cdot 2 = -5 \\ x_1 &= \tfrac{1}{3}(0 - (-1)(-5) - 2 \cdot 2) = -3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Rückwärtseinsetzen

# Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

## Definition

Eine Martix $\boldsymbol{R} = (r_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *obere Dreiecksmatrix*, falls

$$r_{i,j} = 0 \text{ für } i > j$$

gilt.

Allgemeiner Fall:

$$\begin{array}{ccccccccc}
r_{1,1}\,x_1 & + & r_{1,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{1,n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & r_{2,2}\,x_2 & + & \cdots & + & r_{2,n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & r_{n-1,n-1}\,x_{n-1} & + & r_{n-1,n}\,x_n & = & b_{n-1} \\
 & & & & & & r_{n,n},\,x_n & = & b_n.
\end{array}$$

# Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

## Lösbarkeit

Da

$$\det R = r_{1,1} r_{2,2} \dots r_{n,n},$$

ist $Rx = b$ genau dann stets eindeutig lösbar, wenn alle Diagonaleinträge $r_{j,j}$, $j = 1, \dots, n$, von Null verschieden sind.

Vorgehen:

- Beginnend bei der letzten Gleichung

$$x_n = b_n / r_{n,n}.$$

- Einsetzen von $x_n$ in die zweitletzte Gleichung

$$x_{n-1} = (b_{n-1} - r_{n-1,n} x_n) / r_{n-1,n-1}.$$

- ...

# Dreiecksmatrizen, Rückwärtseinsetzen

## Rückwärtseinsetzen

Für $j = n, n-1, \ldots, 2, 1$ berechne

$$x_j = \left( b_j - \sum_{k=j+1}^{n} r_{j,k} x_k \right) \Big/ r_{j,j},$$

wobei die Summe für $j = n$ leer ist und als Null interpretiert wird.

Analog: untere Dreiecksmatrix $L$

- $L = (l_{i,j})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $l_{i,j} = 0$ für $i < j$
- Eindeutig lösbar, wenn $l_{j,j}$, $j = 1, \ldots, n$, von Null verschieden
- Vorwärtseinsetzen

D:MV

# Rechenaufwand

Für jedes $j = n-1, \ldots, 1$:

$n - j$ Multiplikationen / Additionen,
eine Division,
und für $j = n$ eine Division. Also insgesamt

- $\displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) = \frac{n(n-1)}{2}$ Additionen / Multiplikationen,
- $n$ Divisionen.

**Rechenaufwand für Rückwärtseinsetzen**

ca. $\frac{1}{2}n^2$ Operationen

Operation = Multiplikation oder Division.

# Eigenschaften 3.18

- Das Produkt von oberen (unteren) Dreiecksmatrizen ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Inverse einer oberen (unteren) nichtsingulären Dreiecksmatrix ist wieder eine obere (untere) Dreiecksmatrix.
- Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gerade das Produkt aller Diagonaleinträge.
- Die Eigenwerte einer Dreiecksmatrix sind gerade die Diagonaleinträge.

# Matrix-Zerlegung

## Aufgabe

Gegeben sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^{n}$, bestimme $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^{n}$ so dass

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

**Vorgehensweise**: Bestimme eine Faktorisierung (Zerlegung) von $\boldsymbol{A}$, so dass das Gleichungssystem “leichter” lösbar ist.

**Verfahren:**

- LR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{L}$ untere Dreiecksmatrix, $\boldsymbol{R}$ obere Dreiecksmatrix
- Cholesky-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}}$, wobei $\boldsymbol{D}$ Diagonalmatrix
- QR-Zerlegung: $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\,\boldsymbol{R}$, wobei $\boldsymbol{Q}$ orthogonale Matrix

# Gauß-Elimination

Die bekannteste Methode, das System

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \qquad (\det \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0})$$

auf Dreieckgestalt zu bringen, ist die *Gauß-Elimination*.

