N3.9

## LR-Zerlegung für symmetrische Matrizen

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ s.p.d, dann existiert die LR-Zerlegung

$$A = LR$$

Da $R$ regulär ist, können wir schreiben

$$R = D\tilde{R} \quad \Rightarrow \quad \tilde{R} = D^{-1} R$$

wobei $D = \mathrm{diag}(r_{11}, r_{22}, \dots, r_{nn})$ und $\tilde{R}$ ist eine normierte obere Dreiecksmatrix.

Aus $A = A^T$ folgt

$$A = LR = LD\tilde{R} = (LD\tilde{R})^T = \tilde{R}^T D L^T$$

und aufgrund der Eindeutigkeit der LR-Zerlegung somit, daß

$\tilde{R}^T = L \Rightarrow$ [redacted]. $L^T = \tilde{R}$

und schließlich

$$A = LDL^T \qquad \text{(Cholesky-Zerlegung)}$$

N3.10

## Zur Erinnerung

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) ohne Pivotisierung

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{20} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 0 & -10^{20} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{R} = \begin{pmatrix} 10^{-20} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) mit Pivotisierung

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} = \tilde{L}\tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10^{-20} & 1 \end{pmatrix}$$

und $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

# LR-Zerlegung mit Pivotisierung

"Worst-Case Instability" (vgl. Trefethen & Bau)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 & 1 \\ -1 & 1 & & & 1 \\ -1 & -1 & 1 & & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

ergibt

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & 0 & \\ -1 & -1 & 1 & & \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 2 \\ & & 1 & & 4 \\ & & & 1 & 8 \\ & & & & 16 \end{bmatrix}$$

Für $n \times n$ Matrix:

Wachstumsfaktor $\rho = 2^{n-1}$

QR-Zerlegung kann auch für allgemeine rechteckige $(m \times n)$-Matrizen konstruiert werden.

Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bestimme $A = QR$

<u>$m > n$</u>: $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$R = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{R} \\ 0 \end{pmatrix}}_{n} \begin{array}{l} \}\, n \\ \}\, m-n \end{array} \qquad \text{mit } \tilde{R} = \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ & x & \cdots & x \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

<u>$m < n$</u>: $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$

$$R = \Bigg( \underbrace{\tilde{R}}_{m} \quad \underbrace{\begin{matrix} x & \cdots & x \\ \vdots & & \vdots \\ x & \cdots & x \end{matrix}}_{n-m} \Bigg) \Big\}\, m \qquad \text{mit } \tilde{R} = \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \\ & x & \cdots & x \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

N3.13

## QR-Zerlegung

geg.: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

ges.: $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$, so dass

$$A = Q R$$

wobei

Q : orthogonale Matrix

R : obere Dreiecksmatrix

### Im Detail:

$$A = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Spaltenraum: $\operatorname{span}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$

wobei gilt: $\operatorname{span}\{a_1\} \subseteq \operatorname{span}\{a_1, a_2\} \subseteq \dots \subseteq \operatorname{span}\{a_1 \dots a_n\}$

Ziel: Finde orthonormale Vektoren $q_j$, $j = 1 \dots n$, so dass

$$\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_j\} = \operatorname{span}\{q_1, \dots, q_j\} \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

das bedeutet

$$\underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & r_{nn} \end{bmatrix}}_{R}$$

