Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

1. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Vorbemerkung:

Es wird vorausgesetzt, daß jede(r) Student(in), der/die mit Differentialgleichungen beschäftigt ist, keine Probleme mit dem Integrieren der einfachsten Funktionen hat.

Die „einfachsten“ Funktionen sind nicht nur

$$e^x, \quad x^k, \quad \sin x, \ldots$$

sondern auch

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{1}{(\cos x)^2}, \quad \frac{x}{1+x^2}, \quad x^k e^x, \quad x^k \sin x, \quad \frac{1}{x(\log x)^k}, \quad e^{\sin x}\cos x, \ldots$$

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = y^{2/3}$$

mit den Anfangswerten

$$\text{(i)} \quad y(1) = 0, \qquad \text{(ii)} \quad y(1) = 1.$$

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des Anfangswertproblems (zu den beiden Anfangswerten). (2)

b) Bestimmen Sie im zweiten Fall das maximale Intervall, auf dem die Lösung eindeutig ist. (1)

c) Was ist der Grund,
   (i) daß im ersten Fall keine eindeutige lokale Lösung existiert, und
   (ii) daß im zweiten Fall es keine eindeutige globale Lösung gibt, obwohl die lokale Lösung eindeutig ist? (2+2)

Aufgabe 2:
Man bestimme Lösungen für die folgenden Anfangswertprobleme:

a) $y' = \dfrac{1}{1+t^2}\, e^y, \quad y(1) = 1;$ (2)

b) $y' = y\,(1-y), \quad y(0) = 1/2;$ (3)

c) $y' = \cos(t)\, e^y, \quad y(0) = -1;$ (3)

d) $ty' = y + \sqrt{t^2+y^2}, \quad y(1) = 3/4.$ (4)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie die Lösungsgesamtheit der folgenden linearen DGLn erster Ordnung:

a) $x' = 2tx + 3t;$ (2)

b) $x' = -\tan(t)x + \tan(t), \quad I = (-\pi/2, \pi/2);$ (2)

c) $x' = 2(1/t - t)x - te^{-t^2}, \quad I = (0, \infty).$ (2)

Aufgabe 4:
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in \mathbb{R}$. Vorgelegt sei die *Bernoulli–DGL* $x' = ax + bx^{\alpha}$. Substituiert man $u := x^{1-\alpha}$, so erhält man eine lineare DGL erster Ordnung. Bestimmen Sie auf diese Weise für geeignete Intervalle Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x' = -x + x^2, \quad x(0) = 1/2;$ (3)

b) $x' = (1/t - t)x - te^{-t^2}/(2x), \quad x(1) = 1/\sqrt{e}.$ (3)

Aufgabe 5:
Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a, b, c : I \to \mathbb{R}$ stetig. Vorgelegt sei die *Riccati–DGL* $x' = a + bx + cx^2$. Kennt man hierfür eine Lösung x_0, so führt die Substitution $u := x - x_0$ auf eine Bernoulli–DGL. Bestimmen Sie auf diese Weise für geeignete Intervalle Lösungen der folgenden Anfangswertprobleme:

a) $x' = t^2 + t + 1 - (2t + 1)x + x^2, \quad x(0) = 2;$ (3)

b) $x' = -t^6 - 2t^5 - t^4 + t^2 + 3t + 1 + (2t^4 + 2t^3 - 1)x - t^2x^2, \quad x(0) = 1.$ (3)

Hinweis: Es gibt eine Polynomlösung.

