19.07.02

Diffnum Repetitorium

Klausur: 1. Aufg. Verständnis

L-R-ZERLEGUNG

Bsp.: $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \\ 9 & 10 & 31 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 3 & 4 & 10 \\ 9 & 10 & 31 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ + \\ \cdot(-3)\ + \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ + \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow R = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = L \cdot R \qquad Ax = b \iff L \cdot \underbrace{Rx}_{y} = b$$

(1) $Ly = b$ (Vorwärtseinsetzen!)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 13 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 3 - y_1 = 0 \\ y_3 = 13 - 3y_1 - y_2 = 4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = (3,0,4)^T}}$$

(2) $Rx = y$ (Rückwärtseinsetzen!)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = (3 - 9x_3 - 3x_2)/3 = \frac{(3-12+4)}{3} = -\frac{5}{3} \\ x_2 = 0 - x_3 = -\frac{4}{3} \qquad x_3 = \frac{4}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x = \left(-\tfrac{5}{3}, -\tfrac{4}{3}, \tfrac{4}{3}\right)^T}}$$

PIVOTISIERUNG (bei 0)

Bsp.: $PA = LR$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} + \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{0} & 6 \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \text{ Vertauschen } \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

QR-ZERLEGUNG

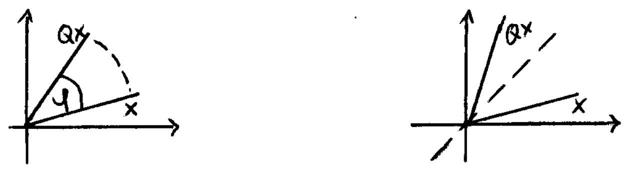
$A = QR \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Q orth. Matrix

$Ax = b \iff Q \cdot R_x = b$

orth. Matrix: Spalten von Q bilden Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$

$Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$

geometrische Bedeutung: - Spiegelungen - Drehungen



Drehung Spiegelung

$Q^T Q = I \qquad Ax = b \Leftrightarrow QRx = b$

$\Leftrightarrow \quad Rx = Q^T b$

CHOLESKY-ZERLEGUNG

Nur bei symmetrisch positiv definiten (spd) Matrizen anwendbar

A spd $\Leftrightarrow$ 1) A symmetrisch

2) $x^T A x > 0 \ , \ x \neq 0$

Eigenschaften von spd Matrizen:

1) $a_{ii} > 0$

2) $\det(A) \neq 0$

Cholesky-Zerlegung:

$A = L \cdot D \cdot L^T$

L: normierte untere Dreieckmatrix; D: Diagonalmatrix ($d_{ii} > 0$)

Die Cholesky-Zerlegung ist halb so aufwendig wie die LR-Zerlegung, da die Symmetrie ausgenutzt wird.

(In der Klausur wird der Algorithmus gegeben sein)

ITERATIVE VERFAHREN

$(Ax = b)$ $\begin{pmatrix} A \text{ sehr groß} \\ A \text{ dünn besetzt} \end{pmatrix}$

Gesamtschrittverfahren (GSV):

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{l=1}^{i-1} a_{il} \cdot x_l^k - \sum_{l=i+1}^{n} a_{il} \cdot x_l^k \right)$$

Einzelschrittverfahren (ESV):

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{l=1}^{i-1} a_{il} \cdot x_l^{k+1} - \sum_{l=i+1}^{n} a_{il} \cdot x_l^k \right)$$

Konvergenz: Starkes Zeilen (Spalten) Summenkriterium

A spd $\rightarrow$ ESV konvergiert

Bsp.: Löse $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Startvektor } x^0 = (0,0,0)^T$$

Frage: konvergiert GSV? Ja, da Zeilensummenkriterium erfüllt

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq i}}^{n} a_{il} \cdot x_l^k \right) \quad , \; i = 1 \ldots n$$

1. Schritt:

$$x_1^1 = \frac{1}{8} \left(-1 - 2 \cdot x_2^0 - 0 \cdot x_3^0 \right) = \frac{1}{8} \left(-1 - 2 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \right) = -\frac{1}{8}$$

$$x_2^1 = \frac{1}{8} \left(2 - 2 \cdot x_1^0 - 4 \cdot x_3^0 \right) = \frac{1}{8} \left(2 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \right) = \frac{1}{4}$$

$$x_3^1 = \frac{1}{-8} \left(1 - 1 \cdot x_1^0 - 4 \cdot x_2^0 \right) = \frac{1}{-8} \left(1 - 1 \cdot 0 - 4 \cdot 0 \right) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x^1 = \left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \right)^T}}$$