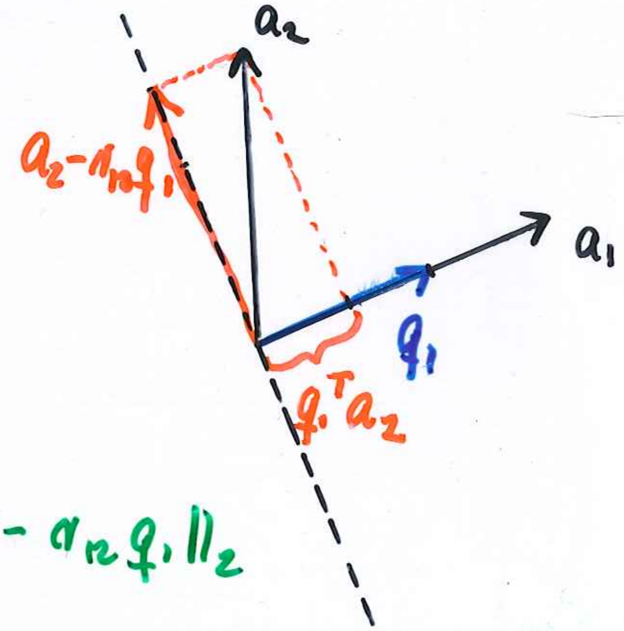
# Orthogonalisierung



Geg.: - $n$ Vektoren $a_i$, $i = 1, \dots, n$

- $a_i \in \mathbb{R}^m$, $m > n$
- linear unabhängig

**Aufgabe**: orthogonalisieren der Vektoren $\Rightarrow q_i$, $i = 1, \dots, n$
mit $\|q_i\| = 1$, $i = 1, \dots, n$




**1. Schritt**: $$q_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|_2} = \frac{a_1}{r_{11}}$$

**2. Schritt**: $$q_2 = \frac{a_2 - r_{12} q_1}{r_{22}}$$

mit $r_{12} = q_1^T a_2$, $r_{22} = \| a_2 - r_{12} q_1 \|_2$

**3. Schritt**: $$q_3 = \frac{a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2}{r_{33}}$$

mit $r_{13} = q_1^T a_3$, $r_{23} = q_2^T a_3$

$r_{33} = \| a_3 - r_{13} q_1 - r_{23} q_2 \|_2$

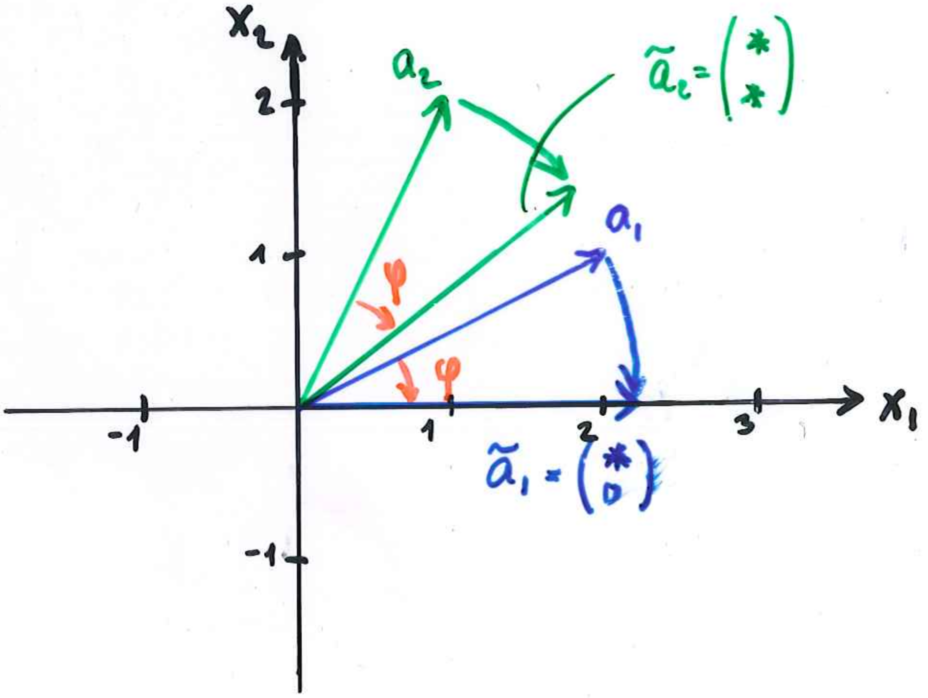
**Zusammenfassend**:

$$\begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ q_1 & q_2 & q_3 & \cdots & q_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & \cdots & r_{1n} \\ & r_{22} & r_{23} & \cdots & r_{2n} \\ & & r_{33} & \cdots & r_{3n} \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & r_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & | & & | \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ | & | & | & & | \end{bmatrix}$$

