

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE  
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK  
**Differentialgleichungen und Numerik — Sommer 98**

Prof. Dr. Henning Esser – Dr. Alexei Chadrine

**Aufgabenblatt zur Scheinklausur, 07. Juli 1998**

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten. Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.

Die Klausurergebnisse werden ab Donnerstag, 9. Juli 1998, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet ebenfalls am 9. Juli im Raum 149, Hauptgebäude erster Stock, von 10.00 bis 11.00 Uhr statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

**Aufgabe 1:**

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind (jede richtige Antwort ergibt einen Punkt):

- a.) Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die auf  $[a, b]$  genau eine Nullstelle besitzt. Dann konvergiert das (vereinfachte) Newton-Verfahren für jeden Startwert  $x_0 \in [a, b]$  gegen diese Nullstelle.

- b.) Ist  $y(x)$  eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x, x_0 \in I,$$

mit einer stetigen Funktion  $f$ , dann konvergiert das Euler-Cauchy-Verfahren für  $h \rightarrow 0$  gegen diese Lösung.

- c.) Sei  $I$  ein offenes Intervall,  $x_0 \in I$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  und seien die  $n \times n$  Matrix  $A(x)$  und die Funktion  $b(x)$  stetig auf  $I$ . Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$y'(x) = A(x)y(x) + b(x), \quad y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung auf  $I$ .

- d.) Sei  $q$  ein Polynom vom Grad  $\leq n - 1$ ,  $\{t_i\}_{i=1}^n$  paarweise verschiedene Punkte, und  $p = p(q, x)$  das Interpolationspolynom vom Grad  $n - 1$ , so daß

$$p(q, t_i) = q(t_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Dann gilt

$$p(q, x) \equiv q(x).$$

Punkte: 4

**Aufgabe 2:**

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem zur Differentialgleichung  $y' = Ay$  mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Punkte: 9

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie

$$y'(x) = \frac{4}{x} y(x) + x \sqrt{y(x)}, \quad \text{für } x > 0, y \geq 0 \quad \text{und } y(1) = 4.$$

Punkte: 9

**Aufgabe 4:**

Sei  $y$  die Lösung der Differentialgleichung

$$y'''(x) = x^2 y''(x) + x y'(x) - 4y(x) + 4, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

und der Schrittweite  $h = 1$  eine Approximation von  $y(1), y'(1), y''(1)$ .

Punkte: 6

**Aufgabe 5:**

Für welche  $a, b$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix}$$

a.) genau eine Lösung,                      b.) keine Lösung,                      c.) mehr als eine Lösung?

Für welche  $a$  ist die Matrix des Systems positiv definit?

Punkte: 6

**Aufgabe 6:**

a.) Sei  $f(x) = \sin x$  und  $p \in P_2$  dasjenige Polynom, das  $f$  an den Stellen  $0, -\frac{\pi}{2}$  und  $\frac{\pi}{2}$  interpoliert. Geben Sie  $p$  in der Newton-Form an und zeigen Sie, daß für den Interpolationsfehler auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}, \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

b.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom zu  $f$  mit der zusätzlichen Stützstelle  $\frac{\pi}{6}$ .

Punkte: 6

# Scheinklausur, 7. Juli 1998 (Musterlösung)

## Aufgabe 1

- a) Falsch. Das (vereinfachte) Newton-Verfahren nur lokal konvergent ist. 1
- b) Falsch. Es kann viele Lösungen des AWP's geben. 1
- c) Richtig (s. Satz 1.7 der Vorlesung). 1
- d) Richtig. Die Polynome  $p, q \in P_{n-1}$  stimmen in  $n$  verschiedene Punkte überein  
 $\Rightarrow p \equiv q$ . 1

## Aufgabe 2.

1) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & -2 \\ 4 & 1 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 + \lambda)^2(1 - \lambda) - 8 + 4(1 - \lambda) + 4(1 + \lambda) \\ &= (1 + \lambda)^2(1 - \lambda) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{23} = -1. \end{aligned} \quad \text{2}$$

2) Bestimmung der Eigenvektoren.