2. Schritt:

$$x_1^2 = \frac{1}{8} \left(-1 - 2 \cdot x_2^1 - 0 \cdot x_3^1 \right) = \frac{1}{8} \left(-1 - 2 \cdot \frac{1}{4} - 0 \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) \right) = -\frac{3}{16}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{8} \left(2 - 2 \cdot x_1^1 - 4 \cdot x_3^1 \right) = \frac{1}{8} \left(2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) \right) = \frac{11}{32}$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{8} \left(1 - 1 \cdot x_1^1 - 4 \cdot x_2^1 \right) = -\frac{1}{8} \left(1 - 1 \cdot \left(-\frac{1}{8} \right) - 4 \cdot \frac{1}{4} \right) = -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{x^2 = \left(-\frac{3}{16}, \frac{11}{32}, -\frac{1}{64} \right)^T}}$$

NICHTLINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Banachscher Fixpunktsatz
- Newton-Verfahren

Bsp.: $x = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$

Zeige: Die Gleichung besitzt nur im Intervall $D = [0,1]$ genau eine Lösung.

$$f : D \to \mathbb{R} \quad , \; f(x) = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}$$

Überprüfe Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1) D ist abgeschlossen

2) f ist Selbstabbildung. $f(D) \subseteq D$

f streng monoton steigend, d.h. $f(0) < f(1) \quad \forall x \in D$

$f(0) = \frac{1}{2} e^0 = \frac{1}{2}$

$f(1) = \frac{1}{2} e^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{e} < 1$

Hinweis: $e < 4$

3) Kontraktion $\quad |f(x) - f(y)| < L \cdot |x-y| \quad , L < 1$

wende Mittelwertsatz (MWS) an: Es genügt zu zeigen,

dass $\max\limits_{x \in D} |f'(x)| < 1$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)' = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0,1]} \left|\frac{1}{4} e^{\frac{x}{2}}\right| = \frac{1}{4} e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\sqrt{e} < 1$$

$\rightarrow$ Fixpunktiteration: $\quad x^{k+1} = f(x^k)$, $x^0 \in D$ ist konvergent

NEWTON-VERFAHREN

Bestimme Nullstelle einer Funktion: $\quad f(x) = 0$

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \qquad \text{(skalarer Fall)}$$

$$\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k - (\underline{f}'(\underline{x}^k))^{-1} \cdot \underline{f}(\underline{x}^k) \qquad \text{(Systeme)}$$

$$\Leftrightarrow (\underline{f}'(\underline{x}^k)) \cdot \underbrace{(\underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k)}_{=: \underline{s}^k} = -\underline{f}(\underline{x}^k)$$

1) Löse $\quad (\underline{f}'(\underline{x}^k)) \cdot \underline{s}^k = -\underline{f}(\underline{x}^k)$

2) $\underline{s}^k = \underline{x}^{k+1} - \underline{x}^k \quad \Rightarrow \quad \underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \underline{s}^k$

25.07.02

Newton Verfahren $(F(x)=0)$

Iterationsvorschrift

1) $(F'(x^k)) \cdot s^k = -F(x^k)$
2) $\underline{x}^{k+1} = \underline{x}^k + \underline{s}^k$

Beispiel:

$$2x^3 - 3y^2 = -1$$
$$3x^2 - 4y^3 = 1$$

Startwert $(x^0, y^0) = (1,1)$

$$F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) := \begin{pmatrix} 2x^3 - 3y^2 + 1 \\ 3x^2 - 4y^3 - 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems ist Nullstelle von F

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 & -6y \\ 6x & -12y^2 \end{pmatrix}$$

$$F(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$F'(x^0, y^0) = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$$

Löse $F'(x^0, y^0) \cdot s^0 = -F(x^0, y^0)$, d.h.

$$\begin{array}{cc|c} 6 & -6 & 0 \\ 6 & -12 & 2 \\ \hline 6 & -6 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \end{array} \quad \cdot(-1) +$$

$\Rightarrow s_2^0 = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \Rightarrow s_1^0 = (\ldots) = -\frac{1}{3}$

$$s^0 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Aufdatierung:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ y^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s_1^0 \\ s_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Das Newton-Verfahren konvergiert total quadratisch.

