Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

1. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02

Sonderaufgaben

Die Sonderaufgaben werden in der ersten Übungsstunde behandelt.

Aufgabe 1:

a) Welche der folgenden Abbildungen definieren Normen im $\mathbb{R}^2$?

$$x \mapsto |x_1|, \qquad x \mapsto 5|x_1| + 2|x_2|, \qquad x \mapsto \max(4|x_1|, |x_2|),$$
$$x \mapsto x_1 + x_2, \qquad x \mapsto \sqrt{x_1 + x_2}, \qquad x \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$x \mapsto |x_1| + |x_2|, \quad x \mapsto \max(|x_1|, |x_2|)$$

b) Skizzieren Sie die Einheitssphären $\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ zu den Normen in a).

Aufgabe 2:
Sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Berechnen Sie $\|A\|_\infty$, $\|A\|_1$ und $\|A\|_2$.

Hinweis: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ist

a) $\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ (Zeilensummen–Norm),
b) $\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ (Spaltensummen–Norm),
c) Sei $\lambda_{\max}(A^TA)$ der größte Eigenwert von A^TA. Dann ist
$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} \qquad \text{(Spektral–Norm).}$$
(Beachten Sie hierzu auch Aufgabe 1b) der Hausaufgaben.)

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch
$$F(x) := \|Ax - b\|_2^2.$$

a) Zeigen Sie:
$$\nabla F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^TAx = A^Tb.$$

b) Zeigen Sie: Falls zusätzlich $m \ge n$ und $\text{Rang}(A) = n$, so ist A^TA symmetrisch positiv definit.

Hinweis: $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch positiv definit,* falls $B^T = B$ und $x^TBx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt. (2+2 Punkte)

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie ein Polynom minimalen Grades, das durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, -3)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 2)$ und $(x_3, y_3) = (4, 7)$ verläuft. (3 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $b^{(1)} = (2, 1, 2)^T$ und $b^{(2)} = (3, 7, 8)^T$. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax^{(i)} = b^{(i)}$, $i = 1, 2$ mittels LR–Zerlegung ohne Pivotisierung. (4 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei

$$M_a = \begin{pmatrix} 2a & a & -a & -a \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4a & 4 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung der Matrix M_a ohne Pivotisierung. Geben Sie auch an, für welche a sich diese Zerlegung durchführen läßt.

b) Für welche a verschwindet die Determinante von M_a?

c) Sei nun $a = 2$. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems $M_2\, x = b$ mit $b = (1, 2, 3, 4)^T$.

(3+1+2 Punkte)

Aufgabe 5:
Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -6 \\ -2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die Gleichung $Ax = b$ durch LR–Zerlegung mit Spaltenpivotisierung, und geben Sie auch die Permutationsmatrix P mit $LR = PA$ an. (4 Punkte)

Abgabe bis Mo, 06.05.2002, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

Differentialgleichungen und Numerik, SS 02
Lösungen zu Übung 1 (Aufgaben 1–3)

Aufgabe 1:
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x) := \|Ax - b\|_2^2.$$

a) Zeigen Sie:
$$\nabla F(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^T A x = A^T b.$$

b) Zeigen Sie: Falls zusätzlich $m \geq n$ und $\mathrm{Rang}(A) = n$, so ist $A^T A$ symmetrisch positiv definit.

Hinweis: $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch positiv definit,* falls $B^T = B$ und $x^T Bx > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$ gilt.

Lösung:

a) Wir berechnen $(\nabla F)(x)$. Es ist $F(x) = \|Ax - b\|_2^2 = x^T A^T Ax - 2x^T A^T b + b^T b$ oder anders geschrieben
$$F(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pk}\, a_{pl}\, x_k\, x_l - 2 \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pl}\, b_p\, x_l + \sum_{p=1}^{m} b_p^2.$$
Für $1 \leq j \leq n$ erhalten wir
$$\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pk}\, a_{pl}\, \frac{\partial}{\partial x_j}(x_k\, x_l) - 2 \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pl}\, b_p\, \frac{\partial}{\partial x_j} x_l.$$
Nun ist $\frac{\partial}{\partial x_j}(x_k\, x_l) = \delta_{jk}\, x_l + \delta_{jl}\, x_k$ und $\frac{\partial}{\partial x_j} x_l = \delta_{jl}\, x_l$. Hierbei ist δ_{ij} das Kronecker–Symbol[1]. Also gilt weiter
$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) &= \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pk}\, a_{pl}\, (\delta_{kj}\, x_l + \delta_{lj}\, x_k) - 2 \sum_{p=1}^{m} a_{pj}\, b_p \\
&= 2 \sum_{k,l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pk}\, a_{pl}\, \delta_{kj}\, x_l - 2\, (A^T b)_j \\
&= 2 \sum_{l=1}^{n} \sum_{p=1}^{m} a_{pj}\, a_{pl}\, x_l - 2\, (A^T b)_j \\
&= 2\, (A^T Ax)_j - 2\, (A^T b)_j.
\end{aligned}$$