(i) Für  $\lambda_1 = 1$

$$(A - I)v_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{1}$$

(ii) Für  $\lambda_{23} = -1$

$$(A + I)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{1}$$

(Da  $\dim[\text{Ker}(A + I)] = 1$  ist, ist  $v_2$  einziger Eigenvektor zum Eigenwert  $\lambda_{23} = -1$ ).

(iii) Bestimmung des Hauptvektors der 2. Stufe zu  $\lambda = -1$  durch Lösung der Gleichung  $(A + I)v_3 = v_2$ :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_3 = v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{2}$$

3) Berechnung des Fundamentalsystems. Aus der Formel

$$y_k(t) = e^{\lambda t} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{t^j}{j!} (A - \lambda I)^j v_k$$

folgt für die Hauptvektoren  $v_k$  der Stufe  $p = 1$  die Gleichung

$$y_k(t) = e^{\lambda_k t} v_k, \quad k = 1, 2;$$

und für den Hauptvektor  $v_3$  der Stufe  $p = 2$  die Gleichung

$$y_3(t) = e^{-t} (v_3 + t(A - \lambda I)v_3) = e^{-t} (v_3 + tv_2).$$

Also ist

$$y_1 = e^t v_1 = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_2 = e^{-t} v_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad y_3 = e^{-t} (v_3 + tv_2) = e^{-t} \begin{pmatrix} -t \\ 1 + 2t \\ 1 + t \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem.

$\boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$

### Aufgabe 3

Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$$

ist eine Bernoulli-Differentialgleichung mit  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Da für  $y = 0$  die rechte Seite  $= 0$ , ist  $y \equiv 0$  eine Lösung.

Für  $y > 0$  erhält man durch die Substitution

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^{1/2}(x)$$

die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{2}{x}z + \frac{1}{2}x, \quad z(1) = 2, \quad z(x) > 0. \quad \boxed{1}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{2}{x}z \Rightarrow \ln z = 2 \ln x + c_1 \Rightarrow z = Cx^2. \quad [1]$$

Variation der Konstanten:

$$C'(x)x^2 = \frac{1}{2}x \Rightarrow C(x) = \frac{1}{2} \ln |x| + c_2, \quad [1]$$

also

$$z(x) = C(x)x^2 = x^2 \left( \frac{1}{2} \ln |x| + c_2 \right), \quad \text{wenn } z > 0. \quad [1]$$

Wir haben

$$z(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln x + c_2 > 0 \Leftrightarrow x > e^{-2c_2} \quad [1]$$

Aus der Anfangsbedingung

$$z(1) = 2 \Rightarrow c_2 = 2. \quad [1]$$

Daraus folgt

$$z(x) = x^2 \left( \frac{1}{2} \ln x + 2 \right), \quad x > e^{-4}. \quad [1]$$

Schließlich

$$y(x) = \begin{cases} z^2 = x^4 \left( \frac{1}{2} \ln x + 2 \right)^2, & x > e^{-4}; \\ 0, & x \in (0, e^{-4}]. \end{cases} \quad [1]$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$z' := \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ x^2 z_3 + x z_2 - 4 z_1 + 4 \end{pmatrix} =: f(x, z). \quad [1]$$

2) Sei

$$z(1) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Die Trapezregel

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{2}[f(0, z(0)) + f(1, z(1))]$$

liefert

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_3 + z_2 - 4z_1 + 4 \end{pmatrix}, \quad [1]$$

und das äquivalente Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

3) Lösung des Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 4 \end{array} \right) &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \end{array} \right) \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad [2] \end{aligned}$$

4) Also liefert die Trapezregel folgende Approximation

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \\ y''(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

