RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK

Numerisches Rechnen — WS 2010/2011

Prof. Dr. Martin Grepl — Jens Berger, Jörn Thies Frings

Wiederholungsklausur Numerisches Rechnen (15.03.2011) (Musterlösung)

- Hilfsmittel: nur dokumentenechtes Schreibgerät (blau oder schwarz); genau ein Taschenrechner, der auf der Liste der erlaubten Taschenrechner steht; ein beidseitig handbeschriebenes Din-A4-Blatt
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Donnerstag, den 31. März 2011, auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Freitag, den 01. April 2011, von 9:00 – 13:00 Uhr im Raum 149 Hauptgebäude statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich. Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren innerhalb von 3 Wochen am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik abgeholt werden.

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ____________________ Vorname: ____________________

Hiermit erkläre ich, dass ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, dass bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Datum: ____________________ Unterschrift: ____________________

Korrekturvermerke

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	$\sum$

Aufgabe 3
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.5 & -0.2 \\ 0.3 & -0.3 & 0.1 \\ 0.2 & -0.4 & -0.3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1.89 \\ -0.37 \\ -0.38 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotisierung. Geben Sie L, R und P mit $PA = LR$ explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

c) Bestimmen Sie die Determinante von A mit Hilfe der unter a) berechneten LR-Zerlegung.

d) Berechnen Sie die Kondition $\kappa_{\|\cdot\|}$ von A bzgl. der 1-Norm.
Hinweis: Es gilt $\|A^{-1}\|_1 \approx 5.1682$.

e) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $A\tilde{x} = \tilde{b}$. Wie groß darf der relative Fehler $\frac{\|b-\tilde{b}\|_1}{\|b\|_1}$ höchstens sein, damit der relative Fehler $\frac{\|x-\tilde{x}\|_1}{\|x\|_1}$ nicht größer als 2% ist?

7+4+1+1+1 = 14 Punkte

Musterlösung s

a) Pivotzeile 1: Pivotvektor $\rightarrow p = (1, 2, 3)^T$ und $L_{21} = 0.15$ sowie $L_{31} = 0.1$:

$$A \rightarrow R_1 = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & -0.375 & 0.13 \\ 0 & -0.45 & -0.28 \end{pmatrix}$$

Pivotzeile 3: Pivotvektor $\rightarrow p = (1, 3, 2)^T$ (d.h.: L_{21} und L_{31} vertauschen!) und $L_{32} = 0.83333333$:

$$R_1 \rightarrow R = \begin{pmatrix} 2.0 & 0.5 & -0.2 \\ 0 & -0.45 & -0.28 \\ 0 & 0 & 0.36333333 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 1 & 0 \\ 0.15 & 0.83333333 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Vertausche b gemäß p

$$b \rightarrow \begin{pmatrix} -1.89 \\ -0.38 \\ -0.37 \end{pmatrix}$$

Vorwärtseinsetzen

$$\rightarrow y = \begin{pmatrix} -1.89 \\ -0.191 \\ 0.072666667 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen

$$\rightarrow x = \begin{pmatrix} -1.0 \\ 0.3 \\ 0.2 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt

$$\det(A) = \underbrace{\det P^{-1}}_{=-1} \cdot \underbrace{\det L}_{=1} \cdot \det R = -\det R = -1 \cdot 2.0 \cdot (-0.45) \cdot 0.36333333 = 0.327000000$$

d) $\|A\|_1 = \max\{2.5,\ 1.2,\ 0.6\} = 2.5 \Rightarrow \kappa_1(A) = 2.5 \cdot 5.1682 = 12.9205$

e) $r_x \leq \kappa(A) \cdot r_b \overset{!}{\leq} 2\%$ d.h. mit $r_b \leq \frac{2\%}{12.9205} = 0.15479290\%$ können wir die gewünschte Genauigkeit in x garantieren.

Aufgabe 4
Gegeben sind Messwerte f_k an den Stützstellen x_k:

x_k	1	2	3
f_k	1.5	1.3	1.4

Die Punkte (x_k, f_k) sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$f(x) = a_1(x-3)^2 + a_2 x$$

liegen. Die Koeffizienten a_1, a_2 sollen optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate bestimmt werden.

a) Formulieren Sie das lineare Ausgleichsproblem.

b) Lösen Sie das lineare Ausgleichsproblem aus Aufgabenteil a) mit Hilfe einer QR-Zerlegung durch Givensrotationen.

c) Geben Sie den Residualvektor und seine Norm an.

