Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik
Numerisches Rechnen — WS 2013/2014

Prof. Dr. Martin Grepl — Dipl.-Math. Jens Berger — Dr. Jochen Schütz

Klausur Numerisches Rechnen (20.02.2014)
(Musterlösung)

- Hilfsmittel: nur dokumentenechtes Schreibgerät (blau oder schwarz); genau ein Taschenrechner, der auf der Liste der erlaubten Taschenrechner steht; zwei beidseitig handbeschriebene Din-A4-Blätter
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Mittwoch, den 26.02.2014, auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Freitag, den 28.02.2014, von 09:00 – 12:00 Uhr im Raum 149 Hauptgebäude statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich. Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren innerhalb von 3 Wochen am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik abgeholt werden.

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Hiermit erkläre ich, dass ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, dass bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Datum: ____________________ Unterschrift: ____________________

Korrekturvermerke

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	$\sum$

Aufgabe 3

Gegeben seien die Matrix A und der Vektor b mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \\ -9 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3} \quad , \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Bestimmen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A mit Zeilenskalierung und Spaltenpivotisierung, also die Matrizen P, D, L und R so dass $PDA = LR$ gilt.
Hinweis: Rechnen Sie durchweg mit Brüchen.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der Matrizen P, D, L und R aus Teil a).

c) Bestimmen Sie die Konditionszahl $\kappa(A)$ bezüglich der ∞-Norm, sie können A^{-1} gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/4 & -1/12 & 1/12 \\ -5/4 & 1/4 & -1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

verwenden.

d) Wie groß darf der relative Fehler bezüglich der ∞-Norm in b höchstens sein, damit der relative Fehler bezüglich der ∞-Norm in x nicht größer als 5 Prozent ist?

6+4+2+2=14 Punkte

Musterlösung

a) Bestimme zuerst die Matrix D durch direktes berechnen der Einträge:

$$D = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1/15 \end{pmatrix} \Rightarrow DA = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 6/11 & 4/11 & 1/11 \\ -9/15 & -5/15 & 1/15 \end{pmatrix}$$

Im ersten Schritt ist keine Pivotisierung nötig, da $3/4$ der gröchste Eintrag ist, ebenso im zweiten Schritt nicht.

$$\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 6/11 & 4/11 & 1/11 \\ -3/5 & -1/3 & 1/15 \end{pmatrix} \overset{G}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 8/11 & 2/11 & 1/11 \\ -4/5 & -2/15 & 1/15 \end{pmatrix} \overset{G}{\hookrightarrow} \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 8/11 & 2/11 & 1/11 \\ -4/5 & -11/15 & 2/15 \end{pmatrix}$$

Somit ergeben sich folgende Matrizen:

$$R = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 2/11 & 1/11 \\ 0 & 0 & 2/15 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8/11 & 1 & 0 \\ -4/5 & -11/15 & 1 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Zu lösen ist $Ax = b \Leftrightarrow D^{-1}P^{-1}LRx = b \Leftrightarrow LRx = PDb$. Somit bestimme zuerst PDb:

$$PD \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 2/5 \end{pmatrix}$$

Als nächstes bestimmen wir $Ly = PDb$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{8}{11} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{5} & -\frac{11}{15} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{2}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{8}{11}(-\frac{1}{2}) \\ \frac{2}{5} + \frac{4}{5}(-\frac{1}{2}) + \frac{11}{15}\frac{4}{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix}$$

Zuguterletzt lösen wir $Rx = y$:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{11} & \frac{1}{11} \\ 0 & 0 & \frac{2}{15} \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{4}{11} \\ \frac{4}{15} \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 1) \\ \frac{11}{2}(\frac{4}{11} - \frac{1}{11} \cdot 2) \\ \frac{4}{15}\frac{15}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ ist somit $x = (-1, 1, 2)$.

c) Für die Konditionszahl $\kappa(A)$ benötigen wir die ∞-Norm der Matrizen A und A^{-1}.

$$\|A\| = \max\{4, 11, 15\} = 15$$
$$\|A^{-1}\| = \max\{11/12, 7/4, 3/2\} = 7/4$$

Somit ergibt sich als Konditionszahl $\kappa(A) = 15 \cdot 7/4 = 26.25$

d) Der relative Fehler r_x in der Lösung ist beschränkt durch den relativen Fehler r_b in der rechten Seite multipliziert mit der Konditionszahl $r_x \leq \kappa(A)r_b \leq 0.05$.

$$\kappa(A)r_b \leq 0.05 \Leftrightarrow r_b \leq \frac{0.05}{\kappa(A)} = 0.0019047619$$

Somit dürfen die Anfangsdaten maximal um 0.19 Prozent abweichen damit der Fehler in der Lösung nicht grösser als 5 Prozent wird.