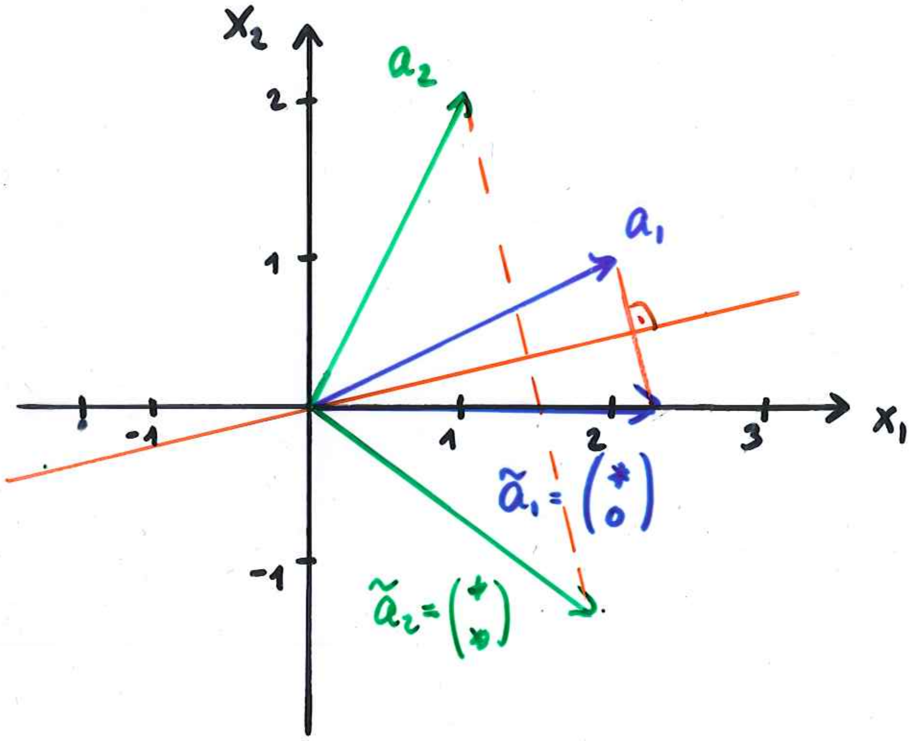
# Berechnung der QR-Zerlegung

$$A = \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \atop \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad R = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

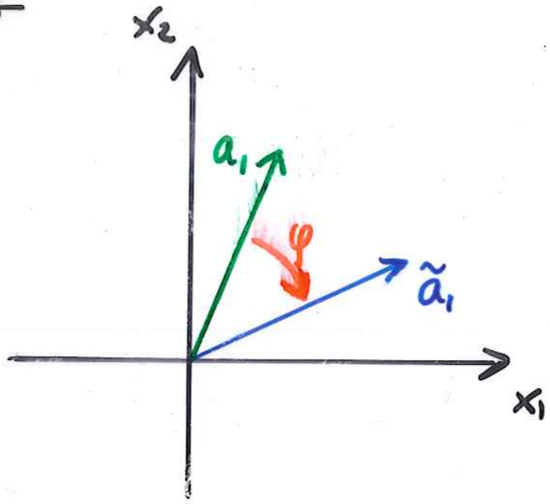
## 1. Möglichkeit




## 2. Möglichkeit



## Drehung




$$Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

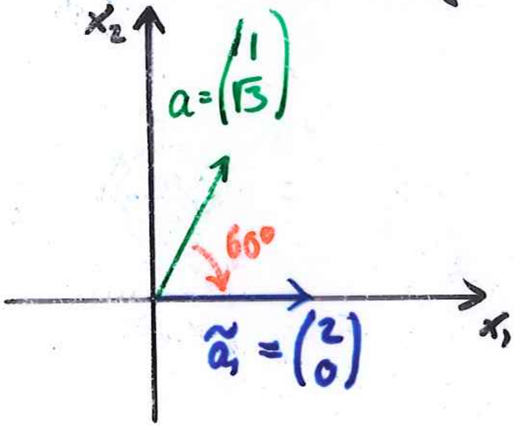
$$\tilde{a}_1 = Q\, a_1$$

$$\Rightarrow \quad Q\, a_1 = \tilde{a}_1 \qquad (\text{vgl. } QA = R)$$

$\Rightarrow$ **Q ist orthogonal**

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

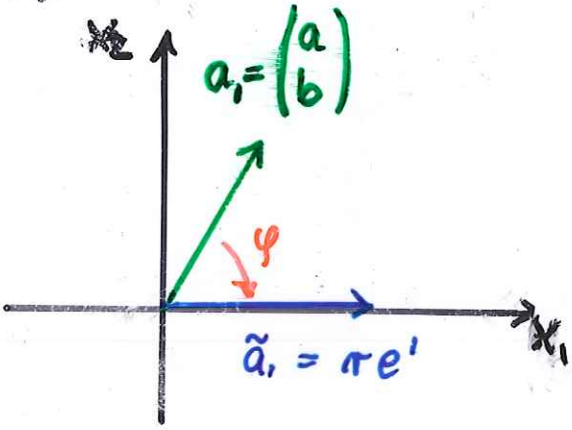
$\tilde{a}_1$ mit Nulleinträgen: $\tilde{a}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} \\ 0 \end{pmatrix}$ ?