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{(1)}$$

$$\left|\begin{array}{ccccc} \circledast & * & \cdots & \cdots & * \\ * & * & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ * & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{c|cccc} * & * & \cdots & \cdots & * \\ \hline 0 & \circledast & \cdots & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(2)} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & * & \cdots & \cdots & * \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|ccc} * & * & * & \cdots & * \\ 0 & * & * & \cdots & * \\ \hline 0 & 0 & \circledast & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \tilde{A}^{(3)} & \vdots \\ 0 & 0 & * & \cdots & * \end{array}\right|$$

- Einträge der Matrix $\boldsymbol{A}^{(k)}$ werden mit $\boldsymbol{a}_{i,j}^{(k)}$ notiert.
- Eintrag $\boldsymbol{a}_{k,k}^{(k)}$ ($\circledast$ oben) heißt *Pivotelement*.
- In entsprechender Weise ist auch die rechte Seite $\boldsymbol{b}$ umzuformen.

# Beispiel 3.19.

Löse das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ax = b}$, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-8} \\ \mathbf{-16} \\ \mathbf{-12} \end{pmatrix}$$

mit Hilfe der Gauß-Elimiation.

Wir benutzen die folgende Notation

$$\rightarrow \; (\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{b}) = \left( \begin{array}{cccc|c} \mathbf{2} & \mathbf{-1} & \mathbf{-3} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{-8} \\ \mathbf{6} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{6} & \mathbf{-16} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} & \mathbf{-12} \end{array} \right)$$

# Beispiel 3.19.

Gauß-Elimination:

- 1. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,1} \times$ Zeile $1$) von Zeile $i$

$$j = 1$$

$$\begin{array}{r} \rightarrow \\ \ell_{2,1} = \frac{4}{2} \\ \ell_{3,1} = \frac{6}{2} \\ \ell_{4,1} = \frac{-2}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & 1 & 4 & -11 \end{array}\right)$$

- 2. Schritt: subtrahiere ($\ell_{i,2} \times$ Zeile $2$) von Zeile $i$

$$\begin{array}{r} j = 2 \\ \rightarrow \\ \ell_{3,2} = \frac{4}{2} \\ \ell_{4,2} = \frac{-6}{2} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 10 & -11 & -41 \end{array}\right)$$

# Beispiel 3.19.

- 3. Schritt: subtrahiere $(\ell_{i,3} \times$ Zeile $3)$ von Zeile $i$

$$\begin{array}{c} j = 3 \\ \rightarrow \\ \ell_{4,3} = \frac{10}{2} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -46 & -46 \end{array}\right) = (R \,|\, c)$$

Wegen

$$Ax = b \Leftrightarrow Rx = c$$

liefert Rückwärtseinsetzen die Lösung

$$x = \left(-\tfrac{9}{2}, \quad 2, -3, \quad 1\right)^T.$$

## Gauß-Elimination ohne Pivotisierung

- Bestimme $(A \,|\, b) \rightarrow (R \,|\, c)$
- Löse $R\,x = c$

# Beispiel 3.22.

Für die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 4 & 0 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R},$$

wobei

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -46 \end{pmatrix}$$

die bei der Gauß-Elimination berechneten Dreiecksmatrizen sind.

N3.4 B3.1

# Zusammenfassung

Ein bemerkenswertes “Nebenprodukt” der Gauß-Elimination ist also eine *Faktorisierung* von $\boldsymbol{A}$ in ein Produkt einer normierten unteren Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$ und oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$.

**Satz 3.21.**

Sind im Gauß-Algorithmus stets alle Pivotelemente ungleich null, dann erhält man

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{R},$$

wobei $\boldsymbol{R}$ eine obere Dreiecksmatrix und $\boldsymbol{L}$ eine normierte untere Dreiecksmatrix ist.