## Aufgabe 5

1) Gauß-Elimination:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ a & 1 & a & b \\ a^2 & a & 1 & b^2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ \mathbf{a} & 1 - a^2 & a(1 - a^2) & b - a \\ \mathbf{a^2} & a(1 - a^2) & 1 - a^4 & b^2 - a^2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & a & a^2 & 1 \\ \mathbf{a} & 1-a^2 & a(1-a^2) & b-a \\ \mathbf{a}^2 & \mathbf{a} & 1-a^2 & b(b-a) \end{array} \right) \quad [1]$$

a)  $a \neq \pm 1$  – genau eine Lösung für jedes  $b$  (da die Determinante des äquivalenten Systems  $\neq 0$  ist). [1]

b)  $a = \pm 1, b \neq a$  – keine Lösung (da das äquivalente System [1]

$$\begin{aligned} x_1 + ax_2 + a^2x_3 &= 1 \\ 0 &= b-a \\ 0 &= b(b-a) \end{aligned}$$

unlösbar ist).

c)  $a = \pm 1, b = a$  – unendlich viele Lösungen  $x$  (die die Gleichheit [1]

$$x_1 + ax_2 + a^2x_3 = 1$$

erfüllen).

2) Die Cholesky-Zerlegung von  $A$  lautet

$$A = LDL^T, \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

$$A \text{ ist positiv definit} \Leftrightarrow d_{ii} > 0 \quad \forall i \Leftrightarrow 1-a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 1.$$

[1]

## Aufgabe 6

a) Newton-Darstellung:

$$\begin{array}{c|c} -\frac{\pi}{2} & -1 \\ & \frac{2}{\pi} \\ 0 & 0 & 0 \\ & \frac{2}{\pi} \\ \frac{\pi}{2} & 1 \end{array}$$

Also gilt

$$p(x) = -1 + \frac{2}{\pi}(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi}x. \quad [1]$$

a1) Interpolationsfehler:

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{|f'''(\xi)|}{6} |x(x - \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2})|. \quad [1]$$

Bestimmung des Maximums von

$$\omega(x) = x(x - \frac{\pi}{2})(x + \frac{\pi}{2}) = x^3 - \frac{\pi^2}{4}x.$$

Wir haben

$$\omega'(x) = 3x^2 - \frac{\pi^2}{4} = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

Also gilt auf  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  wegen  $\omega(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$|\omega(x)| \leq |\omega(x_{12})| = |\frac{\pi^3}{8 \cdot 3\sqrt{3}} - \frac{\pi^3}{8\sqrt{3}}| = \frac{\pi^3}{4 \cdot 3\sqrt{3}}. \quad [1]$$

Da

$$|f'''(\xi)| := |\cos \xi| \leq 1 \quad [1]$$

ist, gilt die Abschätzung

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{1}{6} \cdot \frac{\pi^3}{12\sqrt{3}} = \frac{\pi^3}{72\sqrt{3}}.$$

2) Die Newton-Darstellung mit der zusätzlichen Stützstelle  $\frac{\pi}{6}$ :

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{\pi}{2} & -1 & & & \\ & & \frac{2}{\pi} & & \\ 0 & 0 & & 0 & \\ & & \frac{2}{\pi} & & \frac{3}{\pi^2} \frac{3}{2\pi} = -\frac{9}{2\pi^3} \\ \frac{\pi}{2} & 1 & & -\frac{1}{2\pi} \frac{6}{\pi} = -\frac{3}{\pi^2} & \\ & & \frac{1}{2} \frac{3}{\pi} = \frac{3}{2\pi} & & \\ \frac{\pi}{6} & \frac{1}{2} & & & \end{array} \quad [1]$$

Also gilt

$$\tilde{p}(x) = \frac{2}{\pi}x - \frac{9}{2\pi^3}x(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) = \frac{25}{8\pi}x - \frac{9}{2\pi^3}x^3. \quad [1]$$

Man kann auch sofort schreiben

$$\tilde{p}(x) = p(x) + cx(x^2 - \frac{\pi^2}{4}) = \frac{2}{\pi}x + cx(x^2 - \frac{\pi^2}{4})$$

und die Konstante  $c$  aus die Gleichheit

$$\tilde{p}(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$$

bestimmen.



RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE  
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK  
**Differentialgleichungen und Numerik — Sommer 98**

Prof. Dr. Henning Esser – Dr. Alexei Chadrine

**Aufgabenblatt zur Vordiplomklausur, 21. Juli 1998**

Die Bearbeitungszeit beträgt insgesamt 120 Minuten. Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt. Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.

Die Klausurergebnisse werden ab Freitag, 24. Juli 1998, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet ebenfalls am 24. Juli im Raum 149, Hauptgebäude erster Stock, von 10.00 bis 11.00 Uhr statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

**Aufgabe 1:**

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind (jede richtige Antwort ergibt einen Punkt):

- a.) Es seien  $I$  ein offenes Intervall und  $A(x)$  eine auf  $I$  Lipschitz-stetige  $n \times n$  Matrix. Dann ist eine Wronski-Matrix (d.h. ein Fundamentalsystem) zur homogenen Gleichung

$$y'(x) = A(x)y(x)$$

eindeutig bestimmt.

- b.) Seien  $I$  ein offenes Intervall,

$$(x_0, y_0) \in D = I \times \mathbb{R}, \quad f(x, y) \text{ eine stetige Funktion auf } D.$$

Ist die Differentialgleichung

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar, dann besitzt diese Gleichung eine maximale Lösung.

- c.) Jede nichtsinguläre Matrix besitzt eine  $LR$ -Zerlegung.
- d.) Je größer die Konditionszahl einer Matrix  $A$  ist, desto kleiner ist die Empfindlichkeit der Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  gegenüber Störungen der rechten Seite.

Punkte: 4

**Aufgabe 2:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) - y''(x) - y'(x) + y(x) = 4e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

Punkte: 9

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie

$$y'(x) = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}, \quad \text{für } y > 0, x > 0 \text{ und } y(2) = 2.$$

Geben Sie auch die maximale Lösung mit dem maximalen Existenzintervall an. Punkte: 7

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' - xy' + y = 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), & k_2 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), \\ k_3 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_2), & k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

und der Schrittweite  $h = 1$  eine Approximation von  $y(1), y'(1)$ . Punkte: 6**Aufgabe 5:**1) Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß für jedes  $a$  mit  $|a| < 1$  das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x = a \sin(xy) \\ y = a \cos(xy) \end{cases} \quad \text{auf } D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

genau eine Lösung besitzt. Für den Kontraktivitätsbeweis verwenden Sie folgende Abschätzung der euklidischen Norm einer Matrix  $A$ :  $\|A\|_2 \leq \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}^2\right)^{1/2}$ .2) Andererseits gilt (wegen  $\sin(-z) = -\sin(z)$  und  $\cos(-z) = \cos(z)$ ):Ist  $(x^*, y^*)$  eine Lösung, dann ist  $(-x^*, y^*)$  auch eine Lösung.

Überlegen Sie diesen "Widerspruch" und verwenden Sie ihn, um die Lösung dieses Systems explizit anzugeben. Punkte: 6+2

**Aufgabe 6:**a.) Finden Sie ein Polynom 1-ten Grades,  $p(x) = m + nx$ , das die Daten

|       |     |     |     |
|-------|-----|-----|-----|
| $t_i$ | -1  | 0   | 1   |
| $y_i$ | $a$ | $b$ | $c$ |

im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode approximiert.

b.) Für welche  $a, b, c$  ist die Fehlerquadratsumme minimal?

Punkte: 4+2

**Viel Erfolg!**

# Vordiplomklausur, 21. Juli 1998 (Musterlösung)

## Aufgabe 1

a) Falsch.

1

Eine Wronski-Matrix ist nur bis auf eine nichtsinguläre lineare Transformation bestimmt (s. Satz 1.9(iii) der Vorlesung).

b) Falsch.

