Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

Numerisches Rechnen — WS 2013/2014

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — Dr. Jochen Schütz

Nachholklausur Numerisches Rechnen (18.03.2014) (Musterlösung)

- Hilfsmittel: nur dokumentenechtes Schreibgerät (blau oder schwarz); genau ein Taschenrechner, der auf der Liste der erlaubten Taschenrechner steht; zwei beidseitig handbeschriebene Din-A4-Blätter
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Freitag, den 28.03.2014, auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Donnerstag, den 03.04.2014, von 10:00 – 12:00 Uhr im Raum 149 Hauptgebäude statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich. Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren innerhalb von 3 Wochen am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik abgeholt werden.

Matrikelnummer: ____________________ Taschenrechner: ____________________

Name: ____________________________ Vorname: ____________________________

Hiermit erkläre ich, dass ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, dass bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Datum: ____________________________ Unterschrift: ____________________________

Korrekturvermerke

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	$\sum$

Aufgabe 2
Gegeben sei die von zwei Parametern α und β abhängige Matrix $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$:

$$A_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 3\alpha \\ 12 & 50+\beta & 12\alpha+7\beta+14 \\ 3\alpha & 12\alpha+7\beta+14 & 3\alpha^2+48\beta+99 \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix. Geben Sie die Matrizen L und D explizit an.

b) Geben Sie alle Wertepaare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ an, für die die Matrix $A_{\alpha\beta}$ positiv definit ist.

c) Benutzen Sie die in Teil a) bestimmte Cholesky-Zerlegung der Matrix, um das Gleichungssystem $A_{\alpha\beta}x = b$ für $\alpha = 0$, $\beta = -1$ und $b = (-6.6, -19.2, 52.4)^T$ zu lösen.

7+2+4=13 Punkte

Musterlösung

a)

$$\begin{aligned} d_{k,k} &= a_{k,k} - \sum_{j=1}^{k-1} d_{j,j} l_{k,j}^2,\ k = 1, ..., n \\ l_{i,k} &= \frac{1}{d_{k,k}}(a_{i,k} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{i,j} d_{j,j} l_{k,j}),\ i = k+1, ..., n \end{aligned}$$

Hier ist $n = 3$.

$k = 1:$

$$d_{1,1} = a_{1,1} = 3, \quad l_{2,1} = \frac{1}{a_{1,1}} a_{2,1} = \frac{12}{3} = 4, \quad l_{3,1} = \frac{1}{a_{1,1}} a_{3,1} = \frac{3\alpha}{3} = \alpha$$

$k = 2:$

$$d_{2,2} = a_{2,2} - d_{1,1} l_{2,1}^2 = 50 + \beta - 3 \cdot 4^2 = 2 + \beta,$$

$$l_{3,2} = \frac{1}{d_{2,2}}(a_{3,2} - l_{3,1} d_{1,1} l_{2,1}) = \frac{1}{2+\beta}(12\alpha + 7\beta + 14 - \alpha \cdot 3 \cdot 4) = 7$$

$k = 3:$

$$d_{3,3} = a_{3,3} - d_{1,1} l_{3,1}^2 - d_{2,2} l_{3,2}^2 = 3\alpha^2 + 48\beta + 99 - 3\alpha^2 - (2+\beta) \cdot 7^2 = 1 - \beta.$$

Damit sieht die Cholesky-Zerlegung von A wie folgt aus:

$$\begin{aligned} A_{\alpha\beta} &= \begin{pmatrix} 3 & 12 & 3\alpha \\ 12 & 50+\beta & 12\alpha+7\beta+14 \\ 3\alpha & 12\alpha+7\beta+14 & 3\alpha^2+48\beta+99 \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ \alpha & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1-\beta \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & \alpha \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L^T} \end{aligned}$$

b) Damit die Matrix positiv definit ist, müssen alle Diagonaleinträge von D positiv sein. Damit ergeben sich zwei Bedingungen:

$$2 + \beta > 0 \quad \text{und} \quad 1 - \beta > 0$$

Der Parameter α spielt keine Rolle für die positive Definitheit der Matrix. Insgesamt ist $A_{\alpha\beta}$ also positiv definit für alle Wertepaare aus der Menge

$$M = \{(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid -2 < \beta < 1\}.$$

c) Das zu lösende Gleichungssystem sieht wie folgt aus:

$$A_{0,-1}x = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 12 & 49 & 7 \\ 0 & 7 & 51 \end{pmatrix} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{=D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=L^T} x = \begin{pmatrix} -6.6 \\ -19.2 \\ 52.4 \end{pmatrix}$$