2+10+2 = 14 Punkte

Musterlösung

a) Das lineare Ausgleichsproblem lautet $\|\mathbf{Ax}-\mathbf{b}\|_2 \to \min$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4.0 & 1.0 \\ 1.0 & 2.0 \\ 0.0 & 3.0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.3 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x} = (a_1, a_2)^T$.

b) Löse mittels Givensrotationen:

(i) $r = \sqrt{17} = 4.1231056$, $c = 0.97014250$, $s = 0.24253562$, also:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4.12310563 & 1.45521375 \\ 0.0 & 1.69774938 \\ 0.0 & 3.0 \end{pmatrix}, \quad b_1 = \begin{pmatrix} 1.77051006 \\ 0.89738181 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

(ii) $r = \sqrt{11.88235296} = 3.44707900$, $c = 0.49251828$, $s = 0.87030210$, also:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 4.1231056 & 1.45521375 \\ 0.0 & 3.44707900 \\ 0.0 & 0.0 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1.7705101 \\ 1.6603999 \\ -0.0914677 \end{pmatrix}$$

Damit folgt:

$$x = \begin{pmatrix} 0.25940594 \\ 0.481683168 \end{pmatrix}$$

c) Der Residualvektor lautet $r = (0.019306931, -0.077227723, 0.045049505)^T$ und seine Norm beträgt $\|r\|_2 = 0.0914677$.

Aufgabe 5
Gesucht ist eine Näherungslösung der nichtlinearen Gleichung $2x - \tan x = 0$ im Intervall $D = [1, 1.5]$.

a) Betrachten Sie die Abbildungen $\varphi_1, \varphi_2 : D \to \mathbb{R}$, gegeben durch:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \frac{1}{2}\tan x \\ \varphi_2(x) &= \arctan(2x) \end{aligned}$$

Begründen Sie, warum φ_2 die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes für das Intervall D erfüllt und warum φ_1 es nicht tut.

Hinweis: Die Ableitung des arctan lautet: $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 1.2$ drei Iterationsschritte der zu φ_2 gehörigen Fixpunktiteration durch.

c) Wieviele Iterationsschritte sind laut a-priori-Abschätzung notwendig, um eine Abweichung von höchstens 10^{-4} vom Fixpunkt garantieren zu können? Wie genau ist bereits x_3 aus Teil 2) laut a-posteriori-Abschätzung?

8+2+6 = 16 Punkte

Musterlösung

a) (i) Zunächst ist D als beschränktes und abgeschlossenes Intervall kompakt.

(ii) Mit $\varphi_1(1.5) = 7.051$ gilt $\varphi_1(D) \nsubseteq D \Rightarrow \varphi_1$ erfüllt die Selbstabbildungseigenschaft nicht.

Es ist $\varphi_2(1) = \arctan(2) = 1.107$ und $\varphi_2(1.5) = \arctan(3) = 1.249$. Weiter gilt:

$$\varphi_2'(x) = \frac{2}{1+4x^2} > 0 \quad \forall x \in D.$$

Damit ist φ_2 monoton steigend auf D und aus diesem Grund ist

$$\varphi_2(D) \subset [\varphi_2(1), \varphi_2(1.5)] \subset D,$$

also erfüllt φ_2 die Selbstabbildungseigenschaft.

(iii) $\varphi_1'(x) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x)$ ist monton steigend auf dem betrachteten Intervall, betrachte also die Stelle $x = 1.5$:

$$\varphi_1'(1.5) = 99.9250,$$

damit ist φ_1 keine Kontraktion.

φ_2' (aus (ii)) ist offensichtlich stetig, monoton fallend und positiv auf D und darum ist

$$\sup_{x \in D} |\varphi_2'(x)| = |\varphi_2'(1)| = \frac{2}{5}.$$

Wähle also $L = \frac{2}{5} < 1$ als Kontraktionskonstante.

Damit sind für φ_2 alle Bedingungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt und somit liefert die Iteration $\varphi_2(x_k) = x_{k+1}$ einen eindeutigen Fixpunkt in D (ausgehend von einem Startwert $x_0 \in D$).

b) Die ersten drei Iterationsschritte liefern: $x_0 = 1.2$, $x_1 = 1.176$, $x_2 = 1.169$, $x_3 = 1.167$.

c) Die a-priori Abschätzung $\|x_k - x^*\| \leq \frac{L^k}{1-L}\|x_1 - x_0\|$ liefert:

$$\frac{(\frac{2}{5})^k}{1-\frac{2}{5}}\|1.2 - 1.176\| \overset{!}{<} 10^{-4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^k < \frac{3}{5} \cdot \frac{10^{-4}}{0.024} = 0.0025 \Leftrightarrow k > \frac{\log(0.0025)}{\log(0.4)} = 6.53882478.$$

Damit ist nach sieben Schritten garantiert, dass der Fehler kleiner als 10^{-4} ist.