Damit erhält man sofort
$$(\nabla F)(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A^T Ax = A^T b.$$

[1] Das Kronecker–Symbol ist definiert durch
$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1; & i = j, \\ 0; & i \neq j. \end{cases}$$

b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m > n$ und A habe vollen Rang, d. h. die Spalten von A seien linear unabhängig. Dann ist $B := A^T A$ symmetrisch positiv definit, denn

$$B^T = (A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A = B.$$

Sei $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$. Dann gilt

$$x^T Bx = x^T A^T Ax = (Ax)^T (Ax) = \|Ax\|_2^2 \geq 0.$$

Definition der Norm (i) besagt: $x^T Bx = \|Ax\|_2^2 = 0$ nur, falls $Ax = 0$. Da A vollen Rang hat, muß daher $x = 0$ sein. Also gilt für $x \neq 0$ $x^T Bx > 0$, womit alles gezeigt ist.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie ein Polynom minimalen Grades, das durch die Punkte $(x_0, y_0) = (0, -3)$, $(x_1, y_1) = (1, 1)$, $(x_2, y_2) = (2, 2)$ und $(x_3, y_3) = (4, 7)$ verläuft.

Lösung: Die Interpolationsbedingungen lauten

$$y_i = a_0 + a_1\, x_i + a_2\, x_i^2 + \ldots + a_n\, x_i^n, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem. In der vorliegenden Aufgabe ist $n = 3$, $N = 4$. Man erhält als Systemmatrix

$$V_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{pmatrix}$$

und als rechte Seit $y = (-3, 1, 2, 7)^T$. Es ist also das lineare Gleichungssystem $V_3 a = y$ zu lösen. Man löst dieses Gleichungssystem z. B. mit dem Gauß–Algorithmus und erhält als Ergebnis $a = (-3, \frac{13}{2}, -3, \frac{1}{2})^T$. Das gesuchte Polynom lautet daher $p_3(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{13}{2}x - 3$.

Aufgabe 3:
Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

und die Vektoren $b^{(1)} = (2, 1, 2)^T$ und $b^{(2)} = (3, 7, 8)^T$. Lösen Sie die Gleichungssysteme $Ax^{(i)} = b^{(i)}$, $i = 1, 2$ mittels LR–Zerlegung ohne Pivotisierung.

Lösung: Zunächst berechnet man die LR-Zerlegung (ohne Pivotisierung) von A:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ \mathbf{0.5} & 1 & -0.5 \\ \mathbf{0.5} & 1 & 0.5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ \mathbf{0.5} & 1 & -0.5 \\ \mathbf{0.5} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ 0.5 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Anschließend brechenen wir die Lösungen der beiden Gleichungssystem durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Beachten Sie: Die LR–Zerlegung wird nur *einmal* berechnet.

$$Ax^{(i)} = b^{(i)}, i = 1, 2 \Leftrightarrow LRx^{(i)} = b^{(i)}, i = 1, 2 \Leftrightarrow Ly^{(i)} = b^{(i)}, Rx^{(i)} = y^{(i)}, i = 1, 2.$$

$i = 1:$

$$Ly^{(1)} = b^{(1)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0.5 & 1 & 0 & 1 \\ 0.5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \\ y_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Rx^{(1)} = y^{(1)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ x_3^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0.5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$i = 2:$

$$Ly^{(2)} = b^{(2)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0.5 & 1 & 0 & 7 \\ 0.5 & 1 & 1 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \\ y_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 11/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Rx^{(2)} = y^{(2)} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -0.5 & 11/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1^{(2)} \\ x_2^{(2)} \\ x_3^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

2. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02

Aufgabe 1:
Gegeben seien die Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie für jede der drei Matrizen B, C, D, ob eine eindeutige LR–Zerlegung ohne Pivotisierung existiert. Geben Sie ggf. alle möglichen LR–Zerlegungen an. (6 Punkte)

Programmentwurf zur **Cholesky–Zerlegung:**

Für $i = 1, 2, \ldots, n$:
  für $k = 1, 2, \ldots, i-1$:
    $a_{i,k} \leftarrow a_{i,k} - \sum_{j<k} a_{i,j}\, a_{k,j}$;
  diag $\leftarrow a_{i,i}$;
  für $j = 1, 2, \ldots, i-1$:
    $h \leftarrow a_{i,j}/a_{j,j}$;
    diag $\leftarrow$ diag $- a_{i,j}\, h$;
    $a_{i,j} \leftarrow h$;
  falls diag $< 10^{-5}\, a_{i,i}$ **Abbruch.**
  $a_{i,i} \leftarrow$ diag.

Aufgabe 2:
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 13 & -18 \\ -6 & 5 & -18 & 33 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie für jede der beiden Matrizen A, B, ob sie symmetrisch positiv definit ist.
b) Berechnen Sie die LDL^T–Zerlegung für B mit dem Cholesky–Verfahren.
c) Sei $b = (2, -1, -1, 1)^T$. Lösen Sie $Bx = b$ mit Hilfe der in Aufgabenteil b) berechneten LDL^T–Zerlegung.

