SVD-Zerlegung

$$A = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{orthogonalmatrix}}}{U} \cdot \underset{\substack{|\\ \text{Diagonalmatrix}}}{\Sigma} \cdot \underset{\text{Orthogonalmatrix}}{V^T}$$

Systeme von Differentialgleichungen

Beispiel: $\underline{y}' = \underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{A} \underline{y} + \underbrace{\begin{pmatrix}2e^t\\ \frac{1}{t}e^t\end{pmatrix}}_{F(t)}, \qquad \underline{y}(1) = \begin{pmatrix}0\\ -e\end{pmatrix}$

Berechnung von Eigen-/Hauptvektoren für A:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & 1\\ 0 & 1-\lambda\end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Bestimmung des Eigenvektors v_1:

$$(A-1\cdot I)\, v_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-1 & 1\\ 0 & 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$

Eigenraum $E_1 = \left\langle \begin{pmatrix}\cancel{0}1\\ \cancel{x}0\end{pmatrix} \right\rangle$ – Anzahl der gleichen Nullstellen = ~~geomet~~ = algebraische Vielfachheit = 2

– Dimension des Eigenraums = geometrische Vielfachheit = 1

Berechnung eines Hauptvektors v_2 der Stufe 2:

$$(A-1\cdot I)\cdot v_2 = v_1 \quad \left(\Leftrightarrow (A-I)^2 v_2 = 0\right) \Rightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \rightarrow v_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

Hauptvektor 2. Stufe

$\Rightarrow$ Fundamentallösungen:

$$y_1(t) = e^t \cdot \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$$
$$y_2(t) = e^{1\cdot t}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} + t\cdot e^{1\cdot t}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = e^{1\cdot t}\begin{pmatrix}t\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Wronski-Matrix:

$$W(t) = \left(y_1(t), y_2(t)\right) = \begin{pmatrix}e^t & t\cdot e^t\\ 0 & e^t\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ homogene Lösungsgesamtheit:

$$y_H(t) = W(t)\cdot \underline{c}, \qquad \underline{c} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow$ Bestimmung der partikulären Lösung y_p mit „Variation der Konstanten":

$$y_p(t) = W(t) \cdot \int_{t_0}^{t} \underbrace{(W(\tau))^{-1} \cdot F(\tau)}_{c'(\tau)} \, d\tau$$

die Herleitung dieser Formel ist wichtig für die Klausur!

$\Rightarrow$ Berechne $c'(\tau)$ durch Lösung von $W(\tau) \cdot c'(\tau) = F(\tau)$

$$\begin{pmatrix} e^{\tau} & \tau \cdot e^{\tau} \\ 0 & e^{\tau} \end{pmatrix} \cdot c'(\tau) = \begin{pmatrix} 2 \cdot e^{\tau} \\ e^{\tau}/\tau \end{pmatrix} \Rightarrow c'(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\tau \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ dann $c(\tau) = \int_{t_0(=1)}^{t} c'(\tau) \, d\tau = \int_1^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\tau \end{pmatrix} d\tau = \begin{pmatrix} \tau \\ \log \tau \end{pmatrix}_1^t$

$$= \begin{pmatrix} t \\ \log t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow y_p(t) = W(t) \cdot c(t)$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $\quad y(t) = y_H(t) + y_p(t)$

$$= W(t) \cdot c + W(t) \cdot c(t) \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$= W(t) \cdot (c + c(t))$$

$\Rightarrow$ Bestimme c als Lösung des Systems $W(t_0) \cdot c = y_0$

$$\begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array} \quad \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow y(t) = W(t) \cdot (c + c(t)) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix} \right) = \ldots = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \cdot \log t \\ e^t \cdot (\log(t) - 1) \end{pmatrix}$$

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

Beispiel: $y'' - 5y' + 6y = 0 \qquad (y \in \mathbb{R})$

Bestimmung eines FS (Fundamentalsystems)

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$= (\lambda - 3)(\lambda - 2) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 2$

FS: $\{e^{3t}, e^{2t}\}$

Fundamentalsystem zum äquivalenten System: $\underline{y_1} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \underline{y_2}$

Ableitung

Beispiel: $y'' + y = 0$

charakteristisches Polynom: $p(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0 \qquad (\text{da } i^2 = -1)$