Abgabe bis Mo., 14.05.2001, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser   Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

2. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Aufgabe 1:
Bestimmen Sie ein (reelles) Fundamentalsystem für $x' = Ax$ in den Fällen

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$; (3)

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; (4)

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. (5)

Aufgabe 2:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(5)

Aufgabe 3:
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' + 5y' + 4y = 0$; (3)

b) $y''' - y = 0$; (3)

c) $y''' - y'' - 6y' = 0$. (3)

<u>Ansatz vom Typ der rechten Seite</u>

Wir betrachten eine lineare DGL n-ter Ordnung, bei der die rechte Seite von der Form

$$e^{\alpha x} \sum_{j=0}^{m} x^j \big(b_j \cos(\beta x) + c_j \sin(\beta x)\big)$$

ist. Ist dann $\gamma := \alpha + i\beta$ und $k \in \mathbb{Z}_+$ die Vielfachheit von γ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms, so führt der Ansatz

$$y_p(x) := e^{\alpha x} x^k \sum_{j=0}^{m} x^j \big(d_j \cos(\beta x) + e_j \sin(\beta x)\big)$$

durch Koeffizientenvergleich auf eine partikuläre Lösung.

Aufgabe 4:
Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $y'' + 2y' + 7y = xe^x$; (3)

b) $y''' + y = 1 + 2x + x^3$; (3)

c) $y'' + y = \cos(x) - 3\sin(x) + 7xe^x \sin(2x)$. (4)

Aufgabe 5:
Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''' - y' = 3e^{2t}, \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 0.$$

Bestimmen sie eine partikuläre Lösung a) über einen Ansatz vom Typ der rechten Seite und b) über Variation der Konstanten. (3+3)

Abgabe bis Mo., 28.05.2001, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser   Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

3. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Aufgabe 1:
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} y, \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Lösung des Anfangswertproblems.

b) Skizzieren Sie den Verlauf der Lösung und das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Das Richtungsfeld ist hier die Menge $\{(-y_2, y_1)^T : (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2\}$.

c) Zeichnen Sie in die gleiche Skizze die Approximation der Lösung ein, die das Eulersche Polygonzugverfahren (expliziter Euler) mit einer konstanten Schrittweite $h > 0$ liefert.

d) Auf einem Intervall ist das *implizite Euler–Verfahren* zur Schrittweite h definiert durch die Rekursion

$$y_h\big(a+(j+1)h\big) = y_h(a+jh) + hf\big(a+(j+1)h, y_h(a+(j+1)h)\big), \quad j = 0, 1, \ldots, \quad y_h(a) = y(a).$$

Zeichnen Sie in die vorhandene Skizze die Approximation der Lösung ein, die das implizite Euler–Verfahren zu einer konstanten Schrittweite $h > 0$ liefert.

Hinweis: Zur Berechnung der Werte dürfen Sie in dieser Aufgabe einen Taschenrechner verwenden.

(2+2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2:
Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' - xy' + y = 3, \qquad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge–Kutta–Verfahren

$$k_1 = f(x_k, y_k), \qquad k_3 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_2),$$

$$k_2 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h,\ y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), \qquad k_4 = f(x_k + h,\ y_k + hk_3),$$

$$y_{k+1} = y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

und der Schrittweite $h = 1$ eine Approximation von $y(1)$ und $y'(1)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y''' = x^2y'' + xy' - 4y + 4, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h\big(f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\big)$$

und der Schrittweite $h = 1$ eine Approximation von $y(1)$, $y'(1)$ und $y''(1)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:
Sei y die Lösung der Differentialgleichung

$$y'' = 2y - xy', \qquad y(2) = 5, \quad y'(2) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem

a) expliziten Euler–Verfahren $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$,
b) impliziten Euler–Verfahren $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$,
c) verbesserten Euler–Verfahren

$$k_1 = f(x_k, y_k),$$
$$k_2 = f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1)$$
$$y_{k+1} = y_k + hk_2$$

und der Schrittweite $h = 1$ jeweils eine Approximation von $y(3)$ und $y'(3)$.

(3+3+3 Punkte)

Aufgabe 5:
Hinweis: Diese Aufgabe ist eine *freiwillige* Zusatzaufgabe.

