Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

1. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 03.11.2015, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Mehrdimensionale Ableitung) [4]
Bestimmen Sie für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ die Jacobi-Matrix der Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto \|Ax - b\|_2^2.$$

Berechnen Sie dazu zunächst die Jacobi-Matrizen der Abbildungen

$$g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|_2^2 \quad \text{und} \quad h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Ax - b$$

und verwenden Sie anschließend die Kettenregel.

Aufgabe 2: (Taylor-Entwicklung) [5]
Entwickeln Sie die folgende Funktion in ein Taylor-Polynom 2. Ordnung um den Punkt $(x, y) = (1, \pi)$:

$$g(x, y) = x^2 \sin(\frac{xy}{2})$$

Aufgabe 3: (Normen) [4+4]

a) Beweisen Sie für $x \in \mathbb{R}^n$ die Ungleichungen

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_\infty$$

und finden Sie Vektoren x^* und x^{**}, für welche die Gleichheit in der linken bzw. rechten Ungleichung gilt.

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Zeigen Sie: Für die durch die $\|\cdot\|_\infty$-Vektornorm induzierte Matrixnorm gilt folgende Charakterisierung

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|.$$

Aufgabe 4: (Kondition) [3+4+2]

a) Bestimmen Sie die relative Kondition $\kappa_{rel}(x)$ der Funktion

$$f(x) = \frac{\sin(x) - 1}{\cos(x)}.$$

Ist die Funktion $f(x)$ in dem Intervall $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$ gut oder schlecht konditioniert? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechnen Sie die Konditionszahl von A bzgl. $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$. Berechnen Sie außerdem noch $\|A\|_2$.

c) Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar. Zeigen Sie, dass $\kappa_1(A) = \kappa_\infty(A)$.