(2+4+2 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems $Ax = b$, indem Sie jeweils zwei Schritte des

a) Gesamtschrittverfahrens,

b) Einzelschrittverfahrens

mit dem Startwert $x^0 = (1, 1, 1)^T$ durchführen. (4+4 Punkte)

Aufgabe 4: (Steepest Descent Method)
Ziel dieser Aufgabe ist es, ein iteratives Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme für symmetrisch positiv definite Matrizen herzuleiten.

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Ferner sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\, x^T A x - x^T b.$$

a) Zeigen Sie: $x^* \in \mathbb{R}^n$ ist Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ genau dann, wenn x^* das Funktional Φ minimiert.

Die Idee des Steepest Descent Verfahrens ist, ausgehend von einer Näherung x^k die Richtung r^k des steilsten Abstiegs zu bestimmen. In Richtung von r^k wird dann eine Liniensuche durchgeführt: es wird das Minimum von $\Phi(x^k + t\, r^k)$, $t > 0$ berechnet. Wird das Minimum in $t = \alpha_k$ angenommen, so ist $x^{k+1} := x^k + \alpha_k\, r^k$ die neue Näherung. Eine erste Version des Verfahrens lautet:

Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Für $k = 0, 1, \ldots$ bis x^{k+1} „genügend genau“:

1. Berechne Abstiegsrichgung r^k.
2. (Liniensuche) Bestimme das Minimum von
$$g_k(t) := \Phi(x^k + t\, r^k), \qquad t > 0.$$
3. Wird dieses Minimum bei $t = \alpha_k$ angenommen, setze
$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k\, r^k.$$

b) Zeigen Sie: Mit $r^k := b - Ax^k = -(\nabla\Phi)(x^k)$ ist die Richtung des steilsten Abstiegs von Φ an der Stelle x^k gegeben.

c) Zeigen Sie: Das Minimum von g_k wird an der Stelle
$$t = \frac{(r^k)^T\, r^k}{(r^k)^T A r^k}$$
angenommen.

d) Zeigen Sie, daß durch die Abbildung $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definiert durch $\|x\|_A = (x^T Ax)^{1/2}$, eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert wird. $\|\cdot\|_A$ wird *Energie–Norm* genannt.

(3+3+2+2 Punkte)

Das **Steepest Descent Verfahren** lautet damit:

Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Für $k = 0, 1, \ldots$ bis x^{k+1} „genügend genau“:
1. $r^k = b - Ax^k$,
2. $\alpha_k = \dfrac{(r^k)^T r^k}{(r^k)^T A r^k}$,
3. $x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k$.

Bemerkung: Man kann zeigen, daß das **Steepest Descent Verfahren** für symmetrisch positiv definite Matrizen konvergiert, und daß folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\|x^{k+1} - x^*\|_A \leq \frac{\mathrm{cond}_2(A) - 1}{\mathrm{cond}_2(A) + 1} \|x^k - x^*\|_A.$$

Dabei bezeichnet $\mathrm{cond}_2(A)$ die Kondition von A.

Aufgabe 5:
Vorgelegt sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Berechen Sie eine Näherunglösung x^3 des Gleichungssystems $Ax = b$ indem Sie drei Schritte des Steepest Descent Verfahrens aus Aufgabe 4 mit dem Startwert $x^0 = (0, 0)^T$ durchführen.

Hinweis: Verwenden Sie einen Taschenrechner oder schreiben Sie ein kleines Programm.

(4 Punkte)

Abgabe bis Mo., 27.05.2002, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser   Dipl. Math. J. Vorloeper

3. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02

Aufgabe 1:
Die Gleichung

$$\cos x = x$$

besitzt genau eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}$. Mit dem klassischen Newton–Verfahren zum einen und mit einer Fixpunktiteration zum anderen sollen Näherungswerte zu x^* berechnet werden. Als Startwert wird jeweils $x_0 = 0.1$ gewählt.

a) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newton–Verfahren auf.

b) Stellen Sie die Iterationsvorschrift für die Fixpunktiteration auf und begründen Sie, weshalb die Fixpunktiteration mit dem Startwert $x_0 = 0.1$ konvergiert.

c) Führen Sie mit beiden Verfahren jeweils 10 Iterationen aus, und begründen Sie das Konvergenzverhalten.

(1+3+2 Punkte)

Aufgabe 2:
Gesucht sind Näherungslösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5\,x^2 - 6\,x\,y + 5\,y^2 - 32 &= 0, \\ 9\,x^2 - 16\,y^2 - 16 &= 0. \end{aligned}$$

a) Verschaffen Sie sich zunächst mit Hilfe einer Skizze einen Überblick über die Anzahl und die Lage der Nullstellen.

b) Berechnen Sie Approximationen zu den Lösungen, indem Sie jeweils zwei Schritte des Newton– als auch des vereinfachten Newton–Verfahrens durchführen.