Interpolation mit Polynomen

Aufg.: Gegeben sind Stützstellen x_i, $i=0,\dots,n-1$
und Daten f_i.
Finde ein Polynom $P(f|x_0,\dots,x_{n-1})$ (minimalen Grades) mit
$$P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x_i)=f_i \qquad , i=0,\dots,n-1$$

1) zugehöriges Gleichungssystem $\rightsquigarrow$ Vandermonde Matrix
2) Lagrange - Form
3) Newton - Form

zu 1):
$$P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\cdot x^k$$

$\Rightarrow$ lineares Gleichungssystem
$$f_i=\sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{a_k}_{\text{zu bestimmen}}\, x_i^k \qquad , i=0,\dots,n-1$$

zu 2):
$$P(f|x_0,\dots,x_{n-1})(x)=\sum_{i=0}^{n-1} f_i\cdot \ell_i(x)$$
$$\ell_i(x)=\prod_{k\neq i}^{n-1}\frac{(x-x_k)}{(x_i-x_k)}$$
$$\ell_i(x_k)=\begin{cases}1 & : i=k\\ 0 & : i\neq k\end{cases}$$

Bsp.:

x_i	-3	-1	1
$\sin(\frac{\pi}{6}x_i)$	-1	$-1/2$	$1/2$

Bestimme Interpolationspolynom.

2) in Lagrange Form
$$\ell_{(-3)}(x)=\frac{(x+1)(x-1)}{(-3+1)(-3-1)}=\frac{(x+1)(x-1)}{8}$$
$$\ell_{(-1)}(x)=\frac{(x+3)(x-1)}{(-1+3)(-1-1)}=\frac{(x+3)(x-1)}{-4}$$
$$\ell_{(1)}(x)=\frac{(x+3)(x+1)}{(1+3)(1+1)}=\frac{(x+3)(x+1)}{8}$$

$$\Rightarrow P(f\mid -3,-1,1)(x) = (-1)\,\frac{(x+1)(x-1)}{8} + \left(-\tfrac{1}{2}\right)\frac{(x+3)(x-1)}{-4} + \frac{1}{2}\,\frac{(x+3)(x+1)}{8}$$

3) Newton Form

$$P(f\mid x_0,\dots,x_n)(x) = \underbrace{f[x_0]} + \underbrace{f[x_0,x_1]}(x-x_0) + \dots + \underbrace{f[x_0,\dots,x_{n-1}]}_{\text{dividierte Differenzen}}(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-2})$$

$$f[x_i] = f_i$$

$$f[x_1,\dots,x_{k+1}] = \frac{f[x_2,\dots,x_{k+1}] - f[x_1,\dots,x_k]}{x_{k+1}-x_1}$$

Berechne Interpolationspolynom in Newton Form zu obiger Wertetabelle:

$$\begin{array}{r|cccc}
-3 & -1 & & & \\
 & & \frac{(-\frac{1}{2})-(-1)}{(-1)-(-3)} = \frac{1}{4} & & \\
-1 & -\frac{1}{2} & & \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1-(-3)} = \frac{1}{16} & \\
 & & \frac{\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2})}{1-(-1)} = \frac{1}{2} & & \\
1 & \frac{1}{2} & & &
\end{array}$$

Stützstellen   Funktionswerte $f[x_i]=f_i$

$$\Rightarrow P(f\mid -3,-1,1)(x) = -1 + \frac{1}{4}(x+3) + \frac{1}{16}(x+3)(x+1)$$

Zusätzliche Stützstelle: $x_4 = 0 \Rightarrow f_i = 0$

Berechne $P(f\mid -3,-1,1,0)$; erweitere dazu obiges Schema

$$\begin{array}{r|ccccc}
-3 & -1 & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \\
-1 & -\frac{1}{2} & & \frac{1}{16} & \\
 & & \frac{1}{2} & & \frac{0-\frac{1}{16}}{0-(-3)} = -\frac{1}{48} \\
1 & \frac{1}{2} & & \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{0+1} = 0 & \\
 & & \frac{0-\frac{1}{2}}{0-1} = 0 & & \\
0 & 0 & & &
\end{array}$$

$$P(f\mid -3,-1,1,0)(x) = P(f\mid -3,-1,1)(x) + \left(-\tfrac{1}{48}\right)(x+3)(x+1)(x-1)$$

Fehlerdarstellung

Daten zur Funktion f interpoliert

(oben $f(x) = \sin(\frac{\pi}{6}x)$)

$$f(x) - P(f|x_0, \ldots, x_{n-1})(x) = (x-x_0) \cdot \ldots \cdot (x-x_{n-1}) \cdot \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

$$\min\{x, x_0, \ldots, x_{n-1}\} \leq \xi \leq \max\{x, x_0, \ldots, x_{n-1}\}$$