Substituiere $DL^T x = y$ und löse $Ly = b$ durch Vorwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.6 \\ -19.2 \\ 52.4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.6 \\ -19.2 - 4 \cdot (-6.6) \\ 52.4 - 7 \cdot 7.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6.6 \\ 7.2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Mache nun die Substitution $DL^T x = y$ rückgängig. Skaliere dafür zunächst mit D^{-1} und löse dann $L^T x = D^{-1} y$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6.6 \\ 7.2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 \\ 7.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.2 - 4 \cdot 0.2 \\ 7.2 - 7 \cdot 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0.2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

Gegeben sei das lineare Ausgleichsproblem

$$\|Ax-b\|_2 \to \min_{x\in\mathbb{R}^2}, \text{ mit } A := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3.2 \\ 1 & 2.6 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie eine QR-Zerlegung von A über Givensrotationen.

b) Bestimmen Sie die Lösung des Ausgleichsproblems über die QR-Zerlegung aus Teil a).

c) Bestimmen Sie den Residuumsvektor sowie dessen Norm.

6+1+2=9 Punkte

Musterlösung

a) (Die im folgenden auftretenden Signa sind reine Konvention. Bei Rechnung "per Hand" spielt das gewählte Vorzeichen keine Rolle und es wurden dementsprechend natürlich jeweils beide Vorzeichen akzeptiert. Einzig bei der Implementierung am Rechner spielen Vorzeichen aus Gründen der Stabilität und der Speicherplatzeffizienz eine Rolle. Siehe hierfür Dahmen/Reusken Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Beispiel 3.43 und Algorithmus 3.44.)
Um den Eintrag $A_{1,2}$ auf Null zu bringen, betrachtet man die Einträge $A_{1,1}$ und $A_{1,2}$. Es ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}(A_{1,1})\sqrt{A_{1,1}^2 + A_{1,2}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}, c = \frac{A_{1,1}}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, s = \frac{A_{1,2}}{r} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$G_{1,2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{1,2}A = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & \frac{1}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{31}{5\sqrt{2}} \\ 1 & 2.6 \end{pmatrix}, G_{1,2}b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{\sqrt{2}} \\ 10 \end{pmatrix}$$

Im nächsten Schritt macht man $a_{1,3}$ zu Null. Hier ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}((G_{1,2}A)_{1,1})\sqrt{(G_{1,2}A)_{1,1}^2 + (G_{1,2}A)_{1,3}^2} = 3, c = \frac{(G_{1,2}A)_{1,1}}{r} = \frac{\sqrt{8}}{3}, s = \frac{(G_{1,2}A)_{1,3}}{r} = \frac{1}{3}$$

$$G_{1,3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{8}}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{\sqrt{8}}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow G_{1,3}G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & \frac{31}{5\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{17}{5\sqrt{2}} \end{pmatrix}, G_{1,3}G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{9}{\sqrt{2}} \\ \frac{13}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Im letzten Schritt macht man $a_{2,3}$ zu Null. Hier ergibt sich:

$$r = \operatorname{sgn}((G_{1,3}G_{1,2}A)_{2,2})\sqrt{(G_{1,3}G_{1,2}A)_{2,2}^2 + (G_{1,3}G_{1,2}A)_{2,3}^2} = 5$$

$$c = \frac{(G_{1,3}G_{1,2}A)_{2,2}}{r} = \frac{31}{25\sqrt{2}}, s = \frac{(G_{1,3}G_{1,2}A)_{2,3}}{r} = \frac{17}{25\sqrt{2}}$$

$$G_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{31}{25\sqrt{2}} & \frac{17}{25\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{17}{25\sqrt{2}} & \frac{31}{25\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow G_{2,3}G_{1,3}G_{1,2}A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, G_{2,3}G_{1,3}G_{1,2}b = \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

b) Als Lösung des Systems ergibt sich damit:

$$x_2 = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{4 - 1 \cdot 2}{3} = \frac{2}{3}$$

c) Der Residualvektor lautet somit:

$$r = Ax - b = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3.2 \\ 1 & 2.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{41}{15} \\ -\frac{62}{15} \end{pmatrix}$$

Somit ergibt sich:

$$\|r\|_2 = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{41}{15}\right)^2 + \left(-\frac{62}{15}\right)^2} = \frac{1}{15}\sqrt{10^2 + 41^2 + 62^2} = \frac{1}{15}\sqrt{5625} = \frac{75}{15} = 5$$