1

Um die Implikation

$$\text{Eindeutigkeit "im kleinen"} \Rightarrow \text{Eindeutigkeit "im großen"}$$

zu garantieren, reicht die Stetigkeit der Funktion  $f$  nicht. Z.B. die Gleichung

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(x_0) = y_0,$$

ist lokal eindeutig lösbar für jedes  $y_0 \neq 0$ , aber für ein großes Intervall  $I \ni x_0$  gibt es viele Lösungen, deshalb keine maximale Lösung.

Lokal Lipschitz-stetigkeit von  $f$  auf  $D$  ist aber schon hinreichend (s. Satz 1.4).

c) Falsch (s. Bemerkung auf S. 52 der Vorlesung).

1

Z.B. gibt es keine  $LR$ -Zerlegung zu  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

d) Falsch.

1

Das Umgekehrte gilt (s. S. 52 der Vorlesung).

## Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^2.$$

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $e^{-x}, \quad e^x, \quad xe^x.$

$\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{-x} & e^x & xe^x \\ -e^{-x} & e^x & (x+1)e^x \\ e^{-x} & e^x & (x+2)e^x \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4e^x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x) \int_{x_0}^x \underbrace{W^{-1}(t)f(t)}_{b(t)} dt, \quad Y_s(x_0) = (0, 0, 0)^T. \quad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von  $b(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)b(x) = f(x)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^x & xe^x & 0 \\ -e^{-x} & e^x & (x+1)e^x & 0 \\ e^{-x} & e^x & (x+2)e^x & 4e^x \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} e^{-x} & e^x & xe^x & 0 \\ 0 & 2e^x & (2x+1)e^x & 0 \\ 0 & 0 & 2e^x & 4e^x \end{array} \right) \Rightarrow b(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -(2x+1) \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:

$$\tilde{b}(x) = \int_0^x b(t) dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} \\ -(x^2 + x) \\ 2x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4a) Eine spezielle Lösung der ursprünglichen DGL:

$y_s(x) := [Y_s(x)]_1$  (= die 1-ste Komponente von  $Y_s(x)$ ),  $y_s(0) = y'_s(0) = y''_s(0) = 0$ ,  
die wegen der Nullanfangsbedingungen des AWP's die geforderte Lösung ist.  $\boxed{1}$

4b) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) &= [W(x)\tilde{b}(x)]_1 = ([e^{-x}, e^x, xe^x], \tilde{b}(x)) \\ &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - (x^2 + x)e^x + 2x^2e^x \\ &= \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x} - xe^x + x^2e^x, \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

### Aufgabe 3

1) Die Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y}, \quad y(2) = 2,$$

ist eine homogene Differentialgleichung der Form  $y' = f(\frac{y}{x})$ .

1

2) Durch die Substitution

$$z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$$

1

erhält man

$$z' = \frac{1}{x} \left( \frac{z}{2} - \frac{1}{2z} - z \right) = \frac{1}{x} \left( -\frac{z^2 + 1}{2z} \right), \quad z(2) = 1.$$

1

3) Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{2z \, dz}{z^2 + 1} = - \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(z^2 + 1) = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow z^2 + 1 = \frac{C}{x}.$$

1

4) Bestimmung der Konstante:

$$z(2) = 1 \Rightarrow C = 4.$$

1

5) Resubstitution:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{4}{x}, \quad \text{oder} \quad y^2 + x^2 = 4x.$$

1

6) Für  $x > 0$ ,  $y > 0$  haben wir folgende maximale Lösung:

$$y = \sqrt{x(4-x)}, \quad 0 < x < 4.$$

1

Die Gleichung

$$y^2 + x^2 = 4x \Leftrightarrow y^2 + (x-2)^2 = 2^2$$

definiert einen Kreis, für  $y > 0$  einen Halbkreis.