$= (\lambda + i)$

(bei höherer Vielfachheit nochmals $\frac{t^k}{k!}$ vor den Eigenwert schreiben, also z.B. $\{e^{3t}, t \cdot e^{3t}, \frac{t^2}{2!} \cdot e^{3t}, \frac{t^3}{3!} \cdot e^{3t}, \dots\}$)

komplexes FS: $\{e^{-it}, e^{it}\}$, reelles FS: $\{\cancel{e^{-it}}, \boxed{e^{it}}\}$

dazu: $e^{it} = \underbrace{\cos t}_{Re} + i \cdot \underbrace{\sin t}_{Im}$

$\Rightarrow$ reelles FS zu $\{e^{it}\} = \{\cos(t), \sin(t)\}$

<u>Beispiel:</u> $y'' - y = -2t \qquad y(0) = y'(0) = 0$

1.) Ansatz zur Berechnung eines FS:

char. Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$

$$\Rightarrow \text{FS}: \{e^{1\cdot t}, e^{-1\cdot t}\} \Rightarrow W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Ableitung}$$

2.) Ansatz zur Berechnung eines FS:

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z}' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ y - 2t \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underline{z} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -2t \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

Berechnung von Eigen- / Hauptvektoren von A:

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)(\lambda-1)$$

Berechnung von Eigenvektoren:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow z_1(t) &= e^{-1\cdot t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \\ z_2(t) &= e^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \quad W(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ -e^{-t} & e^t \end{pmatrix}$$

Berechnung einer partikulären Lösung y_p über „Ansatz der rechten Seite"

Berechnung einer partikulären Lösung durch „Ansatz der rechten Seite"

Nachdenken: $\Rightarrow$ $y_p(t) = a \cdot t + b$

Setze y_p in DGL ein und bestimme somit a, b

$$y_p'(t) = a$$
$$y_p''(t) = 0 \quad \rightarrow \quad y'' - y = -2t$$
$$0 - a \cdot t - b = -2t$$
$$-a \cdot t - b = -2t \quad \Rightarrow a = 2,\ b = 0$$

$\Rightarrow y_p(t) = 2 \cdot t + 0 = 2t$

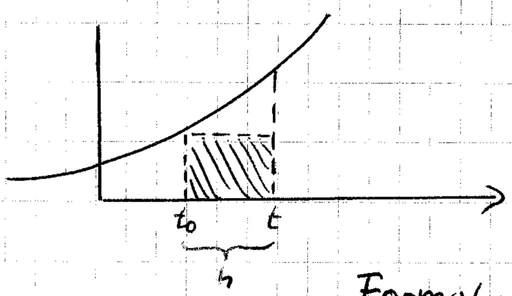
Runge-Kutta-Verfahren

- Euler-Verfahren (explizit, implizit)
- Trapezregel
- verbessertes Euler-Verfahren
- klassisches Runge-Kutta-Verfahren

- explizites Euler-Verfahren:

Idee zur Herleitung: $y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad y(t_0) = y_0$

$$\Leftrightarrow \quad y(t) = y_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau}_{\text{Idee: approximiere Integral durch Quadratur}}$$

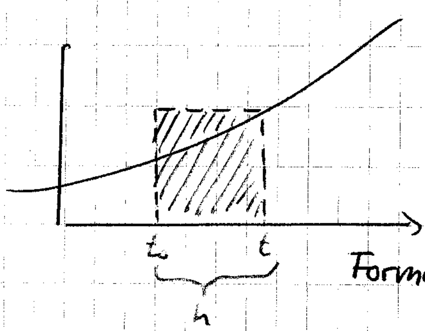


$$\Rightarrow \int_{t_0}^{t} f(\tau, y(\tau))\, d\tau \approx h \cdot f(t_0, y(t_0))$$

Formel: $y^{k+1} = y^k + h \cdot f(t_k, y^k)$

- implizites Euler-Verfahren:

$$\int_{t_0}^{t} f(n, y(n))\, dn \approx h \cdot f(t_1, y(t_1))$$



Formel: $y^{k+1} = y^k + h \cdot f(t_1, y^k)$

<u>Beispiel:</u> $y'' - 2ty' + 2y = 0 \qquad y(1) = y'(1) = 1$

Bestimme Näherungswerte zu $y(2)$, $y'(2)$,
mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite $h = 1$

$\Rightarrow$ Transformation der DGL auf ein System 1. Ordnung

$$\underline{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{z}'(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'(t) \\ 2ty'(t) - 2y(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2t \end{pmatrix} \cdot \underline{z}(t)}_{f(t, z(t))}$$

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\underline{z}^{k+1} = z^k + h \cdot f(t_k, z^k)$$

hier: $\underline{z}^1 = z^0 + 1 \cdot f(1, z^0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ +2 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} \Rightarrow y(2) \approx 2$