Aufgabe 4

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sin(x)y^2 - \cos(y)x^2 + 1 \\ e^{y-1}\,(2x-y)+1 \end{pmatrix}}_{=:\Phi(x,y)}$$

und die Menge $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x|, |y| \leq 1\}$.

a) Zeigen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass dieses Gleichungssystem in D genau eine Lösung besitzt.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür die $\|\cdot\|_1$-Norm.

b) Führen Sie nun einen Schritt der Fixpunktiteration mit dem Startwert $(0,1) \in D$ aus. Wie viele Schritte sind maximal nötig um einen Fehler von $\varepsilon = 10^{-4}$ in der $\|\cdot\|_1$-Norm zu erreichen?
Hinweis: Falls Sie in Aufgabenteil a) keine Kontraktionskonstante gefunden haben, können Sie mit $L = \frac{7}{8}$ rechnen.

8+4=12 Punkte

Musterlösung

a) Um zu zeigen, dass das Gleichungssystem genau eine Lösung besitzt, überprüfen wir die Voraussetzungen für den Fixpunktsatz von Banach. Das bedeutet wir zeigen, dass D vollständig ist, dass $\Phi(x,y)$ eine Selbstabbildung ist und dass $\Phi(x,y)$ kontrahierend ist:

(i) D ist abgeschlossen und damit als Teilmenge eines vollständigen Raumes **vollständig**.

(ii) Für $|x|, |y| \leq 1$ gilt:

$$\frac{1}{8}|\sin(x)y^2 - \cos(x)x^2 + 1| \leq \frac{1}{8}\underbrace{|\sin(x)y^2|}_{\leq 1} + \frac{1}{8}\underbrace{|\cos(x)x^2|}_{\leq 1} + \frac{1}{8} \leq \frac{3}{8} \leq 1$$

$$\frac{1}{8}|e^{y-1}\,(2x-y)+1| \leq \frac{1}{8}\underbrace{e^{y-1}}_{\leq e^0 = 1}(\underbrace{|2x|}_{\leq 2} + \underbrace{|y|}_{\leq 1}) + \frac{1}{8} \leq \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} \leq 1$$

Somit ist $\Phi(x,y)$ eine **Selbstabbildung**.

(iii) Für die Kontraktionskonstante betrachten wir die Jacobi-Matrix von Φ und zeigen, dass die $\|\cdot\|_1$-Norm beschränkt ist. Mit Hilfe des Mittelwertsatzes zeigen wir dann die Kontraktionseigenschaft.

$$J\Phi(x,y) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \cos(x)y^2 - 2\cos(y)x & 2\sin(x)y + \sin(y)x^2 \\ 2e^{y-1} & e^{y-1}(2x-y) - e^{y-1} \end{pmatrix}$$

Die $\|\cdot\|_1$-Norm entspricht dem Maximum der Summe aller Einträge einer Spalte. Somit gilt für $|x|, |y| \leq 1$:

$$\|J\Phi(x,y)\|_1 = \frac{1}{8}\max\{|\cos(x)y^2 - 2\cos(y)x| + |2e^{y-1}|,$$

$$
\begin{aligned}
&|2\sin(x)y + \sin(y)x^2| + |e^{y-1}(2x-y) - e^{y-1}|\} \\
\leq\ & \frac{1}{8}\max\{\underbrace{|\cos(x)y^2|}_{\leq 1} + \underbrace{|2\cos(y)x|}_{\leq 2} + \underbrace{|2e^{y-1}|}_{\leq 2}, \\
&\underbrace{|2\sin(x)y|}_{\leq 2} + \underbrace{|\sin(y)x^2|}_{\leq 1} + e^{y-1}\underbrace{|(2x-y)|}_{\leq 3} + \underbrace{|e^{y-1}|}_{\leq 1}\} \\
\leq\ & \frac{1}{8}\max\{5, 7\} \\
=\ & \frac{7}{8} < 1
\end{aligned}
$$

Da die Menge D konvex ist, gilt somit nach dem Mittelwertsatz

$$\|\Phi(x_1, y_1) - \Phi(x_2, y_2)\|_1 \leq \frac{7}{8}\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|_1,$$

also ist Φ **kontrahierend** in D. Insgesamt liefert nun der Fixpunktsatz von Banach die Existenz eines eindeutigen Fixpunktes mit einer Kontraktionskonstante $L = \frac{7}{8}$.