(2+4 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
f_i	-3	1	2	7

a) Bestimmen Sie mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom dritten Grades durch die obigen Wertepaare.

b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom in der Newton Form.

c) Wie lautet das Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ (Berechnung nach a) und b)) bzw. der Punkte $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ und $(x_5, f_5) = (3, 6)$ (Berechnung nach b))?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4:
Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t)\, dt$$

soll im Intervall $I = [0, \frac{\pi}{2}]$ äquidistant so tabelliert werden, daß bei linearer Interpolation der Interpolationsfehler für jedes $x \in I$ kleiner als $\frac{1}{4}10^{-4}$ ist.

Wie groß darf der Stützstellenabstand h dann höchstens sein und wieviele Funktionswerte müssen in die Tabelle aufgenommen werden? (3 Punkte)

Aufgabe 5: (Kubische Splines)
Gegeben seien $n+1$ Stützstellen $x_0 < \ldots < x_n$ mit zugehörigen Funktionswerten f_i, $i = 0, \ldots, n$. Es soll ein kubischer Spline $S(x)$ durch diese Punkte bestimmt werden, der zweimal stetig differenzierbar ist. Der Einfachheit halber betrachten wir hier nur den Fall mit äquidistanten Stützstellen, d. h. $x_{i+1} - x_i = h$, $i = 0, \ldots, n-1$. Bezeichnet man mit $S_i := S|_{[x_i, x_{i+1}]}$ das kubische Polynom auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$, so läßt sich diese Forderung schreiben als

$$\begin{array}{llll} (1) & S_i(x_i) = f_i, & S_i(x_{i+1}) = f_{i+1} & \text{für} \quad i = 0, \ldots, n-1, \\ (2) & S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1}), & S_i''(x_{i+1}) = S_{i+1}''(x_{i+1}) & \text{für} \quad i = 0, \ldots, n-2. \end{array}$$

Die Gleichungen (1) sind die Interpolationsbedingungen, die Gleichungen (2) die Übergangsbedingungen, die die zweifache Differenzierbarkeit gewährleisten. Weil dies zusammen lediglich $4n-2$ Gleichungen für die $4n$ Unbekannten a_i, b_i, c_i, d_i der Polynome $S_i(x) = a_i + b_i\,(x - x_i) + c_i\,(x - x_i)^2 + d_i\,(x - x_i)^3$ sind, fordert man zusätzlich

$$(3) \qquad\qquad S''(x_0) = S''(x_n) = 0,$$

um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Dieses lineare Gleichungssystem wird in mehreren Schritten gelöst.

a) Nehmen Sie an, Sie kennen bereits die zweiten Ableitungen $m_i := S''(x_i)$ in den Stützstellen. Berechnen Sie daraus den Spline und die Koeffizienten a_i, b_i, c_i, d_i unter Verwendung der Gleichungen (1).

b) Gewinnen Sie aus (2) und (3) eine Gleichung für m_i, m_{i+1} und m_{i+2}, ($i = 0, \ldots, n-2$). Fassen Sie diese Gleichungen zu einem Gleichungssystem für die m_i zusammen.

c) Berechnen Sie den zweimal stetig differenzierbaren kubischen Spline S mit der Randbedingung $S''(x_0) = S''(x_3) = 0$ durch die Punkte $(x_0, f_0) = (0, 1)$, $(x_1, f_1) = (1, 1)$, $(x_2, f_2) = (2, 2)$, $(x_3, f_3) = (3, 2)$.

(3+3+3 Punkte)

Bemerkungen:

a) Statt (3) werden oft andere Forderungen gestellt, z. B. $S'(x_0) = S'(x_n)$, $S''(x_0) = S''(x_n)$ (periodische Randbedingungen) oder $S_0 = S_1$, $S_{n-1} = S_{n-2}$ (Keine–Knoten–Bedingung) Dadurch verändern sich jedoch nur wenige Zeilen des Gleichungssystems.

b) Einen guten Überblick über Splines bietet das Buch von C. de Boor: *A Practical Guide to Splines*, Applied Mathematical Sciences 27, Springer–Verlag, New York, 1978.

Abgabe bis Mo., 10.06.2002, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

3. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02 Lösungen

Aufgabe 1:

a) Setze $f(x) := \cos(x) - x$, dann $f'(x) = -\sin(x) - 1$. Die Newton–Iteration lautet damit

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{f(x_k}{f'(x_k)} \\ &= x_k + \frac{\cos(x_k) - x_k}{\sin(x_k) + 1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

mit $x_0 = 0.1$.

b) Setze $g(x) := \cos(x)$. Die Fixpunktiteration lautet

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= g(x_k) \\ &= \cos(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

mit $x_0 = 0.1$ als Startwert.
Setze $\Omega := [0, 1]$ und zeige, daß g die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes von Banach erfüllt:

(i) Ω ist abgeschlossen (klar),

(ii) g ist Selbstabbildung (klar),

(iii) seien $x, y \in \Omega$, dann

$$\begin{aligned} |g(x) - g(y)| &\leq \max_{\xi \in \Omega} |g'(\xi)| \cdot |x - y| \\ &= \max_{\xi \in \Omega} |\sin(\xi)| \cdot |x - y| \\ &= \sin(1)| \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Da $0 < \sin(1) < 1$, erfüllt g die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, d. h. g hat genau einen Fixpunkt $x^* \in \Omega$ und die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert $x \in \Omega$, insbesondere für $x_0 = 0.1$.

c) Mit dem Taschenrechner erhält man die Werte

k	Fixpunktiteration	Newton–Verfahren
0	0.10000000	0.10000000
1	0.99500417	0.91376339
2	0.54449940	0.74466424
3	0.85538671	0.73909197
4	0.65592666	0.73908513
5	0.79248310	0.73908513
6	0.70207927	0.73908513
7	0.76350103	0.73908513
8	0.72241964	0.73908513
9	0.75020806	0.73908513
10	0.73154703	0.73908513

Das Newton–Verfahren liefert schon nach vier Iterationen acht richtige Dezimalstellen. Die Fixpunktiteration hat nach zehn Iterationen gerade zwei richtige Dezimalstellen. Begründung:

Das Newton–Verfahren ist (lokal) quadratisch konvergent. Die Fixpunktiteration ist ein Verfahren erster Ordnung.

Aufgabe 3:

a) Die Interpolationspolynome P_n lauten in der Lagrange–Form

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, l_{jn}(x), \qquad l_{jn} = \prod_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_3(x) &= \sum_{j=0}^{3} f(x_j)\, l_{j3}(x) \\
&= (-3)\cdot\frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-2}{0-2}\cdot\frac{x-4}{0-4} \\
&\quad +1\cdot\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-4}{1-4} \\
&\quad +2\cdot\frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-4}{2-4} \\
&\quad +7\cdot\frac{x-0}{4-0}\cdot\frac{x-1}{4-1}\cdot\frac{x-2}{4-2} \\
&= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{13}{2}x - 3.
\end{aligned}$$

b) Berechne dividierte Differenzen durch Rekursion

x_i	0	1	2	3
0	-3			
		4		
1	1		$-\frac{3}{2}$	
		1		$\frac{1}{2}$
2	2		$\frac{1}{2}$	
		$\frac{5}{2}$		
4	7			

Somit ergibt sich für das Interpolationsploynom

$$P_3(x) = -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2).$$

c) Nehmen wir den Punkt $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ hinzu, bekommen wir in der Lagrange–Form

$$\begin{aligned}
P_4(x) &= \sum_{j=0}^{4} f(x_j)\, l_{j4}(x) \\
&= (-3)\cdot\frac{x-1}{0-1}\cdot\frac{x-2}{0-2}\cdot\frac{x-4}{0-4}\cdot\frac{x+1}{0+1} \\
&\quad +1\cdot\frac{x-0}{1-0}\cdot\frac{x-2}{1-2}\cdot\frac{x-4}{1-4}\cdot\frac{x+1}{1+1} \\
&\quad +2\cdot\frac{x-0}{2-0}\cdot\frac{x-1}{2-1}\cdot\frac{x-4}{2-4}\cdot\frac{x+1}{2+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +7 \cdot \frac{x-0}{4-0} \cdot \frac{x-1}{4-1} \cdot \frac{x-2}{4-2} \cdot \frac{x+1}{4+1} \\
& +1 \cdot \frac{x-0}{-1-0} \cdot \frac{x-1}{-1-1} \cdot \frac{x-2}{-1-2} \cdot \frac{x-4}{-1-4} \\
= \; & \frac{7}{15}x^4 - \frac{83}{30}x^3 + \frac{53}{15}x^2 + \frac{83}{30}x - 3.
\end{aligned}
$$

Berechnung nach Newton (wir ergänzen die Tabelle aus b))

x_i	0	1	2	3	4
0	-3				
		4			
1	1		$-\frac{3}{2}$		
		1		$\frac{1}{2}$	
2	2		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{15}$
		$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{30}$	
4	7		$\frac{13}{30}$		
		$\frac{6}{5}$			
-1	1				

und bekommen folgendes Interpolationspolynom:

$$
\begin{aligned}
P_4(x) &= P_3(x) + \frac{7}{15}x(x-1)(x-2)(x-4) \\
&= -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2) + \frac{7}{15}x(x-1)(x-2)(x-4).
\end{aligned}
$$

Ergänzen wir zusätzlich noch $(x_5, f_5) = (3, 6)$, dann erhalten wir folgende dividierte Differenzen:

x_i	0	1	2	3	4	5
0	-3					
		4				
1	1		$-\frac{3}{2}$			
		1		$\frac{1}{2}$		
2	2		$\frac{1}{2}$		$\frac{7}{15}$	
		$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{30}$		$-\frac{29}{120}$
4	7		$\frac{13}{30}$		$-\frac{31}{120}$	
		$\frac{6}{5}$		$-\frac{29}{60}$		
-1	1		$-\frac{1}{20}$			
		$\frac{5}{4}$				
3	6					