$$Q = \begin{pmatrix} \cos 60° & \sin 60° \\ -\sin 60° & \cos 60° \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad \tilde{a}_1 = Q a = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

**Allgemein:**



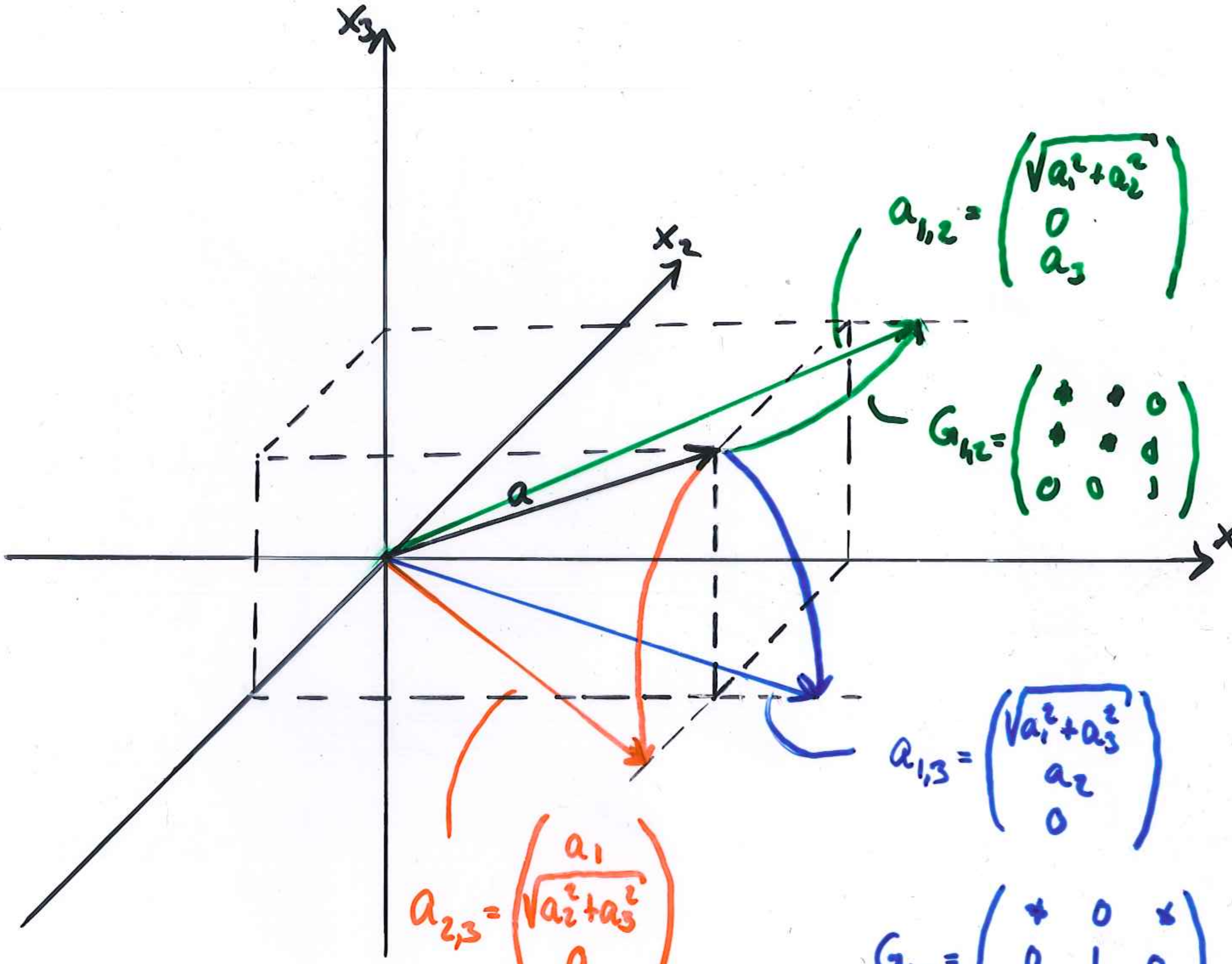

Betrag von $a_1$:

$$r = \|a_1\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} \end{aligned}\right\} \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{a}{r} & \frac{b}{r} \\ -\frac{b}{r} & \frac{a}{r} \end{bmatrix}$$