b) Wir führen einen Schritt der Fixpunktiteration durch, indem wir $\Phi(0, 1)$ berechnen:

$$\Phi(0,1) = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} \sin(0)1^2 - \cos(1)0^2 + 1 \\ e^{1-1}(2 \cdot 0 - 1) + 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Um die maximale Anzahl an benötigten Schritte zu berechnen, verwenden wir die a-priori Fehlerabschätzung mit $z = (x, y)$:

$$\|z^* - z_n\|_1 \leq \frac{L^n}{1-L}\|z_1 - z_0\|_1 = \frac{\left(\frac{7}{8}\right)^n}{1 - \frac{7}{8}}\|(\frac{1}{8}, -1)\|_1 = \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot 8 \cdot \frac{9}{8} = \left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot 9$$

Um einen Fehler von höchstens $\varepsilon = 10^{-4}$ zu erreichen muss gelten:

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{7}{8}\right)^n \cdot 9 \leq 10^{-4} \\
\Leftrightarrow &\left(\frac{7}{8}\right)^n \leq \frac{10^{-4}}{9} \\
\Leftrightarrow\ & n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^{-4}}{9}\right)}{\ln\left(\frac{7}{8}\right)} \approx 85.42983584
\end{aligned}
$$

Es genügen also 86 Schritte um den Fehler unter die gewünschte Schranke zu drücken.

Aufgabe 5

Wir betrachten in dieser Aufgabe diejenigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für die das Integral

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\,\mathrm{dx}$$

existiert, d.h. kleiner als unendlich ist. Dies gilt z.B. für alle Polynome. Wir betrachten die Quadraturformel

$$Q_2(f) := \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) f(2-\sqrt{2}) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) f(2+\sqrt{2}).$$

a) Bestimmen Sie den Exaktheitsgrad von $Q_2(f)$, d.h. bestimmen Sie das größte $n \in \mathbb{N}_0$, so dass

$$Q_2(p) = \int_0^\infty e^{-x} p(x)\,\mathrm{dx} \qquad \forall p \in \Pi_n.$$

Hinweis: Es gilt

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n\,\mathrm{dx} = n! \qquad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

b) Approximieren Sie $\int_0^\infty e^{-x}\sin(x)\,\mathrm{dx}$ mit Hilfe von Q_2.

7+2=9 Punkte

Musterlösung

a) Der Exaktheitsgrad ist $n = 3$. Er kann nicht $n \geq 4$ sein, denn für das Polynom

$$p(x) = \left(\left(x-2+\sqrt{2}\right)\left(x-2-\sqrt{2}\right)\right)^2$$

von Grad 4 gilt $Q_2(p) = 0$, aber das (gewichtete) Integral ist positiv.
Alternativ kann man es auch über naives Ausrechnen feststellen:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x} x^4\,\mathrm{dx} = 24 &\stackrel{!}{=} (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4})(2-\sqrt{2})^4 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4})(2+\sqrt{2})^4 \\
&= \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^4 + \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^4 \\
&= \frac{1}{2}(2-\sqrt{2})^3 + \frac{1}{2}(2+\sqrt{2})^3 \\
&= \frac{1}{2}(8 - 12\sqrt{2} + 12 - 2\sqrt{2} + 8 + 12\sqrt{2} + 12 + 2\sqrt{2}) = 20 \quad ↯
\end{aligned}$$

$n = 3$ folgt durch Einsetzen von $\{1, x, x^2, x^3\}$ und Ausnutzen der Linearität von Integral und Quadraturformel:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{dx} = 1 \stackrel{!}{=} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \quad (OK)$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x\,\mathrm{dx} = 1 \overset{!}{=} \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\,(4-2) \quad (OK)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^2\,\mathrm{dx} = 2 &\overset{!}{=} \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^2 + \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^2 \\
&= \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\left(2-\sqrt{2}+2+\sqrt{2}\right) = \frac{1}{2}4 \quad (OK)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x}x^3\,\mathrm{dx} = 6 &\overset{!}{=} \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})^3 + \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})^3 \\
&= \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})\left((2-\sqrt{2})^2+(2+\sqrt{2})^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(4-4\sqrt{2}+2+4+4\sqrt{2}+2\right) = \frac{1}{2}12 \quad (OK)
\end{aligned}$$

b) Es ist

$$\begin{aligned}
Q_2(\sin) &= \frac{1}{4}(2+\sqrt{2})\sin(2-\sqrt{2}) + \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})\sin(2+\sqrt{2}) \\
&= 0.4324594546798442
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b mit

$$A := \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}, \qquad b := \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist eine Lösung des Gleichungssystems

$$Ax = b.$$

a) Führen Sie einen Schritt des Jacobi-Verfahrens zum Startwert $x_0 := (0.5, 0.5, 0.5)^T$ durch.

b) Zeigen Sie, dass das Jacobi-Verfahren angewandt auf A für jede Wahl von $x_0 \in \mathbb{R}^3$ konvergiert.

c) In Abbildung 1 sehen Sie drei Konvergenzplots. Welcher dieser Konvergenzplots spiegelt das generische Verhalten des Jacobi-Verfahrens angewandt auf die obige Matrix am besten wieder? (Mit Begründung.)