N3.5 D:ML

**Frage:**

- Was passiert, wenn das Pivotelement identisch null ist?
- Was passiert, wenn das Pivotelement “sehr klein” ist? B3.2

# Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Ein verschwindendes Pivotelement bedeutet nicht, dass das lineare Gleichungssystem keine Lösung besitzt.
- Bei verschwindendem Pivotelement ist das Vertauschen von Zeilen notwendig.
- Selbst wenn das Pivotelement ungleich null, ist eine Vertauschung von Zeilen angebracht, um die Stabilität der Gauß-Elimination (bzw. LR-Zerlegung) zu verbessern.
- Als Pivotelement wählt man das *betragsgrößte* Element der jeweiligen Spalte.
- Da man das $j$-te Pivotelement in der $j$-ten Spalte sucht, nennt man diesen Vertauschungsvorgang *Spaltenpivotisierung*. Die Matrix sollte zuvor äquilibriert werden.

# Beispiel 3.23.

Löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0.00031 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Mit $l_{2,1} = 1/0.00031$ ergibt die Gauß-Elimination

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & 1 - \frac{1}{0.00031} & -7 - \frac{-3}{0.00031} \end{array}\right),$$

und bei 4-stelliger Rechnung schließlich

$$(R\,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 0.00031 & 1 & -3 \\ 0 & -3225 & 9670 \end{array}\right).$$

Rückwärtseinsetzen liefert dann ...

# Beispiel 3.23.

$$\tilde{x}_1 \approx -6.452, \quad \tilde{x}_2 \approx -2.998.$$

Exakte Rechnung ergibt sich allerdings

$$x_1 = -4.00124\ldots, \quad x_2 = -2.998759\ldots,$$

d.h., $\tilde{x}_1$ ist auf keiner Stelle korrekt.

Dieses Ergebnis ist *unakzeptabel*, weil die Kondition des Problems sehr gut ist: $\kappa_\infty(A) = 4.00$.

Nach Spaltenpivotisierung mit 4-stelliger Rechnung erhält man

$$(R \,|c) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0.9997 & -2.998 \end{array}\right)$$

und damit

$$x_1 \approx -4.001, \quad x_2 \approx -2.999,$$

also völlig akzeptable Werte.

# Spaltenpivotisierung

**Ziel**: Vertauschen der Zeilen in Matrix $A$ wärend LR-Zerlegung.

**Fragen**

1. Möglich durch Matrix-Matrix-Multiplikation (vgl. Elimination)?
2. Auswirkung auf die LR-Zerlegung?

1. **Permutationsmatrix:** Die Permutationsmatrix

$$P_\pi : (e^{\pi(1)}\ e^{\pi(2)} \ldots e^{\pi(n)})^T.$$

entsteht aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen der Zeilen gemäß der Permutation $\pi \in S_n$, wobei

- $e^i$ den $i$-ten Basisvektor bezeichnet, und
- $S_n$ die Permutationen auf der Menge $\{1, \ldots, n\}$ bezeichnet.

**Beispiel**: $\pi : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ mit $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 2$ (oder $\pi = (3, 1, 2)$) ist eine Permutation in $S_3$.

# Permutationsmatrix

Wir bezeichnen mit $P_{i,k}$ die Permutationsmatrix, die durch Vertauschen der $i$-ten und $k$-ten Zeile der Einheitsmatrix $I$ entsteht.

**Beispiel**: für $n = 4$, $i = 2$, $k = 4$ erhält man

$$P_{2,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gelten die folgenden Resultate

$$\det P_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k, \\ -1 & \text{für } i \neq k, \end{cases}$$

und

$$P_{i,k}^{-1} = P_{i,k}^T.$$

# Permutationsmatrix: Beispiel

Berechne die folgenden Matrix-Produkte für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$P_{2,3}\,A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Zeile}$$

$$A\,P_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 1 \\ b & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der 2. und 3. Spalte}$$

$$P_{2,3}\,A\,P_{2,3}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vertauschen der Einträge } a \text{ und } b$$

# LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung

Gauß-Elimination *mit* Spaltenpivotisierung ist für *jede* nichtsinguläre Matrix durchfürbar und es gilt folgende Verallgemeinung von Satz 3.21.