## Ebene Drehung in $\mathbb{R}^3$: $a = (a_1, a_2, a_3)^T$



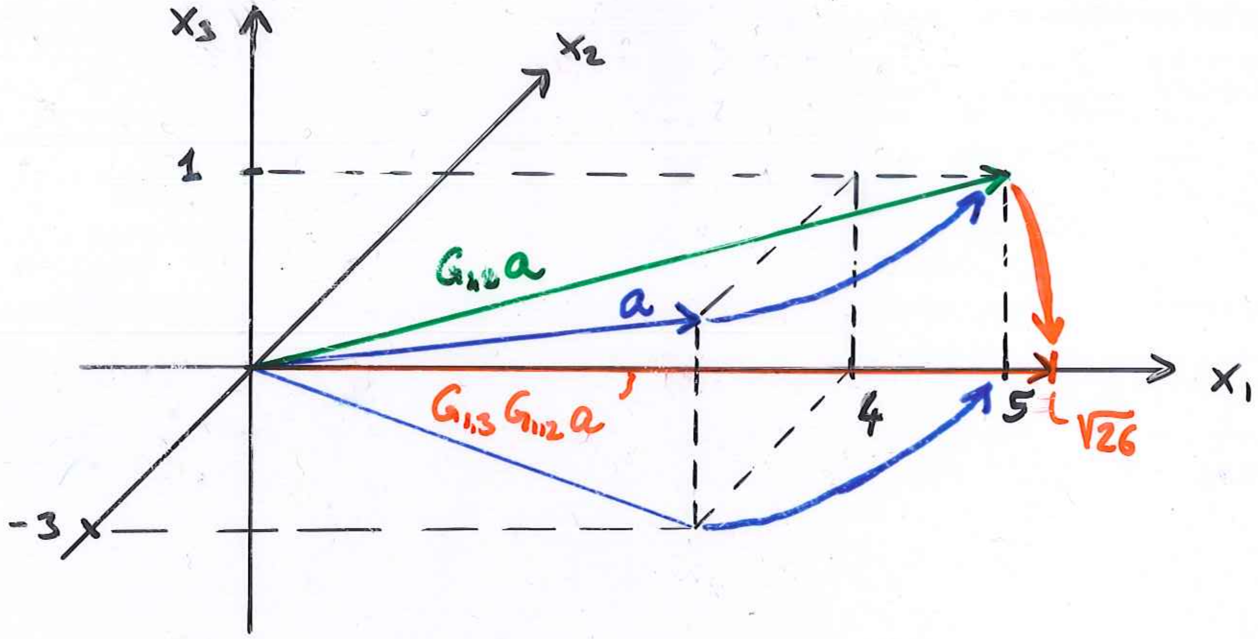

$$a_{1,2} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \\ 0 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad G_{1,2} = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{1,3} = \begin{pmatrix} \sqrt{a_1^2 + a_3^2} \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G_{1,3} = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 \\ * & 0 & * \end{pmatrix}$$

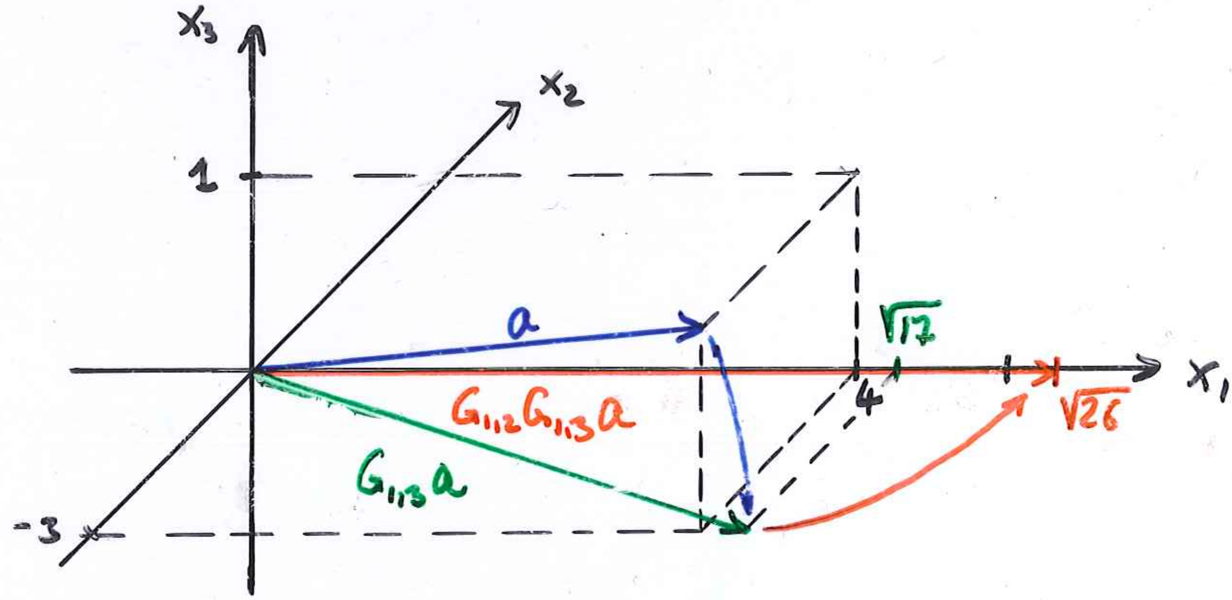
$$a_{2,3} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \sqrt{a_2^2 + a_3^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad G_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