Aufgabe 4

Gegeben ist eine Funktionenschar

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 1\right) a + (-2x^2 + 7x - 5)b.$$

Die Parameter a und b sollen nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate so bestimmt werden, dass die Wertetabelle

x_i	0	1	2
y_i	2	-11	-5

möglichst gut approximiert wird.

a) Formulieren Sie das zugehörige lineare Ausgleichsproblem.

b) Bestimmen Sie a und b mittels QR-Zerlegung über Householdertransformationen.

c) Berechnen Sie den Residuumsvektor und dessen Norm.

2+6+2=10 Punkte

Musterlösung

a) Zu bestimmen sind $a, b \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|_2 = \min_{\tilde{a}, \tilde{b} \in \mathbb{R}} \left\| \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ \tilde{b} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} \right\|_2$$

b) Benutze Householder-Spiegelungen:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|a_1\|_2 = 3 \Rightarrow v = a_1 + \operatorname{sgn}(a_{11}) \|a_1\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q_v a_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per Konstruktion}$$

$$Q_v a_2 = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) a_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{24} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (4, 2, 2) \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-18) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q_v y = \left(I - 2\frac{vv^T}{v^T v}\right) y = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{2}{24} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (4, 2, 2) \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} - \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} (-24) = \begin{pmatrix} 10 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Zweiter Householderschritt, betrachte nur noch Zeile 2 und 3 (wird hier angedeutet durch ˜):

$$\tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\tilde{a}_2\| = 5 \Rightarrow \tilde{v}_2 = \tilde{a}_2 + \operatorname{sgn}(\tilde{a}_{21})\|\tilde{a}_2\|_2 e_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Q_{\tilde{v}_2}\tilde{a}_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{per Konstruktion}$$

$$Q_{\tilde{v}_2}\tilde{y} = \left(I - 2\frac{\tilde{v}_2\tilde{v}_2^T}{\tilde{v}_2^T\tilde{v}_2}\right)\tilde{y} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2}{80}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}(8,4)\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{40}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}(-60) = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Das Problem sieht also nach QR-Zerlegung wie folgt aus:

$$\left\| \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min_{a,b\in\mathbb{R}} \Rightarrow b = \frac{5}{-5} = -1 \Rightarrow a = \frac{10 - 1\cdot(-1)}{-3} = -\frac{11}{3}$$

c) Es gilt:

$$r = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{11}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow \|r\|_2 = \frac{1}{3}\sqrt{(-2)^2 + 11^2 + (-10)^2} = \frac{15}{3} = 5$$

Aufgabe 5
Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2\cos(y) &=& \frac{1}{2}\pi - y\sin(x) \\ x(1+\sin(x)) &=& \frac{3}{2}\pi - y. \end{array} \right.$$

a) Stellen Sie dieses Gleichungssystem in ein Nullstellenproblem um.

b) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(x^0, y^0) = (\pi, -\pi)$ aus, rechnen Sie hierbei möglichst exakt.

c) Angenommen die nächste Aufgabe würde lauten „Führen Sie jetzt zwei Schritte des vereinfachten Newton-Verfahrens zum Startwert $(x^0, y^0) = (\pi, -\pi)$ durch.“. Welche Rechnungen müssten Sie dann jetzt nur noch ausführen? Führen Sie diese Rechnungen **nicht explizit** durch.

1+6+2=9 Punkte

Musterlösung

a) Wir formen die Gleichungen so um, dass auf der Rechten Seite nur nulleinträge erscheinen:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2\cos(y) + y\sin(x) - \frac{1}{2}\pi &=& 0 \\ x + y + x\sin(x) - \frac{3}{2}\pi &=& 0 \end{array} \right.$$

Gesucht wird somit die Nullstelle der Funktion

$$F(x,y) := \begin{pmatrix} x^2\cos(y) + y\sin(x) - \frac{1}{2}\pi \\ x + y + x\sin(x) - \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}.$$

b) Zuerst bestimmen wir die Jacobi-Matrix JF der Funktion F und werten diese an (x_0, y_0) aus.