Berechne zu obiger Tabelle Interpolationsfehler in $x = 0$

$$|P(f|-3,-1,1)(x) - f(x)| \leq |(x+3)(x+1)(x-1)| \cdot \max_{-3 \leq x \leq 1} \left|\frac{f'''(x)}{3!}\right|$$

$$f(x) = \sin(\tfrac{\pi}{6}x)$$

$$f'(x) = \tfrac{\pi}{6}\cos(\tfrac{\pi}{6}x)$$

$$f''(x) = -(\tfrac{\pi}{6})^2 \sin(\tfrac{\pi}{6}x)$$

$$f'''(x) = -(\tfrac{\pi}{6})^3 \cos(\tfrac{\pi}{6}x)$$

$$\Rightarrow |P(f|-3,-1,1)(0) - f(0)| \leq |3 \cdot 1 \cdot (-1)| \cdot \max_{-3 \leq x \leq 1} \left|\frac{f'''(x)}{3!}\right|$$

Es ist $\max_{-3 \leq x \leq 1} \left|\frac{f'''(x)}{3!}\right| \leq \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 = \ldots \approx 0{,}07\ldots$

lineare Ausgleichsrechnung

Bsp.:

t_i	1	3	4
$y(t_i) = y_i$	2	5	7

Die Meßwerte y_i sollen einem Gesetz der Form $y(t) = 2at + bt^2$ genügen. Bestimme a und b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode

$$\left\| \begin{pmatrix} 2a & + b \\ 6a & + 9b \\ 8a & + 16b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\|_2 \rightarrow \text{minimieren!}$$

$$\left\| A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - b \right\|_2 \rightarrow \min, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 9 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

9

2 Lösungswege:

1) Normalgleichungen

2) QR-Zerlegung

zu 1):

$$A^T A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A^T b$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 104 & 184 \\ 184 & 338 \end{pmatrix}, \quad A^T b = \begin{pmatrix} 90 \\ 159 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 104 & 184 & 90 \\ 184 & 338 & 159 \end{array}\right) \Rightarrow \quad a_1 = \frac{57}{108} \quad a_2 = -\frac{1}{54}$$

Bsp: gegeben seien Meßwerte

t_i	-3	0	1
y_i	5	7	8

Bildungsgesetz: $y(t) = a t + b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot t\right) + 5$

Stelle Matrix auf:

$$\left.\begin{array}{rl} -3 \cdot a + b \cdot \cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + 5 &= 5 \\ b + 5 &= 7 \\ a + b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 5 &= 8 \end{array}\right\} \text{Überbestimmtes Gleichungssystem}$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung über QR-Zerlegung

$$\begin{pmatrix} -3 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} 3 \cdot \sqrt{6} & 1 \\ 0 & \sqrt{50} \\ -\sqrt{6} & 3 \end{pmatrix}}_{Q} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}}_{R}$$

Ausgehend von den Normalgleichungen $A^T A \cdot x = A^T b$

$$\Rightarrow R^T Q^T Q R x = R^T Q^T b \quad \Rightarrow R x = Q^T b$$

also
$$\begin{pmatrix} -\sqrt{10} & -2/\sqrt{5} \\ 0 & 6/\sqrt{30} \end{pmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{6} \\ 1 & \sqrt{50} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{60}} \begin{pmatrix} -3\sqrt{6} \\ 2\sqrt{50} + 9 \end{pmatrix}$$

⇒ löse lineares Gleichungssystem

$$\Rightarrow x_1 = \frac{2\sqrt{50} + 9}{6\sqrt{2}} \qquad x_2 = -0{,}4714$$

Systeme von Differentialgleichungen

29.07.02

Bsp.:

$$y' = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} y + \underbrace{\begin{pmatrix} 2\,e^t \\ \frac{1}{t} e^t \end{pmatrix}}_{F(t)} \quad , \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}$$

Berechnung von Eigen-/Hauptvektoren für A:

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Bestimmung eines Eigenvektors v_1:

$$(A - I)\, v_1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$

Eigenraum:

$$E_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Berechnung eines Hauptvektors v_2 der Stufe 2:

$$(A - I)\, v_2 = v_1 \qquad (\Leftrightarrow (A-I)^2 v_2 = 0)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Hauptvektor 2. Stufe)}$$

$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right.$ (Haupt-/Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt!)$\Big]$

$\Rightarrow$ Fundamentallösungen

$$y_1(t) = e^{1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad y_2(t) = e^{1 \cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{1 \cdot t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Wronski-Matrix

$$W(t) = (y_1(t), y_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t & t \cdot e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ homogene Lösungsgesamtheit

$$y_h(t) = W(t) \cdot \underline{c} \quad , \quad \underline{c} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Bestimmung einer partikulären Lösung y_p mit "Variation der Konstanten"

$$y_p(t) = W(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{(W(\tau))^{-1} \cdot F(\tau)}_{c'(\tau)} \, d\tau$$!