Das Interpolationspolynom lautet somit

$$
\begin{aligned}
P_5(x) &= P_4(x) - \frac{29}{120}x(x-1)(x-2)(x-4)(x+1) \\
&= -3 + 4x - \frac{3}{2}x(x-1) + \frac{1}{2}x(x-1)(x-2) + \frac{7}{15}x(x-1)(x-2)(x-4) \\
&\quad - \frac{29}{120}x(x-1)(x-2)(x-4)(x+1).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4: Sei $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = \frac{\pi}{2}$. $P(f|x_i, x_{i+1})$ bezeichne das lineare Interpolationspolynom zu f an den Stützstellen x_i und x_{i+1}.

Dann gibt es zu jedem $x \in I$ ein $i \in \{0, \ldots N-1\}$ mit $x \in [x_i, x_{i+1}]$ und ein $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$ mit

$$
\left| f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x) \right| = (x_i - x)\,(x_{i+1} - x)\,\frac{f''(\xi_i)}{2!}.
$$

Bei äquidistanter Unterteilung (s. auch Bemerkung) und $f \in C^2(I)$, läßt sich der Interpolationsfehler abschätzen durch

$$\left|f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x)\right| \leq \frac{h^2}{4} \frac{\max_{\xi\in I} |f''(\xi)|}{2!}.$$

Die ersten beiden Ableitungen von f lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin^2(x), \\ f''(x) &= 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\left|f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x)\right| \leq \frac{h^2}{4} \frac{\max_{\xi\in I} |\sin(2\xi)|}{2!} = \frac{h^2}{8}.$$

Soll der Interpolationsfehler kleiner als $\frac{1}{4}10^{-4}$ sein, also

$$\frac{h^2}{8} \leq \frac{1}{4}10^{-4},$$

so muß $h \leq \frac{\sqrt{2}}{100}$ gewählt werden.

Mit obiger Notation ist die Anzahl der benötigten Funktionswerte gleich $N+1$. Der Anzahl N der Teilintervalle muß so gewählt werden, daß

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{N} \leq h$$

gilt. Da N ganzzahlig ist, bedeutet das

$$N = \left\lceil \frac{\pi}{2h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi \cdot 100}{2\cdot\sqrt{2}} \right\rceil = 112.$$

Bemerkung: Dies ist keine äquidistante Tabellierung mehr. Wir haben hier $x_{i+1} - x_i \leq h$, wobei jedoch $x_{i+1} - x_i \approx x_{j+1} - x_j$ für $i, j \in \{0, \dots, N-1\}$.

Aufgabe 5:

a) S_i'', $i = 0, \dots, n-1$, ist eine lineare Funktion, die man mit Hilfe der m_i darstellen kann

$$S_i''(x) = m_i \frac{x_{i+1} - x}{h} + m_{i+1} \frac{x - x_i}{h}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Durch Integration erhält man daraus

$$S_i'(x) = -m_i \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} + m_{i+1} \frac{(x - x_i)^2}{2h} + A_i, \quad i = 0, \dots, n-1. \tag{4}$$

und

$$S_i(x) = m_i \frac{(x_{i+1} - x)^3}{6h} + m_{i+1} \frac{(x - x_i)^3}{6h} + A_i\,(x - x_i) + B_i, \quad i = 0, \dots, n-1 \tag{5}$$

mit Integrationskonstanten A_i, B_i, $i = 0, \dots, n-1$. Aus (1) erhält man für A_i und B_i die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_i &= m_i \frac{h^2}{6} + B_i \\ f_{i+1} &= m_{i+1} \frac{h^2}{6} + A_i\,h + B_i \end{aligned}$$

und daher

$$A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{6}(m_{i+1} - m_i), \tag{6}$$

$$B_i = f_i - m_i \frac{h^2}{6} \tag{7}$$

für $i = 0, \ldots, n-1$. Die Koeffizienten $a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i$ lassen sich damit berechnen und lauten

$$\begin{aligned} a_i &= f_i, \\ c_i &= \frac{m_i}{2}, \\ b_i &= S'(x_i) = -\frac{m_i\, h}{2} + A_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{2m_i + m_{i+1}}{6}\, h, \\ d_i &= \frac{S'''(x_i)}{6} = \frac{m_{i+1} - m_i}{6h}. \end{aligned}$$

Damit haben wir den Spline mit Hilfe der m_i dargestellt.

b) Setzt man die Gleichungen (6), (7) in (4), (5) ein, erhält man zunächst

$$S_i'(x) = -m_i\, \frac{(x_{i+1} - x)^2}{2h} + m_{i+1}\, \frac{(x - x_i)^2}{2h} + \frac{f_{i+1} - f_i}{h} - \frac{h}{6}(m_{i+1} - m_i), \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

und daraus mit der Bedingung $S_i'(x_{i+1}) = S_{i+1}'(x_{i+1})$ die Gleichung

$$m_i + 4\, m_{i+1} + m_{i+2} = \frac{6}{h^2}(f_{i+2} - 2 f_{i+1} + f_i), \quad i = 0, \ldots, n-2.$$

Wegen (3) gilt

$$m_0 = m_n = 0.$$

Insgesamt ergibt sich das System

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & & \\ 1 & 4 & \ddots & & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} f_0 - 2\, f_1 + f_2 \\ f_1 - 2\, f_2 + f_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_{n-2} - 2\, f_{n-1} + f_n \end{pmatrix},$$

das man effizient mit dem Cholesky–Verfahren lösen kann.

