Rheinisch Westfälische Technische Hochschule

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

# Numerisches Rechnen — WS 2015 / 2016

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — M.Sc. Robert O'Connor

## 8. Übung

**Abgabe:** bis **Donnerstag**, den 7.1.2016, um 9.30 Uhr in den Einwurfkasten vor Raum 102, Hauptgebäude oder um 10.00 Uhr in Temp1 bevor die Übung.

**Aufgabe 1:** (Gauß-Newton) [2+3+5 Punkte]

Gegeben seien Messwerte

| $t_i$ | 0.2 | 0.4 | 0.5 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0.3 | $-0.8$ | $-1$ |

,

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = \sin(\omega t + \phi)$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem $\|F(x)\|_2 \to \min$ explizit auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß–Newton–Verfahren seien die Startwerte $\omega_0 = 6$, $\phi_0 = 1.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? (Der erste Schritt muss nicht durchgeführt werden.)

c) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem $\|Ax - b\|_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mittels Householder-Transformationen. Geben Sie $x$ und die Norm des Residuums explizit an.

**Aufgabe 2:** (Levenberg-Marquardt) [2 Punkte]

Seien $B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und sei $C = \begin{pmatrix} B \\ \mu I \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n)\times n}$ mit $I = Id_n$.

Zeigen Sie: Rang$(C) = n$.

**Aufgabe 3:** (Levenberg-Marquardt) [1+1+1+5 Punkte]

Gegeben sei das Minimierungsproblem: Finde $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}$, sodass

$$\left\| \begin{pmatrix} \bar{y}e^{\bar{x}} \\ \bar{x}^2 + 10 \\ \bar{y}^{*2} - 5 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min_{x,y\in\mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} ye^{x} \\ x^2 + 10 \\ y^2 - 5 \end{pmatrix} \right\|_2 .$$

a) Geben Sie eine Funktion $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, sodass die Lösung des nichtlinearen Ausgleichsproblems eine Nullstelle von $f$ ist. (Die Funktion $f$ soll nicht von $\bar{x}$ oder $\bar{y}$ abhängig sein.)

b) Geben Sie das lineare Ausgleichsproblem, das in jedem Schritt des Gauß-Newton-Verfahrens gelöst werden muss, als Funktion von $x_k$ und $y_k$ an.

c) Geben Sie das lineares Ausgleichsproblem, das in jedem Schritt des Levenberg-Marquardt-Verfahrens gelöst werden muss, als Funktion von $x_k$, $y_k$ und $\mu$ an.

d) Schreiben Sie ein Programm, um die optimalen Werte $\bar{x}$ und $\bar{y}$ über das Levenberg-Marquardt-Verfahren zu approximieren. Benutzen Sie $\mu = 10$ und $(x_0, y_0) = (5, 5)$ und geben Sie die approximative Lösung $(x_k, y_y)$ für $k \in \{1, 2, 3, 10, 50\}$ an.

**Aufgabe 4:** (Interpolation: Neville-Aitken-Schema) [7 Punkte]
Zu naturwissenschaftlichen Berechnungen benötigen Sie den Wert der Eulerschen Gammafunktion $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}x$ an der Stelle $x_0 := 1.55$. Ihnen stehen die folgenden Werte von $\Gamma$ zur Verfügung:

| $i$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $x_i$ | 1.15 | 1.30 | 1.65 | 1.80 |
| $\Gamma(x_i)$ | 0.9330 | 0.8975 | 0.9001 | 0.9314 |

Ermitteln Sie eine Näherung des Funktionswertes $\Gamma(1.55)$, indem Sie mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas das Interpolationspolynom $P(\Gamma|x_1, x_2, x_3, x_4)$ an der Stelle $x_0$ auswerten.