Berechne $c'(\tau)$ durch Lösung von $W(\tau) \cdot c'(\tau) = F(\tau)$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^{\tau} & \tau e^{\tau} & 2e^{\tau} \\ 0 & e^{\tau} & \frac{1}{\tau} e^{\tau} \end{array}\right) \Rightarrow c'(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\tau} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow c(t) = \int_1^t c'(\tau)\,d\tau = \int_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \tau \\ \log(\tau) \end{bmatrix}_1^t = \begin{pmatrix} t-1 \\ \log(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y_p(t) = W(t) \cdot c(t)$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = W(t) \cdot c + W(t) \cdot c(t) \quad , c \in \mathbb{R}^2$$
$$= W(t) \cdot (c + c(t))$$

Bestimme c als Lösung des Systems $W(t_0) \cdot c = y_0$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array}\right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = W(t)(c + c(t)) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ \log(t) \end{pmatrix} \right]$$

$$= \ldots = \begin{pmatrix} t\, e^t \log(t) \\ e^t(\log(t) - 1) \end{pmatrix}$$

Probe: Lösung ableiten und in Dgl. einsetzen.

<u>Lineare DGL höherer Ordnung mit konst. Koeffizienten</u>

prinzipiell auch gleiches Verf. wie eben anwendbar

<u>Bsp.:</u> $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (y \in \mathbb{R})$

Bestimmung eines Fundamentalsystems (FS)

Char. Gleichung: $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = 2$$

$\Rightarrow$ FS: $\{e^{3t}, e^{2t}\}$

(FS zum äquivalenten System: $\underline{y_1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \underline{y_2}$)

<u>Bsp.:</u> $y'' + y = 0$

char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1$

$\Rightarrow$ löse $0 = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$ $\qquad (i^2 = -1)$

komplexes FS: $\{e^{-it}, e^{it}\}$

reelles FS: $\{\cancel{e^{-it}}, \underline{e^{it}}\}$

wird ersetzt durch
2 Lösungen:
$Re(e^{it}), Im(e^{it})$

(dazu: Euler $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$)

$\Rightarrow$ reelles FS: $\{\cos(t), \sin(t)\}$

<u>Bsp.:</u> $y'' - y = -2t \quad , y(0) = y'(0) = 0$

<u>1. Ansatz zur Berechnung eines FS:</u>

char. Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$

$\Rightarrow$ FS: $\{e^{1 \cdot t}, e^{-1 \cdot t}\} \Rightarrow W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix}$

<u>2. Ansatz zur Berechnung eines FS:</u>

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y - 2t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underline{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Berechnung von Eigen-/Hauptvektoren von A

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

Berechnung von Eigenvektoren

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow z_1(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

13

Berechnung einer partikulären Lösung y_p über "Ansatz der rechten Seite":

DGL: $y'' - y = -2t$

(Nachdenken!) ....

$y_p(t) = a \cdot t + b \quad , \quad a, b \in \mathbb{R}$

Setze y_p in DGL ein und bestimme somit a, b

$y_p'(t) = a$

$y_p''(t) = 0$

$0 - a \cdot t - b = -2t \quad \Leftrightarrow \quad -a \cdot t - b = -2t$

$\Rightarrow \quad a = 2 \quad , \quad b = 0$

$\Rightarrow \quad y_p(t) = 2t + 0 = 2t$

Probe: $y'' - y = \underline{-2t}$

$(2t)'' - (2t) = 0 - 2t = \underline{\underline{-2t}}$ ✓

<u>Runge-Kutta-Verfahren</u> (Numerische Lösung von AWPs)

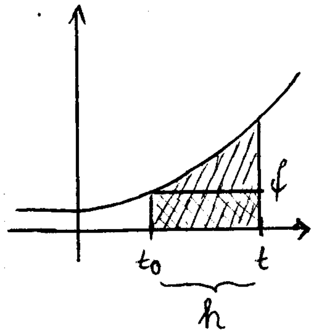
- Euler Verfahren (expl./impl.)
- Trapezregel
- verbesserter Euler
- klassisches Runge-Kutta

Idee zur Herleitung:

$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t_0) = y_0$

$\Leftrightarrow \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} \underbrace{f(\tau, y(\tau))}\, d\tau$

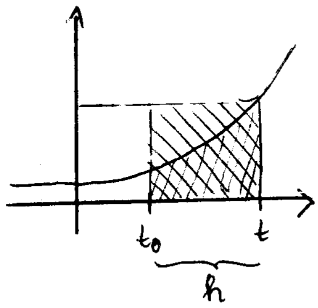
Idee: approximiere das Intervall durch Quadrat.