**Satz 3.25.**

Zu jeder nichtsingulären Matrix $\boldsymbol{A}$ existiert eine Permutationsmatrix $\boldsymbol{P}$, eine (dazu) eindeutige untere normierte Dreiecksmatrix $\boldsymbol{L}$, deren Einträge sämtlich betragsmäßig durch eins beschränkt sind, und eine eindeutige obere Dreiecksmatrix $\boldsymbol{R}$, so dass

$$\boldsymbol{PA} = \boldsymbol{LR}.$$

Die Matrizen $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{L}$ und $\boldsymbol{R}$ ergeben sich aus der Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung.

N3.6

# Durchführung der LR-Zerlegung

## Skalierung und Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung

- Bestimme die Diagonalmatrix

$$\boldsymbol{D} = \mathbf{diag}(d_1, \ldots, d_n),$$

so dass $\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{A}$ zeilenweise äquilibriert ist, d.h.

$$d_i = \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\right)^{-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

- Wende Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung auf $\boldsymbol{D}\,\boldsymbol{A}$ an. Im $j$-ten Schritt der Gauß-Elimination wählt man diejenige Zeile als Pivotzeile, die das betragsmäßig größte Element in der ersten Spalte der $(n+1-j) \times (n+1-j)$ rechten unteren Restmatrix hat. Falls diese Pivotzeile und die $j$-te Zeile verschieden sind, werden sie vertauscht.

# Aufwand

- Zeilensummenberechnung: $n(n-1)$ Additionen;
- Berechnung der Skalierung: $n$ Divisionen;
- Für $j = 1, 2, \ldots, n-1$
  - Berechnung der neuen Einträge in $L$: $(n-j)$ Divisionen;
  - Berechnung der neuen Einträge in $R$: $(n-j)^2$ Multiplik./Additionen

Dominierender Aufwand: $\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)^2 = \sum_{j=1}^{n-1} j^2 \sim n^3/3.$

**Rechenaufwand 3.29**

LR-Zerlegung über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung kostet ca.

$$\frac{1}{3}n^3 \text{ Operationen.}$$

Die Skalierung (falls nötig) kostet nur $\mathcal{O}(n^2)$ Operationen.

# Beispiel 3.30

D:ML D:SC

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung:

1. Schritt:

$$DA \xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|ccc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \hline \end{array}$$

2. Schritt:

$$\xrightarrow{\textit{Vertauschung}} \begin{array}{|c|cc|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline \end{array} \xrightarrow{\textit{Elimination}} \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \hline -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ \cline{2-3} -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \hline \end{array}$$

Ergebnis: $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} & 1 \end{pmatrix}$, und $\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

Man rechnet einfach nach, dass

$$\boldsymbol{LR} = \boldsymbol{PDA}$$

gilt, wobei

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $\boldsymbol{P}$ ist das Produkt von $\boldsymbol{P}_{2,3}$ und $\boldsymbol{P}_{1,3}$. N3.7

**Merke**

- Skalierung/Äquilibrierung verbessert die *Kondition* des Problems.
- Pivotisierung verbessert die *Stabilität* der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.

# Anwendungen der LR-Zerlegung

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix, die schon zeilenweise äquilibriert ist. Sei für diese Matrix die LR-Zerlegung $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ bekannt.

## 1. Lösen eines Gleichungssystems

Die Lösung von

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ergibt sich über die Lösung zweier Dreieckssysteme

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{L}\,\underbrace{\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x}}_{=\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$$

1. Bestimme $\boldsymbol{y}$ durch Vorwärtseinsetzen aus $\boldsymbol{L}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{P}\,\boldsymbol{b}$.
2. Berechne $\boldsymbol{x}$ aus $\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ durch Rückwärtseinsetzen.