# Beispiel 3.4.3





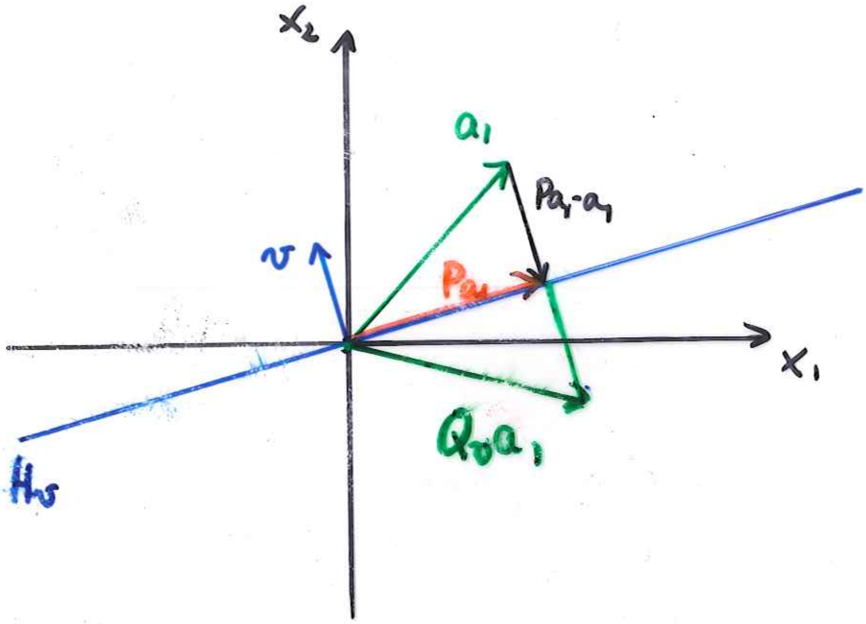

$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow G_{1,2}a = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow G_{1,3}G_{1,2}a = \begin{pmatrix} \sqrt{26} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$




$$a = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow G_{1,3}a = \begin{pmatrix} \sqrt{17} \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow G_{1,2}G_{1,3}a = \begin{pmatrix} \sqrt{26} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

N3.19

# Projektion und Spiegelung




Ebene

$H_v = \{x \in \mathbb{R}^2 \,/\, v^T x = 0\}$

durch den Ursprung

$\Rightarrow$ Normalengleichung

$v_1 x_1 + v_2 x_2 = 0$

## Orthogonale Projektion von $a_1$ auf $H_v$

Geradengleichung : $x = a_1 + \lambda v$

Schnittpunkt mit $H_v$ : $v^T x \overset{!}{=} 0$

$$v^T a_1 + \lambda v^T v = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{v^T a_1}{v^T v}$$

Projektionspunkt:

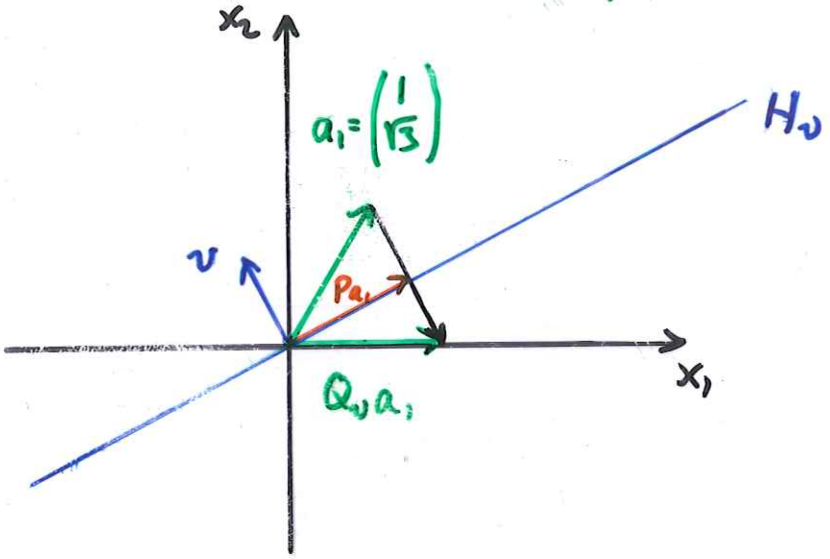
$$Pa_1 = a_1 - \frac{v^T a_1}{v^T v} v = a_1 - \frac{v v^T}{v^T v} a_1 = \underbrace{\left(I - \frac{v v^T}{v^T v}\right)}_{= P} a_1$$

$$\Rightarrow P = I - \frac{v v^T}{v^T v} \quad \text{(Projektor)}$$

## Spiegelung von $a_1$ an $H_v$ : $Q_v a_1$

$$Q_v = I - 2 \frac{v v^T}{v^T v} \quad \text{(Householder-Transformation)}$$

Nulleinträge in $Q_v a_1 \overset{!}{=} \begin{pmatrix} \tilde{a}_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ?




$$Q_v a_1 \overset{!}{=} \|a_1\|_2 e^1$$

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \Rightarrow Q_v = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Q_v a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \|a_1\|_2 e_1$$

Beachte: $Q_v$ ist orthogonal, d.h.

$$Q_v^T Q_v = I$$

Ziel: Bestimme $Q_v$, so dass

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \\ x & x & x \end{bmatrix}}_{A} \xrightarrow{Q_1} \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & x & x \end{bmatrix}}_{Q_1 A} \xrightarrow{Q_2} \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x \end{bmatrix}}_{Q_2 Q_1 A} \xrightarrow{Q_3} \underbrace{\begin{bmatrix} x & x & x \\ 0 & x & x \\ 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{Q_3 Q_2 Q_1 A}$$

und

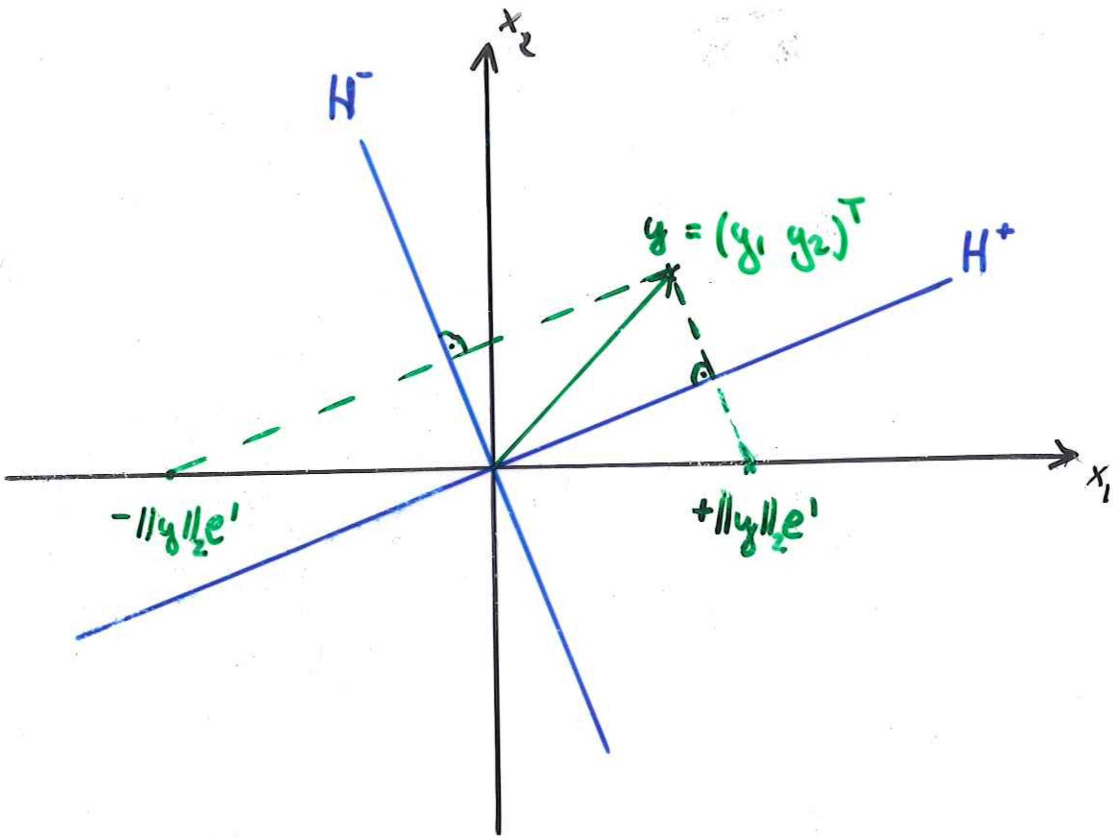
$$Q_k = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_v \end{bmatrix},$$