$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\,d\tau \approx h \cdot f(t_0, y(t_0))$$

$\Rightarrow$ expl. Euler-Verfahren

$$y^{k+1} = y^k + h \cdot f(t_k, y^k)$$



$$\Rightarrow \int_0^t f(\tau, y(\tau))\,d\tau = h \cdot f(t_1, y(t_1)) = h \cdot f(t_1, y^1)$$

$\Rightarrow$ impl. Euler-Verfahren

<u>Bsp.:</u> $y'' - 2ty' + 2y = 0 \quad , \quad y(1) = y'(1) = 1$

Bestimme Näherungswerte zu $y(2)$, $y'(2)$ mit dem Euler-Verfahren (expl.) zur Schrittweite $h = 1$

Transformation der DGL auf ein System 1. Ordnung:

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 2ty'(t) - 2y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(t) \\ 2tz_2(t) - 2z_1(t) \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2t \end{pmatrix} \underline{z}(t)}_{f(t, z(t))}$$

$$\underline{z}^{k+1} = z^k + h \cdot f(t_k, z^k)$$

hier: $\underline{z}^1 = z^0 + 1 \cdot f(1, z^0)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{z}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix}$$

also $y(2) \approx 2$ und $y'(2) \approx 1$

15

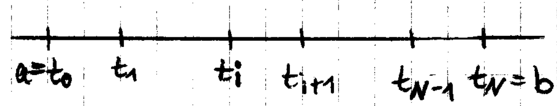
31.07.02

Splines

$\mathcal{P}_n = \{ p(x) \mid p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \}$

Sei $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_N = b$

$T = \{t_i\}_{i=0}^{N}$ Gitterpunkte



Interpolation bzw. Approximation mit Polynomen hohen Grades ist nicht zu empfehlen!

Deswegen Splines: Interpolation bzw. Approximation auf vielen Teilstücken durch Polynome eines festen Grades.

Def: $k \geq 2$

$S_{k,T} = \{ s \in C^{k-2}(a,b) \mid s|_{(t_i, t_{i+1})} \in \mathcal{P}_{k-1}, i = 0,1,\ldots,N-1 \}$

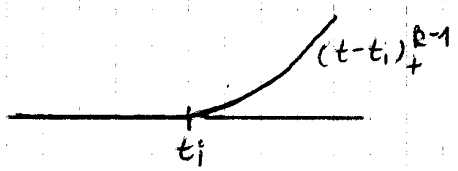
ist die Menge der Splines der Ordnung k und Glattheit $k-2$.

Es galt das Lemma: Jedes $s \in S_{k,T}$ besitzt die eindeutige Darstellung

$$(1) \quad s(t) = \underbrace{\sum_{j=0}^{k-1} a_j (t-t_0)^j}_{=: P_0(t)} + \sum_{j=1}^{N-1} c_j (t-t_j)_+^{k-1} \; *$$

* "abgeschnittene Potenzen"

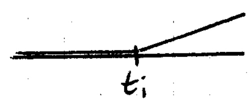
$$\text{mit} \quad (t-t_i)_+^{k-1} = \begin{cases} (t-t_i)^{k-1}, & t \geq t_i \\ 0, & t \leq t_i \end{cases}$$



$\in C^{k-2}$ (d.h. $k-2$ mal differenzierbar)

$\notin C^{k-1}$

$$\left[\left(\frac{d}{dt}\right)^{k-2} \frac{(t-t_i)_+^{k-1}}{(k-1)!} = (t-t_i)_+ \right]$$



(2) $\dim(S_{k,T}) = k + N - 1$

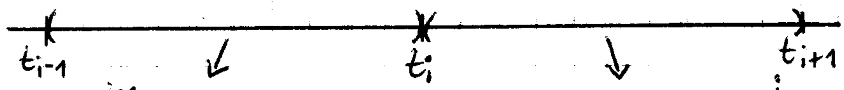
Offenbar gilt: $\qquad t \in [t_i, t_{i+1}]$

(3) $s(t) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{i} c_j (t - t_j)_+^{k-1}$ (das + kann weggelassen werden)

$\sum_{j=0}^{k-1} a_j (t - t_0)^j \qquad i = 0, \dots, N-1$

$\Rightarrow a_j = \dfrac{s^{(j)}(t_0)}{j!}$

$i = 0: \; s(t) = P_0(t)$ auf $[a, t_1]$



$s(t) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{i-1} c_j (t - t_j)^{k-1} \qquad s(t) = P_0(t) + \sum_{j=1}^{i} c_j (t - t_j)^{k-1}$