### Aufgabe 3 (Alternative)

1) Die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{2x} - \frac{x}{2y} \quad \left( = \frac{1}{2x}y - \frac{x}{2}y^{-1} \right), \quad x, y > 0, \quad y(2) = 2$$

ist eine Bernoulli-Differentialgleichung mit  $\alpha = -1$ .

2) Für  $y > 0$  erhält man durch die Substitution

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = y^2(x) \quad \boxed{1}$$

die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}z - x, \quad z(2) = 4, \quad z(x) > 0. \quad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{1}{x}z \Rightarrow \ln z = \ln x + c_1 \Rightarrow z = Cx. \quad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x = -x \Rightarrow C(x) = -x + c_2, \quad \boxed{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:

$$z(x) = C(x)x = x(c_2 - x), \quad \text{wenn } z > 0.$$

4) Bestimmung der Konstante

$$z(2) = 4 \Rightarrow c_2 = 4. \quad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y^2(x) = x(4 - x) > 0. \quad \boxed{1}$$

5) Für  $x, y > 0$  ist die maximale Lösung gegeben durch

$$y(x) = \sqrt{x(4 - x)}, \quad 0 < x < 4. \quad \boxed{1}$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$z'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ x z_2(x) - z_1(x) + 3 \end{pmatrix} =: f(x, z). \quad \boxed{1}$$

2) Das Runge-Kutta-Verfahren mit der Schrittweite  $h = 1$ :

$$k_1 = f(0, z(0)) = f\left(0, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 - 3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(\frac{1}{2}, z(0) + \frac{1}{2}k_1\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - 4 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$k_3 = k_2 = k_1 \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(1, z(0) + k_3) = f\left(1, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 - 5 + 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = z(0) + k_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

3) Also liefert das Runge-Kutta-Verfahren folgende Approximation

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

## Aufgabe 5

1) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion  $F(x, y)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \sin(xy) \\ a \cos(xy) \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1.1)  $D$  ist offensichtlich abgeschlossen. [1]

1.2)  $F$  ist selbstabbildend, da

$$\forall (x, y) \quad F_1^2(x, y) + F_2^2(x, y) := a^2[\sin^2(xy) + \cos^2(xy)] = a^2 < 1, \quad [1]$$

d.h.

$$F(D) \subset D.$$

1.3) Kontraktivität von  $F$ . Wegen Mittelwertsatz

$$L := \sup_{(x,y) \in D} \|F'(x, y)\| < 1 \quad \Rightarrow \quad F \text{ ist kontrahierend.}$$

Wir haben

$$F'(x, y) = \begin{pmatrix} ay \cos(xy) & ax \cos(xy) \\ -ay \sin(xy) & -ax \sin(xy) \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Nach dem Hinweis

$$L^2 := \sup_{(x,y) \in D} \|F'(x, y)\|^2 \leq \sup_{(x,y) \in D} \sum_{i,j=1}^2 [F'_{ij}(x, y)]^2 = \sup_{x^2+y^2 \leq 1} a^2(y^2 + x^2) = a^2 < 1. \quad [2]$$

1.4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, daß  $F$  auf  $D$  genau einen Fixpunkt besitzt.

2) Da für einen Fixpunkt  $(x^*, y^*)$  auch der Punkt  $(-x^*, y^*)$  ein Fixpunkt der Funktion  $F$  ist, folgt wegen der oben bewiesenen Eindeutigkeit des Fixpunktes von  $F$ , daß

$$(x^*, y^*) = (-x^*, y^*) \quad \Rightarrow \quad x^* = 0. \quad [1]$$

Daraus folgt

$$y^* := a \cos(x^* y^*) = a \cos 0 = a, \quad [1]$$

d.h.

$$x^* = 0, \quad y^* = a$$

ist die (einzige) Lösung des Gleichungssystems.



## Aufgabe 6

1) Gesucht ist ein Polynom  $p(x) = m + nx$ , so daß  $\sum_{i=1}^3 [p(t_i) - y_i]^2$  minimal ist.