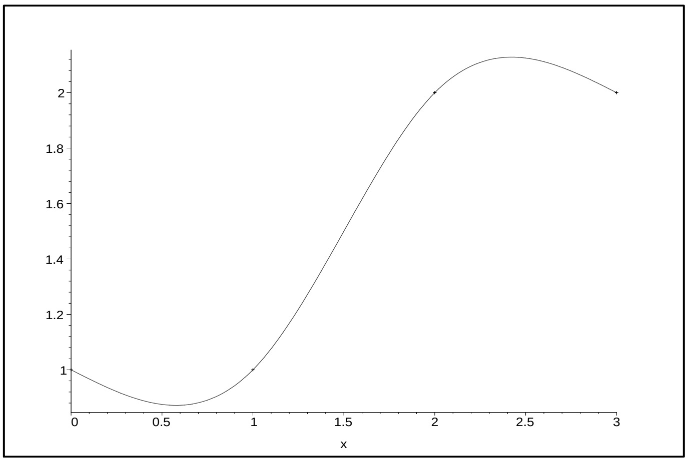
c) Wir haben das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} f_0 - 2\, f_1 + f_2 \\ f_1 - 2\, f_2 + f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Wir erhalten $(m_0, m_1, m_2, m_3)^T = (0, 2, -2, 0)^T$ und daraus

i	a_i	b_i	c_i	d_i
0	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	1	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$
2	2	$\frac{2}{3}$	-1	$\frac{1}{3}$

Abschließend noch ein Plot des Splines:



Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

4. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Wertetabelle

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & -1 & 0 & 1 \\ \hline y_i & -2 & -1 & 1 \end{array}.$$

Die Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = r\,x + s\,(1 - x - x^2)$$

liegen. Bestimmen Sie die Parameter $r, s \in \mathbb{R}$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate

a) durch Lösung der Normalgleichungen (siehe auch Übung 1, Aufgabe 1),
b) mit Hilfe der QR–Zerlegung

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei M ein Teilraum des $\mathbb{R}^n$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß für $y^* \in M$ die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) $\min_{y \in M} \|y - b\|_2 = \|y^* - b\|_2$,
(ii) $y^* - b \perp M$.

(3 Punkte)

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß jede(r) Student(in), der/die mit Differentialgleichungen beschäftigt ist, keine Probleme mit dem Integrieren der einfachsten Funktionen hat.

Die „einfachsten“ Funktionen sind nicht nur

$$e^x, \quad x^k, \quad \sin x, \ldots$$

sondern auch

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{(\cos x)^2}, \quad \frac{x}{1+x^2}, \quad x^k e^x, \quad x^k \sin x, \quad \frac{1}{x\,(\log x)^k}, \quad e^{\sin x} \cos x, \ldots$$

Aufgabe 3:
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit $\mathring{I} \neq \emptyset$ und $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig. $y : I \to \mathbb{R}$ heißt Lösung der *linearen Differentialgeichung erster Ordnung* $y' = a\,y + b$, falls

a) y stetig ist und

b) $y|_{\mathring{I}}$ ist differenzierbar mit $y'(t) = a(t)\, y(t) + b(t)$ für alle $t \in \mathring{I}$.

Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &:= \{y : I \to \mathbb{R} : \ y \text{ ist Lösung von } y' = a\, y\}, \\ \mathcal{L} &:= \{y : I \to \mathbb{R} : \ y \text{ ist Lösung von } y' = a\, y + b\}. \end{aligned}$$

a) Sei $y_p \in \mathcal{L}$. Zeigen Sie

$$\mathcal{L} = y_p + \mathcal{H}.$$

b) Es seien $t_0 \in I$, $A : I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $A(t) := \int_{t_0}^t a(\tau)\, d\tau$ und $y : I \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $y \in \mathcal{H}$ genau dann gilt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$y(t) = c\, e^{A(t)} \qquad \forall\, t \in I.$$

c) Es seien $t_0 \in I$, $A : I \to \mathbb{R}$ sei definiert wie in b) und $c : I \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $c(t) := \int_{t_0}^t e^{-A(\tau)}\, b(\tau)\, d\tau$. Dann wird durch $y_p : I \to \mathbb{R}$, definert durch

$$y_p(t) := c(t)\, e^{A(t)} \qquad \forall\, t \in I$$

eine partikuläre Lösung definiert, d. h. y_p ist *eine* Lösung von $y' = a\, y + b$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 4:

a) Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der Differentialgleichung

$$y' = -\tan(t)\, y + \tan(t), \quad I = (-\pi/2, \pi/2).$$

b) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \cos(t)\, e^y, \quad y(0) = -1.$$