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = -\frac{y}{\sqrt{t} - \frac{1}{2}}, \qquad y(1) = 1.$$

Berechnen Sie mit dem expliziten und impliziten Eulerverfahren sowie dem klassichen Runge–Kutta–Verfahren (4. Ordnung) Näherungen für $y(9)$ zu den Schrittweiten $h = 8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots$ und kommentieren Sie die Ergebnisse.

Zur Berechnung der Werte schreiben Sie ein kleines Programm (z.B. in Maple).

(12 Punkte)

Abgabe bis Mo., 18.06.2001, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

4. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Aufgabe 1:
Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^x - 4x^2$.

a) Zeigen Sie, daß f genau zwei positive Nullstellen besitzt.

b) Eine der beiden positiven Nullstellen liegt in dem Intervall $D = [0, 1]$. Zeigen Sie, daß die Iteration
$$x_{n+1} = \frac{1}{2} e^{x_n/2}, \qquad n \in \mathbb{N}_0,$$
gegen diese Nullstelle konvergiert, sofern $x_0 \in D$. Wieviele Iterationsschritte werden höchstens benötigt, damit der Fehler kleiner als 10^{-5} wird? Startwert sei $x_0 = 0.5$. Führen Sie die entsprechende Anzahl von Schritten aus. Schätzen Sie (nochmal und genauer) den Fehler ab.

c) Warum läßt sich die zweite positive Nullstelle nicht mit der unter b) angegebenen Iteration approximieren? Stellen Sie ein geeignetes Iterationsverfahren auf und geben Sie ein Intervall an, so daß das Verfahren konvergiert. Bestimmen Sie eine Näherungslösung und geben Sie eine Fehlerabschätzung an.

Hinweis: Zur Berechnung der Werte dürfen Sie einen Taschenrechner benutzen.

(2+4+4 Punkte)

Aufgabe 2:
Das nichtlineare Gleichungssystem
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x+1)(y-1) &= 1, \\ x^2 + 2xy &= 2, \end{aligned}$$
besitzt genau eine reelle Lösung.

Berechnen Sie eine Näherung $(x^1, y^1)^T$ zu dieser Lösung, indem Sie ausgehend vom Startwert $(x^0, y^0)^T = (0, 1)^T$ einen Schritt des gedämpften Newton–Verfahrens durchführen. Für den Abbruchtest $||F(x^1, y^1)|| < ||F(x^0, y^0)||$ benutzen Sie die Euklidische Norm.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben sei
$$M_a = \begin{pmatrix} 2a & a & -a & -a \\ 4 & 6 & 2 & 3 \\ 4a & 4 & a & 1 \\ 0 & 0 & 4-5a & -5a \end{pmatrix}, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

a) Bestimmen Sie die LR–Zerlegung der Matrix M_a *ohne* Pivotisierung. Geben Sie auch an, für welche a sich diese Zerlegung durchführen läßt.

b) Für welche a verschwindet die Determinante von M_a?

c) Sei nun $a = 2$. Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems $M_2 x = b$ mit $b = (1, 2, 3, 4)^T$.

(4+2+2 Punkte)

Programmentwurf zur **Cholesky–Zerlegung:**

Für $i = 1, 2, \ldots, n$:
  für $k = 1, 2, \ldots, i-1$:
    $a_{i,k} \leftarrow a_{i,k} - \sum_{j<k} a_{i,j}\, a_{k,j}$;
  diag $\leftarrow a_{i,i}$;
  für $j = 1, 2, \ldots, i-1$:
    $h \leftarrow a_{i,j}/a_{j,j}$;
    diag $\leftarrow$ diag $- a_{i,j}\, h$;
    $a_{i,j} \leftarrow h$;
  falls diag $< 10^{-5}\, a_{i,i}$ **Abbruch.**
  $a_{i,i} \leftarrow$ diag.