$$JF(x,y) := \begin{pmatrix} 2x\cos(y) + y\cos(x) & -x^2\sin(y) + \sin(x) \\ 1 + \sin(x) + x\cos(x) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to JF(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 2\pi\cos(-\pi) + (-\pi)\cos(\pi) & -\pi^2\sin(-\pi) + \sin(\pi) \\ 1 + \sin(\pi) + \pi\cos(\pi) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi & 0 \\ 1-\pi & 1 \end{pmatrix}$$

Den Funktion F ausgewertet an dem Startwert ergibt

$$F(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \pi^2\cos(-\pi) - \pi\sin(\pi) - \frac{1}{2}\pi \\ \pi - \pi + \pi\sin(\pi) - \frac{3}{2}\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\pi^2 - \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{3}{2}\pi \end{pmatrix}$$

Nun lösen wir das Lineare Gleichungssystem $JF(x_0,y_0)s = F(x_0,y_0)$ um den Korrekturschritt $s = (\Delta x, \Delta y)$ zu bestimmen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\pi & 0 & -\pi^2 - \frac{1}{2}\pi \\ 1-\pi & 1 & -\frac{3}{2}\pi \end{array} \right) \hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi + \frac{1}{2} \\ 1-\pi & 1 & -\frac{3}{2}\pi \end{array} \right) \hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2}\pi - (1-\pi)(\pi + \frac{1}{2}) \end{array} \right)$$

$$\hookrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \pi + \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2\pi + \pi^2 - \frac{1}{2} \end{array} \right)$$

Somit ergibt sich für die erste Numerischen Apporixmation

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \pi + \frac{1}{2} \\ -2\pi + \pi^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \pi - \pi^2 + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)
- $F(x_1, y_1)$ auswerten
- $JF(x_0, y_0)s = F(x_1, y_1)$ lösen
- $(x_2, y_2) = (x_1, y_1) - s$ bestimmen

Aufgabe 6
Gegeben seien die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(x)$$

und die Stützstellen $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = 3$ und $x_3 = 4$. Sie dürfen die (gerundeten) Werte des Logarithmus der folgenden Tabelle entnehmen:

x	1	2	3	4
y	0	0.6931	1.0986	1.3863

a) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)(x)$. Beachten Sie hierbei Aufgabenteil c).

b) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5)$. Nutzen Sie dazu die Horner-artige Darstellung des Polynoms.

c) Bestimmen Sie $P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x)$ und geben Sie für diese Approximation eine möglichst genaue Fehlerabschätzung für $x \in [1, 4]$ an. Gehen Sie dabei davon aus, dass die Werte aus der obigen Tabelle exakt sind.

Hinweis: Die Funktion $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$ nimmt ihre lokalen Maxima und Minima bei 2.5 und $2.5 \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$ an.

4+2+5=11 Punkte

Musterlösung

a) Mache im Hinblick auf Teil c) direkt die dividierten Differenzen für alle Stützstellen:

1	0	-	-	-
2	0.6931	0.6931	-	-
3	1.0986	0.4055	-0.1438	-
4	1.3863	0.2877	-0.0589	0.0283

Damit ist

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(x) = 0 + 0.6931(x - 1) - 0.1438(x - 1)(x - 2).$$

b) Die Horner-artige Darstellung ist

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(x) = (x - 1)\left(0.6931 - 0.1438(x - 2)\right).$$

Damit ist

$$P(f|x_0, x_1, x_2)(1.5) = (1.5 - 1)\left(0.6931 - 0.1438(1.5 - 2)\right) = 0.5\left(0.6931 + 0.1438 \cdot 0.5\right) = 0.3825.$$

c) Mit dem Tableau von Aufgabenteil a) ist

$$P(f|x_0, x_1, x_2, x_3)(x) = 0 + 0.6931(x - 1) - 0.1438(x - 1)(x - 2) + 0.0283(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

Weiterhin ist

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}.$$

Damit ist

$$\|f^{(4)}\|_{\infty,[1,4]} = 6.$$

Weiter stellt man mit Hilfe des Hinweises fest, dass $|(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \leq 1$. Also gilt für die Fehlerabschätzung:

$$\|P(f|x_0, x_1, x_2, x_3) - f(x)\|_{\infty,[1,4]} \leq |(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)| \frac{\|f^{(4)}\|_{\infty,[1,4]}}{4!} \leq \frac{6}{24} = 0.25$$