$\Rightarrow \underbrace{s^{(k-1)}(t_i -)}_{= \lim_{t \uparrow t_i} s^{(k-1)}(t)} = P_0^{(k-1)}(t_i) + (k-1)! \sum_{j=1}^{i-1} c_j$

$s^{(k-1)}(t_i +) = P_0^{(k-1)}(t_i) + (k-1)! \sum_{j=1}^{i} c_j$

$\Rightarrow$ (4) $c_j = \dfrac{s^{(k-1)}(t_j +) - s^{(k-1)}(t_j -)}{(k-1)!}$ (die c_j beschreiben die Sprünge der $(k-1)$. Ableitung)

Daher gilt: $\quad s \in S_{k,T}$ und $s \in C^{k-1}(a,b)$

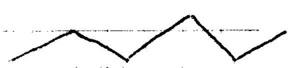
$\Rightarrow (c_j = 0)^{*} \quad s \in \mathcal{P}_{k-1}$

(*) da $(k-1)$. Ableitung stetig!

Wegen $\mathcal{P}_{k-1} \subset S_{k,T}$ gilt:

! $S_{k,T}$ besteht aus den Polynomen $\mathcal{P}_{k-1}$ und den glattesten (C^{k-2}) Funktionen, die stückweise aus $\mathcal{P}_{k-1}$ sind und nicht zu einem Polynom aus $\mathcal{P}_{k-1}$ entarten.

<u>Bsp.:</u>

- $k = 2$: stückweise linear 
- $k = 4$: kubische Splines (glatteste nicht polynomiale Funktionen aus C^2, die stückweise aus Polynomen aus $\mathcal{P}_3$ sind)

Interpolation in $t_0, \dots, t_N$

$s(t_i) = f_i$

$N+1$ Bedingungen:

$\dim S_{k,T} = N+3 = (N+1)+2$ (Anzahl der Bedingungen, die einen kubischen Spline festhalten)

Es fehlen zwei Bedingungen (linear)

Möglichkeiten:

$s'(a)\ ,\ s'(b)$

$s''(a),\ s''(b)$

Klausur: Nur Theorie zu Splines, keine Rechenaufgabe!
(Herleitung auch nicht wichtig)

QR-Zerlegung

LR-Zerlegung $\rightarrow$ Gauß-Algorithmus
EW, EV (LR-Verfahren)

QR-Zerlegung $\rightarrow$ EW, EV (QR-Verfahren)
Normalgleichungen bei vollem Rang

SVD-Zerlegung (Singulärwert-Zerl.) $\rightarrow$ Pseudoinverse
Normalgleichungen bei Rangabfall

Satz: (QR-Zerlegung)

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Dann existiert eine orthogonale Matrix $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ mit

$$Q = (q^1, \dots, q^n, q^{n+1}, \dots, q^m) = (Q_1, Q_2)$$

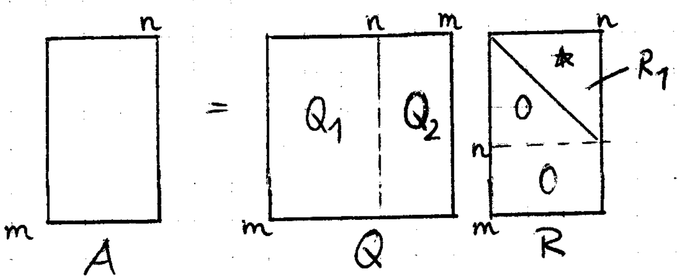
$$\left[\text{d.h. } (q^i, q^k) = \delta_{ik}\ ,\ \underbrace{Q^T Q = 1 = QQ^T}_{\text{nur für quadratisch orthogonale Matrizen}},\ Q_1^T Q_1 = 1,\ Q_2^T Q_2 = 1\right]$$

und eine obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit

(5) $A = QR$ bzw. (5)' $A = Q_1 R_1$ wobei $R_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$

"kleine QR-Zerlegung"

schematisch:



Eigenschaften:

- Aufwand zur Berechnung (Householder, Givens)

  $Q^T A = R$ Aufwand $\sim 2n^2 m$ (doppelt so hoch wie bei LR-Zerl.!)

- $\mathrm{Rg}\, A = \mathrm{Rg}\, R_1$
- $\mathrm{Rg}\, A = n$ (also voller Rang)

  $A = (a^1, \ldots, a^n) \Rightarrow \langle a^1, \ldots, a^k \rangle = \langle q^1, \ldots, q^k \rangle \quad k = 1, \ldots, n$

  d.h. $q^1 \ldots q^k$ bilden ein Orthonormalsystem für diesen Vektorraum $\langle a^1, \ldots, a^k \rangle$, $k = 1, \ldots, n$

  (nur wenn alle Spalten linear unabhängig!)