Aufgabe 4:
Gegeben seien folgende symmetrische Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -3 \\ -2 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 & -6 \\ -2 & 2 & -2 & 5 \\ 4 & -2 & 13 & -18 \\ -6 & 5 & -18 & 33 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie, welche der Matrizen positiv definit ist/sind.
b) Berechnen Sie die LDL^T-Zerlegung für B mit dem Cholesky–Verfahren.
c) Sei $b = (2, -1, -1, 1)^T$. Lösen Sie $Bx = b$ mit Hilfe der in Aufgabenteil b) berechneten Zerlegung.

(2+4+2 Punkte)

Aufgabe 5: (Differenzenverfahren für gewöhnliche Randwertaufgaben)
Hinweis: Diese Aufgabe ist eine *freiwillige* Zusatzaufgabe.

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $\alpha, \beta, \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Gesucht ist eine C^2-Funktion $y : [a, b] \to \mathbb{R}$, die die *lineare Randwertaufgabe*

$$y''(x) + \alpha(x)\, y'(x) + \beta(x)\, y(x) + \gamma(x) = 0, \qquad y(a) = y_a, \quad y(b) = y_b$$

löst. Um diese Gleichung näherungsweise zu lösen, teilen wir das Intervall $[a, b]$ in N gleiche Teile und setzen

$$h := \frac{b-a}{N}, \qquad x_i := a + i\, h$$

für alle $i \in \{0, \ldots, N\}$. Ferner sei y_i die zu bestimmende Näherung für $y(x_i)$. Wir bestimmen y_i, indem wir in der zu lösenden Gleichung die folgenden Näherungen einsetzen:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \qquad y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

für $i = 1, \ldots, N-1$. Dadurch erhalten wir ein System von $N-1$ Gleichungen für die $N+1$ Unbekannten $y_0, \ldots, y_N$.

a) Wie lauten diese Gleichungen?

b) In dem in a) bestimmten Gleichungssystem sind y_0 und y_N bereits bekannt. Nutzen Sie diese Werte aus, um das System auf ein lineares Gleichungssystem von $N-1$ Gleichungen in $N-1$ Unbekannten zu reduzieren und geben Sie dieses Gleichungssystem (Matrix, Unbekannte und rechte Seite) an.

c) Betrachten Sie den Spezialfall $\alpha(x) \equiv 0$, $\beta(x) \equiv 0$. Zeigen Sie: Die Matrix des entstehenden Gleichungssystems besitzt eine Cholesky–Zerlegung.

(5+5+5 Punkte)

Abgabe bis Mo., 02.07.2001, 12^{00} Uhr

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

5. Übung zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Information zur Schein- und Vordiplomsklausur

Am 20.07.2001 findet von $10^{00} - 11^{30}$ Uhr im Roten Hörsaal eine **Diskussionsstunde** statt. Dort besteht die Möglichkeit, Fragen zu dem in der Vorlesung und in den Übungen behandelten Stoff zu stellen.

Die **Scheinklausur** für PhysikerInnen findet statt am Dienstag, 24.07.2001, $14^{00} - 16^{00}$ Uhr im Hörsaal Fo 2. Die Einsicht ist voraussichtlich am Freitag, 27.07.2001 von $10^{00} - 12^{00}$ Uhr im R 149.

Die **Vordiplomsklausuren (P+I)** finden am Dienstag, 07.08.2001 gleichzeitig in mehreren Hörsälen statt. Wichtig: Die genaue Aufteilung der TeilnehmerInnen auf die einzelnen Räume wird erst etwa eine Woche vor der Klausur durch Aushang bekanntgegeben.

Für alle Klausuren gilt:

- Lichtbild- und Studentenausweis mitbringen sowie dokumentenechtes Schreibgerät,
- es sind keine Hilfsmittel erlaubt (Papier wird gestellt),
- weitere Informationen (Uhrzeit, Hörsaal, Einsicht,...) entnehmen Sie dem Schaukasten von Prof. Esser.