# Anwendungen der LR-Zerlegung

## 2. Mehrere rechte Seiten

Gesucht seien die Lösungen $\boldsymbol{x^k}$ des linearen Gleichungssystems

$$\boldsymbol{A\,x^k = b^k, \quad k = 1, \dots, K,}$$

wobei $\boldsymbol{A}$ eine konstante Matrix ist und $\boldsymbol{b^k,\ k = 1, \dots, K,}$ verschiedene rechte Seiten sind (Bsp. Zeitdiskretisierung).

**Vorgehen**

- Bestimme (einmalig) LR-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$, d.h.

$$\boldsymbol{P\,A = L\,R}$$

- Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen für jede rechte Seite

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L\,y^k} &= \boldsymbol{P\,b^k} \\ \boldsymbol{R\,x^k} &= \boldsymbol{y^k} \end{aligned}$$

**Aufwand**: $\boldsymbol{\frac{1}{3}n^3 + K n^2}$ (vs. $\boldsymbol{K\frac{1}{3}n^3}$ ohne LR-Zerlegung)

# Anwendungen der LR-Zerlegung

## 3. Berechnung der Inversen

Sei $x^i \in \mathbb{R}^n$ die $i$-te Spalte der Inversen von $A$:

$$A^{-1} = (x^1 \; x^2 \; \dots \; x^n).$$

Aus $AA^{-1} = I$ folgt

$$A\,x^i = e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Zur Berechnung der Inversen bietet sich folgende Strategie an:

- Bestimme die LR-Zerlegung $P\,A = L\,R$ über Gauß-Elimination mit Spaltenpivotisierung,
- Löse die Gleichungssysteme

$$L\,R\,x^i = P\,e^i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Gesamtaufwand: etwa $\frac{4}{3}n^3$ Operationen.

# Anwendungen der LR-Zerlegung

## 4. Berechnung von Determinanten

Aus $\boldsymbol{P}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}$ folgt

$$\det \boldsymbol{P}\ \det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{L}\ \det \boldsymbol{R} = \det \boldsymbol{R}.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{P} &= \det \boldsymbol{P}_{n,r_n} \dots \det \boldsymbol{P}_{n-1,r_{n-1}} \\ &= (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}}, \end{aligned}$$

folgt

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{\#\text{Zeilenvertauschungen}} \prod_{j=1}^{n} r_{j,j}.$$

# Anwendungen der LR-Zerlegung

## 5. Nachiteration

- Rechnerarithmetik: statt $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{R}$ erhält man Näherungen $\tilde{\boldsymbol{L}}$, $\tilde{\boldsymbol{R}}$.
- Lösung $\tilde{\boldsymbol{x}}$ ist daher nicht exakte Lösung von $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}\,\boldsymbol{R}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$.
- **Ziel der Nachiteration**: Näherung *iterativ* verbesern
- Zur Erinnerung: Sei $\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} := \tilde{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{0}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$. Der Fehler $\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{0}} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{\mathbf{0}}$ ist gerade die Lösung des *Defektsystems*
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{\mathbf{0}} = \boldsymbol{r}^{\mathbf{0}}.$$
- Verfahren:

Für $\boldsymbol{k} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \ldots,$ gegeben $\boldsymbol{r}^{\mathbf{0}}$, berechne:

$$\tilde{\boldsymbol{L}}\,\boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}},\ \tilde{\boldsymbol{R}}\,\boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{k}};$$
$$\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} := \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{\delta}^{\boldsymbol{k}};$$
$$\boldsymbol{r}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}} := \boldsymbol{b} - \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}+\mathbf{1}};$$

# Zusammenfassung

- Die Kondition des Problems $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ wird im wesentlichen durch die Konditinszahl $\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{A})$ der Matrix $\boldsymbol{A}$ beschrieben.
- Dreiecksmatrizen ergeben leicht lösbare Systeme: Aufwand ca. $\frac{1}{2}\boldsymbol{n}^2$ Operationen.
- Zeilenskalierung vs. Pivotisierung
  - Skalierung/Äquilibrierung verbessert die *Kondition* des Problems.
  - Pivotisierung verbessert die *Stabilität* der Gauß-Elimination/ LR-Zerlegung.
- LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung N3.8