Anwendung auf das Ausgleichsproblem:

$\|Ax - b\|_2^2 \to \mathrm{Min} \qquad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \; m \geq n$

Es galt $\|Ax - b\|_2^2 \geq \|Ax^* - b\|_2^2$

$\Longleftrightarrow$ (6) $\quad A^T A x^* = A^T b \qquad$ (Normalgleichungen NGL)

Die NGL sind i.a. schlecht konditioniert

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|b - \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x_i a^i}_{g}\|_2^2 \quad , \; g \in \langle a^1, \ldots, a^n \rangle$$

Sei $\mathrm{Rg}\, A = n$ (d.h. $a^1, \ldots, a^n$ linear unabhängig)

<u>Idee</u>: Basiswechsel $\langle a^1, \ldots, a^n \rangle = \langle q^1, \ldots, q^n \rangle$

$$\min_{g \in \langle a^1, \ldots, a^n \rangle} \|b - g\|_2^2 = \min_{g \in \langle q^1, \ldots, q^n \rangle} \|b - g\|_2^2 = \|b - g^*\|_2^2$$

$$g^* = Ax^* = Q_1 y^*$$

Es ist

$$\|b-g\|_2^2 = \|b-Q_1 y\|_2^2 \geq \|b - Q_1 y^*\|_2^2$$

$$\iff \text{(NGL)} \quad \underbrace{Q_1^T Q_1}_{1} y^* = Q_1^T b$$

$$\Rightarrow y^* = Q_1^T b \Rightarrow A x^* = Q_1 Q_1^T b$$

$$\Rightarrow (A = Q_1 R_1) \quad Q_1 R_1 x^* = Q_1 Q_1^T b$$

$$\Rightarrow (\cdot Q_1^T) \quad \underbrace{Q_1^T Q_1}_{1} R_1 x^* = \underbrace{Q_1^T Q_1}_{1} Q_1^T b \quad \text{, d.h.}$$

$$(7) \quad R_1 x^* = Q_1^T b$$

(7) erhält man auch (formal) direkt aus (6) (NGL) mit $A = Q_1 R_1$, da $A^T A x^* = R_1^T \underbrace{Q_1^T Q_1}_{1} R_1 x^* = A^T b = R_1^T Q_1^T b$

$\iff$ $\det R_1 \neq 0$, d.h. R_1 hat vollen Rang (also auch A)

$\Rightarrow$ (7).

Es ist

$$(8) \quad \text{cond}_2 (A^T A) = (\text{cond}_2 R_1)^2$$

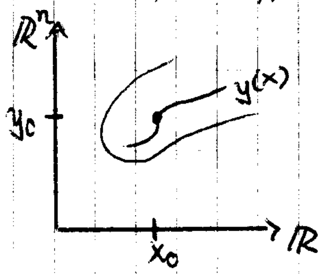
(durch Basiswechsel wird also eine wesentlich bessere Kondition erreicht)

AWP bei gew. DGLs

$f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, D offen

$f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^n$

$(n=1)$



Sei $(x_0, y_0) \in D$

AWP $\quad y'(x) = f(x, y(x))$

$\quad\quad y(x_0) = y_0$

Für ein Intervall I, das x_0 als inneren Punkt enthält, d.h. $x_0 \in \mathring{I}$ (d.h. I entartet nicht zu einem Punkt $\{x_0\}$) heißt $y \in C^1(I)$ (d.h. y ist einmal stetig differenzierbar auf dem Intervall I) <u>lokale Lösung</u> des AWP, falls gilt:

(i) $y(x_0) = y_0$

(ii) $(x, y(x)) \in D \quad , x \in I$

(iii) $y'(x) = f(x, y(x)) \quad , \forall\ x \in I$

Eine lokale Lösung $y \in C^1(I_{max})$ heißt <u>maximale Lösung</u>, wenn sie jede andere lokale Lösung $w \in C^1(I)$ fortsetzt, d.h.

$$I \subset I_{max} \quad , \quad w(x) = y(x) \quad , \quad x \in I$$

<u>Satz</u>: (Hauptsatz)

D wie oben, f sei

- stetig auf D und erfülle eine
- lokale Lipschitzbedingung auf D

$\Longrightarrow$ das AWP besitzt eine maximale Lösung $y \in C^1(I_{max})$ (I_{max} offen)