Hausaufgaben

Aufgabe 1:
Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Näherungslösung des Gleichungssystems $Ax = b$, indem Sie jeweils zwei Schritte des

a) Gesamtschrittverfahrens,

b) Einzelschrittverfahrens

mit dem Startwert $x^0 = (1, 1, 1)^T$ durchführen. (4+4 Punkte)

Aufgabe 2:
Gegeben sei die Wertetabelle

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	4
f_i	-3	1	2	7

a) Bestimmen Sie mit der Interpolationsformel von Lagrange das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom 3. Grades durch die obigen Wertepaare.

b) Bestimmen Sie das Interpolationspolynom 3. Grades durch die obigen Wertepaare mittels des zugehörigen linearen Gleichungssystems.

c) Interpolieren Sie die Wertetabelle gemäß der Newton Form.

d) Wie lautet das Interpolationspolynom unter Hinzunahme des Punktes $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ (Berechnung nach a) bis c)) bzw. der Punkte $(x_4, f_4) = (-1, 1)$ und $(x_5, f_5) = (3, 6)$ (Berechnung nach c))?

(3+3+3+3 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \log\left(2 - \sin(t)\right) dt.$$

Der Wert $f(0.85)$ soll bis auf einen Fehler von $\frac{1}{3200}$ durch Polynominterpolation benachbarter Stützstellen berechnet werden. Zeigen Sie:

a) Die Genauigkeit der linearen Interpolation in den Punkten $0.8, 0.9$ genügt nicht. (Hinweis: $\cos(1) > \frac{1}{2}$.)

b) Die Genauigkeit der quadratischen Interpolation in den Punkten $0.8, 0.9, 1.0$ reicht schon aus.

(4+4 Punkte)

Abgabe bis Do., 12.07.2001, 12^{00} Uhr

Sonderaufgaben

Die Sonderaufgaben werden in der Großübung am 13.07.2001 behandelt.

Aufgabe 1:
Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist als Tabelle gegeben. Berechnen Sie einen Näherungswert für $f(0.75)$ mit dem Neville–Aitken–Schema unter Benutzung aller Tabellenwerte.

x	0.0	0.5	1.0	1.5
$\sin x$	0.0	0.47943	0.84147	0.99750

Aufgabe 2:
Gegeben sind die Punkte

x_i	-1	0	1
y_i	-2	-1	1

Diese Punkte (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3$, sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = ax + b(1 - x - x^2)$$

liegen.

a) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate durch Lösung der Normalengleichungen.

b) Bestimmen Sie die Parameter $a, b \in I\!R$ optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode mit Hilfe der folgenden QR–Zerlegung

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Institut für Geometrie
und Praktische Mathematik
Prof. Dr. H. Esser Dipl. Math. J. Vorloeper

2. Zusatzübung (für PhysikerInnen) zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

Aufgabe 1:
Für ein ideales Gas mit Druck P, Volumen V und absoluter Temperatur T gilt die Zustandsgleichung $PV = cT$ (c eine Konstante). Zeigen Sie, daß für ein solches Gas die Beziehung

$$\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P}\frac{\partial P}{\partial V} = -1$$

gilt. (4 Punkte)

Aufgabe 2:
In dieser Aufgabe soll der Laplacesche Differentialausdruck

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \qquad \text{für } U(x,y)$$

auf Polarkoordinaten transformiert werden. U habe stetige partielle Ableitungen bis zur zweiten Ordnung. Es sei $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $u(r,\varphi) := U(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Dann ist