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5:
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$. Vorgelegt sei die *Bernoulli–Differentialgeichung* $y' = ay + by^\alpha$. Substituiert man $u := y^{1-\alpha}$, so erhält man eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung. Bestimmen Sie auf diese Weise für ein geeignetes Intervall die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = -y + y^2, \quad y(0) = 1/2.$$

(4 Punkte)

Abgabe bis Mo., 24.06.2002, 12^{00} Uhr

5. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 02

Information zur Schein- und Vordiplomklausur

Die **Scheinklausur** für PhysikerInnen findet am Mittwoch, 24.07.2002, $14^{00} - 16^{00}$ Uhr im Roten Hörsaal statt. Die Einsicht ist voraussichtlich am Montag, 29.07.2002 von $8^{00} - 10^{00}$ Uhr im Raum 149 (Hauptgebäude). Die Teilnahme an der Klausur erfordert eine Anmeldung. Die Anmeldung erfolgt in den Kleingruppenübungen. Für InformatikerInnen ist es nicht möglich, diese Klausur als „Probeklausur“ mitzuschreiben.

Die **Vordiplomklausuren (P+I)** finden am Dienstag, 06.08.2002 gleichzeitig in mehreren Hörsälen statt. Die genaue Aufteilung der TeilnehmerInnen auf die einzelnen Räume wird erst etwa eine Woche vor der Klausur durch Aushang bekanntgegeben.

Für alle Klausuren gilt:

- Lichtbild- und Studentenausweis mitbringen sowie dokumentenechtes Schreibgerät,
- es sind keine Hilfsmittel erlaubt (Papier wird gestellt),
- weitere Informationen (Uhrzeit, Hörsaal, Einsicht,...) entnehmen Sie dem Schaukasten von Prof. Esser.

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie ein (reelles) Fundamentalsystem für $y'(t) = A\,y(t)$ in den Fällen

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$,

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 2:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(4 Punkte)

<u>Ansatz vom Typ der rechten Seite</u>

Wir betrachten eine lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung, bei der die rechte Seite von der Form

$$e^{\alpha t} \sum_{j=0}^{m} t^j \big(b_j \cos(\beta t) + c_j \sin(\beta t)\big)$$

ist. Ist dann $\gamma := \alpha + i\,\beta$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Vielfachheit von γ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so führt der Ansatz

$$y_p(t) := e^{\alpha t} t^k \sum_{j=0}^{m} t^j \big(d_j \cos(\beta t) + e_j \sin(\beta t)\big)$$

durch Koeffizientenvergleich auf eine partikuläre Lösung.

Aufgabe 3:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(t) - y'(t) = 3e^{2t}, \qquad y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0, \;\; y''(0) = 0.$$

Bestimmen sie eine partikuläre Lösung a) über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite und b) über Variation der Konstanten. (3+3 Punkte)

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = y^2(t) - 5\,t, \qquad y(1) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem

a) expliziten Euler–Verfahren,
b) verbesserten Euler–Verfahren,
c) klassischen Runge–Kutta–Verfahren

zur Schrittweite $h = \frac{1}{2}$ eine Näherung zu $y(2)$. (2+2+2 Punkte)

Abgabe bis Mo., 08.07.2002, 12^{00} Uhr

Sonderaufgaben

Die Sonderaufgaben werden in der Großübung am 12.07.2002 behandelt.

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = y^2(t) - 5\,t, \qquad y(1) = 2.$$

a) Formulieren Sie für obiges Anfangswertproblem die Iterationsvorschrift des impliziten Euler–Verfahrens zur Schrittweite $h = \frac{1}{8}$.
b) Die in jedem Zeitschritt zu lösende quadratische Gleichung in y_{k+1} besitzt jeweils zwei reelle Lösungen. Welche Lösung muß man im impliziten Euler–Verfahren verwenden?
c) Führen Sie einen Schritt des impliziten Euler–Verfahren zur Schrittweite $h = \frac{1}{8}$ durch, um eine Näherung zu $y(\frac{9}{8})$ zu berechnen.

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -\frac{y(t)}{\sqrt{t} - \frac{1}{2}}, \qquad y(1) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren sowie dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren Näherungen für $y(9)$ zu den Schrittweiten $h = 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ und kommentieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 3:
Sei y die Lösung des Anfangswertproblems

$$y''(t) = 2\,y(t) - t\,y'(t), \qquad y(2) = 5, \quad y'(2) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem

a) expliziten Euler–Verfahren,
b) impliziten Euler–Verfahren

und der Schrittweite $h = 1$ jeweils eine Approximation von $y(3)$ und $y'(3)$.