Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

11. Übung

Abgabe: bis **Dienstag**, den 26.01.2016, um 16:00 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude.

Aufgabe 1: (Eigenschaften von Integralen und Quadraturformeln) [8 Punkte]
Es ist leicht nachzuprüfen, dass der durch

$$I(f) = \int_c^d f(x)\,\mathrm{d}x$$

definierte Integraloperator $I : C[c,d] \to \mathbb{R}$ die nachfolgenden Eigenschaften besitzt:

(i) I ist linear, d.h. für $f, g \in C[c,d]$ und beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $I(\alpha f + g) = \alpha I(f) + I(g)$.

(ii) Der Integraloperator ist positiv, d.h. aus $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [c,d]$ folgt $I(f) \geq 0$.

(iii) Die absolute Kondition von I bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$ ist $\kappa_{\text{abs}} = d - c$, d.h. für beliebige $f, \widetilde{f} \in C[c,d]$ gilt die Ungleichung $\left|I(f) - I(\widetilde{f})\right| \leq \kappa_{\text{abs}}\|f - \widetilde{f}\|_\infty = (d-c)\|f - \widetilde{f}\|_\infty$.

Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit für eine Quadraturformel $Q_m : C[c,d] \to \mathbb{R}$ der Form

$$Q_m(f) = (d-c)\sum_{j=0}^{m} c_j f(x_j),$$

wobei die $c_j \in \mathbb{R}$ die Gewichte zu gewissen Stützstellen $c \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leq d$ bezeichnen, ebenfalls (i), (ii) und (iii) gelten? Beweisen Sie Ihre Aussage!

Wichtige Bemerkung: Nicht all Newton-Cotes Formeln haben die Eigenschaft (ii)!

Aufgabe 2: (Summierte Newton-Cotes Regeln) [6+4 Punkte]
Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\cos x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wieviel Schritte (n) braucht man mit der

   (i) summierten Mittelpunktregel,

   (ii) summierten Trapezregel,

   um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Bestimmen Sie mittels der summierten Simpsonregel eine Näherung für I mit einer garantierten Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-2}$.
   Hinweis: Für $f(x) = e^{\cos x}$ gilt $\max_{\xi \in \mathbb{R}} |f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$

Aufgabe 3: (Quadraturformel selbst herleiten) [2+2+2+3+2 Punkte]

Zu gegebenen $h > 0$ sei die Quadraturformel

$$Q_h(f) = 2hf(0) + \alpha h^2 \left(f'(h) - f'(-h)\right)$$

zur näherungsweisen Integration einer Funktion f auf $[-h, h]$ gegeben. Es gilt

$$I(f) = \int_{-h}^{h} f(x)\,\mathrm{d}x = Q_h(f) + E(f),$$

wobei $E(f)$ der Verfahrensfehler ist.

a) Bestimmen Sie das Gewicht α so, dass Q_h alle Polynome vom Grad kleiner gleich zwei exakt integriert.

b) Bis zu welchem Grad können Polynome mit der in Aufgabenteil a) hergeleiteten Formel exakt integriert werden? Beweisen Sie Ihre Aussage!

c) Berechnen Sie mit Hilfe der Quadraturformel Q_h einen Näherungswert für das Integral

$$I := \int_0^1 \exp(x^2)\,dx.$$

d) Sei $t_k = 2hk$ für $k = 0, \ldots, n$ eine Unterteilung des Intervalls $[0, 1]$ in n Teilintervalle der Länge $2h = \frac{1}{n}$. Geben Sie die summierte Quadraturformel $Q_{n,h}$ an, bei der auf jedem Teilintervall $[t_k, t_{k+1}]$ die Quadraturformel Q_h verwendet wird.

e) Der Verfahrensfehler $E(f)$ von $Q_h(f)$ ist durch $E(f) = -\frac{7}{180} f^{(4)}(\xi)h^5$ gegeben, für ein $\xi \in [-h, h]$. Zeigen Sie folgende Abschätzung für den Fehler der summierten Regel:

$$\left| Q_{n,h}(f) - \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{7}{360} h^4 \max_{x\in[0,1]} \left| f^{(4)}(x) \right|.$$