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 3:
Gegeben seien n Körper mit den Massen m_i ($i = 1, \ldots, n$), die sich zur Zeit t_0 an den Orten $\mathbf{x}_{i_0}$ aufhalten und die Geschwindigkeiten $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}$ haben; dabei sind die $\mathbf{x}_{i_0}$ und $\dot{\mathbf{x}}_{i_0}$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dann übt der j-te Körper auf den i-ten Körper die Kraft

$$\mathbf{F}_{i,j}(t) = G\,\frac{m_i\, m_j}{|\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)|^3}\left(\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)\right)$$

aus. Dabei ist G die sogenannte *Gravitationskonstante*. Insgesamt wird also auf den i-ten Körper die Kraft

$$\mathbf{F}_i(t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \mathbf{F}_{i,j}(t) = m_i\,\ddot{\mathbf{x}}_i(t)$$

ausgeübt. Dies gilt für alle Körper und ergibt ein System von $(3n)$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Überführen Sie dieses System in ein System von $(6n)$ Differentialgleichungen erster Ordnung. Geben Sie die Gleichung explizit in $\mathbf{x}_i$ und den eingeführten Variablen an.

(6 Punkte)

Abgabe bis Mo., 21.05.2001, 12^{00} Uhr

3. Zusatzübung (für PhysikerInnen) zu Differentialgleichungen und Numerik, SS 01

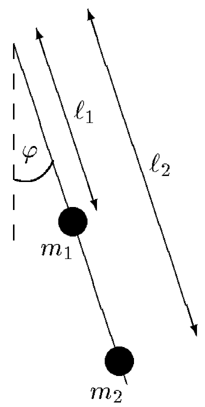
Aufgabe 1:
Zur Zeit $t = 0$ gehe der Fallschirm eines Springers auf, als er sich gerade in der Höhe H befinde und mit einer Geschwindigkeit des Betrages v senkrecht falle. Bestimmen Sie Höhe und Geschwindigkeit des Systems (Gesamtmasse m) für $t > 0$ unter der Annahme, daß die Luftreibung proportional zum Betrag der Geschwindigkeit sei und der Auftrieb dem System die effektive Masse m' verleihe. (Die Erdbeschleunigung sei g.) (6 Punkte)

Aufgabe 2:
An einer dünnen, masselosen und an einem Ende aufgehängten Stange seien in den Abständen ℓ_1, ℓ_2 vom Aufhängepunkt zwei Massenpunkte m_1, m_2 befestigt (s. Skizze). Unter dem Einfluß der Schwerkraft möge die Anordnung reibungsfrei ebene Pendelschwingungen ausführen.

a) Berechnen Sie die Schwingungsfrequenz ω für den Fall kleiner Ausschläge. Was ergibt sich für $\ell_1 = \ell_2$?

b) Allein betrachtet hat jeder Massenpunkt eine Schwingungsfrequenz $\omega_i = (g/\ell_i)^{1/2}$, $i = 1, 2$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen ω und den ω_1, ω_2? Welche Länge müßte ein gewöhnliches Pendel mit der gleichen Schwingungsdauer wie die gegebene Anordnung haben?

c) Bleiben die Ergebnisse richtig, falls eine der Längen negativ wird? Was erhält man für $\ell_1 = -\ell_2$? Verallgemeinern Sie die Resultate aus a), b) auf $n > 2$ Massenpunkte $m_1, \ldots, m_n$ in den Abständen $\ell_1, \ldots, \ell_n$ vom Aufhängepunkt.



(4+4+2 Punkte)

Aufgabe 3:
Ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit schwacher Dämpfung gehorche der Bewegungsgleichung

$$m\,\ddot{x}_s + \zeta\,\dot{x}_s + k\,x_s = K_s(t)$$

mit der zeitabhängigen Kraft

$$K_s(t) = \begin{cases} K\,s\,e^{st}, & t \leq 0; \\ 0, & t > 0. \end{cases}$$

Der Parameter s sei positiv ($s > 0$).

a) Bestimmen Sie $x_s(t)$ mit den Anfangsbedingungen

$$x_s(-\infty) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_s(-\infty) = 0.$$

b) Berechnen Sie die totale vom System absorbierte Energie

$$E_s = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_s(t)\,K_s(t)\,dt.$$

c) Untersuchen Sie den Grenzfall $s \to \infty$.

(4+4+4 Punkte)

Abgabe bis Mo., 11.06.2001, 12^{00} Uhr