$I \ldots (k-1) \times (k-1)$ Einheitsmatrix

$Q_v \ldots (m-k+1) \times (m-k+1)$ Householder Transformation

# Householder Grundaufgabe

N3.20




Ziel: $Q_v y = \pm \|y\|_2 e^1 \quad \Rightarrow \quad y - 2\frac{v^T y}{v^T v} v \stackrel{!}{=} \pm \|y\|_2 e^1$

$\Rightarrow v \in \operatorname{span}\{y, e^1\} \quad : \quad v = y + \alpha e^1$

$$\Rightarrow Q_v y = \underbrace{\left(1 - 2\frac{y^T y + \alpha y_1}{y^T y + 2\alpha y_1 + \alpha^2}\right)}_{=0 \;\Rightarrow\; \alpha = \pm \|y\|_2} y - 2\frac{v^T y}{v^T v} \alpha e^1 \stackrel{!}{=} \pm \|y\|_2 e^1$$

$\Rightarrow v = y \pm \|y\|_2 e^1$

Achtung: Auslöschung bei $v = y - \|y\|_2 e^1$ für $y \approx \|y\|_2 e^1$

$\Rightarrow v = y + \operatorname{sign}(y_1) \|y\|_2 e^1$

# QR-Zerlegung : Reduktion auf obere Dreiecksform

$$A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{v^1} = \\ I - 2\frac{(v^1)(v^1)^T}{(v^1)^T v^1} \end{bmatrix} \qquad Q_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{bmatrix} \qquad Q_1 b = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$Q_2 = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \bar{Q}_{v^2} & \\ 0 & & & \end{array}\right] \qquad Q_2Q_1A = \begin{bmatrix} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ 0 & 0 & \times \end{bmatrix} \qquad Q_2Q_1 b = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix}$$

$$Q_3 = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\bar{Q}_{v^3}} \end{array}\right] \qquad Q_3Q_2Q_1A = \left[\begin{array}{ccc} \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & \times \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad Q_3Q_2Q_1 b = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{bmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} b_1 \\ \left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} b_2 \end{array}$$

Bestimmung von Q :

- Wähle $b = e^i$, $i = 1, \ldots, n$, und berechne $Qe^i$
- $Q = [Qe^1 \; Qe^2 \ldots\ldots Qe^n]^T$

N3.22

# Lineare Gleichungssysteme

## Lösungsverfahren - Zusammenfassung

| Verfahren | Zerlegung | Pivotisierung | Stabilität | Kosten | Bemerkung |
|---|---|---|---|---|---|
| LR-Zerlegung | $A = LR$ | nein | instabil | $O(\frac{1}{3}n^3)$ | $\det(A) \neq 0$<br>Pivotelement $\neq 0$ |
| LR-Zerlegung mit Pivotisierung | $PA = LR$ | ja | stabil (in der Praxis) | $O(\frac{1}{3}n^3)$ | $\det(A) \neq 0$ |
| Cholesky | $A = LDL^T$ | nein | stabil | $O(\frac{1}{6}n^3)$ | A s.p.d. |
| QR-Zerlegung | $A = QR$ | nein | | | auch für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ |
| - Givens | | nein | stabil | $O(\frac{4}{3}n^3)$ | - Vorteil wenn A schwach besetzt |
| - Householder | | nein | stabil | $O(\frac{2}{3}n^3)$ | - Spiegelung "$\text{sign}(y_1)$" |

Skalierung: $O(n^2)$

Vorwärts-/Rückwärtseinsetzen: $O(\frac{1}{2}n^2)$