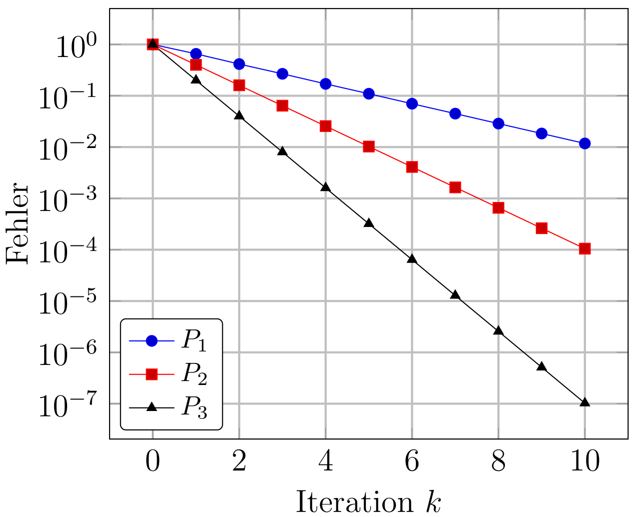

Abbildung 1: Konvergenzplots

4+2+4=10 Punkte

Musterlösung

a) Hier werden zwei verschiedene Lösungen präsentiert.
Variante 1 ist eher von theoretischem Nutzen:
Die Iterationsvorschrift des Jacobi-Verfahrens lautet

$$x^{k+1} = Cx^k + D^{-1}b, \tag{1}$$

wobei $C := Id - D^{-1}A$ und D die Diagonale von A bezeichnet. In diesem Fall ist

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & \frac{-4}{10} & 0 \\ \frac{-4}{10} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{10} & 0 \\ \frac{4}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es ist $D^{-1}b = (1, 2, 1)^T$ und $Cx^0 = (\frac{2}{10}, \frac{2}{10}, 0)^T$. Damit ist $x^1 = Cx^0 + D^{-1}b = (\frac{12}{10}, \frac{22}{10}, 1)^T$.

Variante 2 ist die, die man in der Praxis eher sehen würde:
Es ist $x_i^{m+1} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j^{(m)})$. Damit ergibt sich:

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{10}(10 - (-4) \cdot 0.5) = \frac{12}{10}$$
$$x_2^{(1)} = \frac{1}{10}(20 - (-4) \cdot 0.5) = \frac{22}{10}$$
$$x_3^{(1)} = \frac{1}{12}(12) = 1$$

b) Es gibt (mindestens) drei Möglichkeiten, dies hier zu zeigen:

- A ist strikt diagonaldominant, damit konvergiert das Jacobi-Verfahren angewandt auf A für jeden beliebigen Startwert.
- Zeige, dass der Spektralradius von C kleiner eins ist. Charakteristisches Polynom von C:

$$\chi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & \frac{-4}{10} & 0 \\ \frac{-4}{10} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda \left(\lambda^2 - \left(\frac{2}{5} \right)^2 \right).$$

  Damit sind die Eigenwerte $\{0, \pm 0.4\}$, und damit $\rho(C) = 0.4 < 1$. Damit ist Konvergenz des Jacobi-Verfahrens gegeben.
- A ist positiv definit, denn die Hauptminoren sind $10, 84, 12 \cdot 84$ alle größer Null. Weiterhin ist $2D - A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$ positiv definit, denn die Hauptminoren sind $10, 84, 12 \cdot 84$ auch alle größer Null. Nach dem Satz 13.9. folgt nun Konvergenz des Jacobi-Verfahrens.

c) Der Spektralradius, und damit auch die ungefähre mittlere Fehlerreduktion in k Schritten, ist 0.4. Alle Fehler fangen bei 1 an, d.h. nach 10 Schritten erwartet man, dass der Fehler ungefähr $e_{10} = 0.4^{10} \cdot 1 \approx 10^{-4}$ beträgt. P_2 ist also (im Generellen) die korrekte Lösung.