Die a-posteriori Abschätzung für x_3 liefert:

$$\|x_3 - x^*\| \leq \frac{L}{1-L}\|x_3 - x_2\| = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{2}{5}}\|1.167 - 1.169\| = \frac{2}{3} \cdot 0.002 = 0.001333$$

Aufgabe 6
Gegeben sei die Wertetabelle

x_i	1	1.5	2	2.5	3
y_i	0	0.4055	0.6931	0.9163	1.0986

einer Funktion $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto y(x)$.

a) Berechnen Sie die vier fehlenden dividierten Differenzen im folgenden Newton-Schema:

$$
\begin{array}{l|llll}
x_0 = 1 & 0 & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
x_1 = 1.5 & 0.4055 & \to [\mathbf{x_0, x_1}]\mathbf{y} & & & \\
 & \searrow & \searrow & & & \\
x_2 = 2 & 0.6931 & \to 0.5754 & \to \text{-}0.2356 & & \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & & \\
x_3 = 2.5 & 0.9163 & \to 0.4463 & \to [\mathbf{x_1, x_2, x_3}]\mathbf{y} & \to 0.0710 & \\
 & \searrow & \searrow & \searrow & \searrow & \\
x_4 = 3 & 1.0986 & \to [\mathbf{x_3, x_4}]\mathbf{y} & \to \text{-}0.0816 & \to 0.0316 & \to [\mathbf{x_0, \ldots, x_4}]\mathbf{y}
\end{array}
$$

b) Stellen Sie das Interpolationspolynom $p_4(x)$ vom Grad 4 in Newton- und in Horner-artiger Form auf.

c) Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|p_4(x) - y(x)|$ im Intervall $[1, 3]$ an unter der Annahme, dass die Tabellenwerte zu der Funktion $y(x) = \int_1^x \ln(t)dt$ gehören.

Hinweis: Für das Knotenpolynom ist keine Extremwertbetrachtung gefordert, sondern eine einfache Abschätzung ausreichend.

2+2+6 = 10 Punkte

Musterlösung

a) Newton-Schema:

$$
\begin{array}{l|lllllllll}
x_0 = 1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & \searrow & & & & & & & \\
x_1 = 1.5 & 0.4055 & \to & \boxed{0.8110} & & & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & & & & \\
x_2 = 2 & 0.6931 & \to & 0.5754 & \to & \text{-}0.2356 & & & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & & \\
x_3 = 2.5 & 0.9163 & \to & 0.4463 & \to & \boxed{\text{-}0.1291} & \to & 0.0710 & & \\
 & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\
x_4 = 3 & 1.0986 & \to & \boxed{0.3646} & \to & \text{-}0.0816 & \to & 0.0316 & \to & \boxed{\text{-}0.0197}
\end{array}
$$

b) Interpolationspolynom in Newton-Form:

$$
\begin{aligned}
p_4(x) = 0 &+ 0.811(x-1) - 0.2356(x-1)(x-1.5) + 0.0710(x-1)(x-1.5)(x-2) - \ldots \\
&- 0.0197(x-1)(x-1.5)(x-2)(x-2.5)
\end{aligned}
$$

Interpolationspolynom in Horner-artiger Form:

$$
p_4(x) = 0 + (x-1)\Big\{0.8110 + (x-1.5)\Big[-0.2356 + (x-2)\Big(0.0710 + (x-2.5)\cdot(-0.0197)\Big)\Big]\Big\}
$$

c) (Sehr einfache und grobe) Abschätzung für den Maximalwert, den das Knotenpolynom in dem gegebenen Intervall annimmt:

$$\max_{x\in[1,3]} |\omega(x)| = \max_{x\in[1,3]} |x-1|\cdot|x-1.5|\cdot|x-2|\cdot|x-2.5|\cdot|x-3| \leq 2\cdot 1.5\cdot 1\cdot 1.5\cdot 2 = 9$$

Die Ableitungen der zu interpolierenden Funktion lauten wie folgt:

$$y'(x) = \ln(x), \quad y''(x) = \frac{1}{x}, \quad y'''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad y^{(4)}(x) = \frac{2}{x^3}, \quad y^{(5)}(x) = -\frac{6}{x^4}$$

Abschätzung für das Maximum der fünften Ableitung im gegebenen Intervall (eigentlich Supremum, aber die Funktion ist stetig und das Intervall kompakt):

$$\max_{\xi\in[1,3]} |y^{(5)}(\xi)| = \left|-\frac{6}{1}\right| = 6 \quad \text{(Monotonieargument)}$$

Das Kombinieren der Teilresultate liefert die endgültige Fehlerabschätzung:

$$\max_{x\in[1,3]} |p_4(x) - y(x)| \leq \max_{x\in[1,3]} |\omega(x)| \frac{1}{5!} \max_{\xi\in[1,3]} |y^{(5)}(\xi)| \leq 9 \cdot \frac{1}{120} \cdot 6 = \frac{9}{20} = 0.45$$