1a) Die Koeffizienten  $m, n$  werden als Normallösung des überbestimmten Gleichungssystems  $p(t_i) = y_i$  gefunden, d.h. des Systems

$$\begin{array}{rcl} m - n & = & a, \\ m & = & b, \\ m + n & = & c, \end{array} \quad \text{oder} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}}_y. \quad [1]$$

1b) Man sucht die Normallösung, d.h. die Lösung der Gleichung

$$A^T A x = A^T y. \quad [1]$$

Wir haben

$$A^T A x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c \\ c - a \end{pmatrix} = A^T y, \quad [1]$$

woraus

$$m = \frac{a + b + c}{3}, \quad n = \frac{c - a}{2} \Rightarrow p(x) = \frac{a + b + c}{3} + \frac{c - a}{2} x. \quad [1]$$

2a) Approximationsfehler in den Stützstellen:

$$\begin{aligned} p(-1) - y_1 &= \frac{a+b+c}{3} - \frac{c-a}{2} - a = \frac{a+b+c}{3} - \frac{c+a}{2} = \frac{2b-(a+c)}{6} \\ p(0) - y_2 &= \frac{a+b+c}{3} - b = \frac{(a+c)-2b}{3} \\ p(1) - y_3 &= \frac{a+b+c}{3} + \frac{c-a}{2} - c = \frac{a+b+c}{3} - \frac{c+a}{2} = \frac{2b-(a+c)}{6} \end{aligned} \quad [1]$$

2b) Fehlerquadratsumme:

$$\sum_{i=1}^3 [p(t_i) - y_i]^2 = \text{const} \cdot [2b - (a + c)]^2.$$

2c) Das Minimum, das = 0 ist, wird für  $b = \frac{a + c}{2}$  erreicht [1]

### Alternative

2a) Die Fehlerquadratsumme  $S$  ist immer  $\geq 0$ .

2b)  $S = 0 \Leftrightarrow p(t_i) = y_i \Leftrightarrow$  die Punkte  $(t_i, y_i)$  auf einer Geraden liegen: [1]

$$\frac{b - a}{0 - (-1)} = \frac{c - b}{1 - 0} \Rightarrow b = \frac{a + c}{2}. \quad [1]$$

RHEINISCH WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE  
INSTITUT FÜR GEOMETRIE UND PRAKTISCHE MATHEMATIK  
**Differentialgleichungen und Numerik — Winter 98/99**

Prof. Dr. Henning Esser – Dr. Alexei Chadrine

**Aufgabenblatt zur Vordiplomklausur, 30. März 1999**

- Bearbeitungszeit: 2 Stunden = 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Do, 1. April 1999, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Do, 1. April 1999, 10.00–12.00 Uhr, Hörsaal IV
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben!
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten.
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen!
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen!
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen!

**Aufgabe 1:**

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind. Jede richtige Antwort ergibt einen Punkt, für falsche Angaben gibt es **keinen** Punktabzug.

- a.) Es seien  $I$  ein abgeschlossenes Intervall und  $f : I \rightarrow I$  eine stetige Selbstabbildung, die genau einen Fixpunkt  $x^* \in I$  hat. Dann existiert eine  $\epsilon$ -Umgebung  $U_\epsilon$  von  $x^*$ , so daß für jedes  $x_0 \in U_\epsilon$  die Banach'sche Iterationsfolge  $x_{k+1} = f(x_k)$  gegen  $x^*$  konvergiert.
- b.) Die Differentialgleichung

$$f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = \sin x, \quad x \in (0, 1)$$

hat auf  $(0, 1)$  drei (3) linear unabhängige Lösungen.

- c.) Für einen Vektor  $b \in \mathbb{R}^n$  und eine Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist das lineare Gleichungssystem

$$A^T A x = A^T b$$

stets lösbar.

- d.) Das Anfangswertproblem

$$y' = y^2 + e^{x^2} y, \quad y(0) = 1$$

ist lokal eindeutig lösbar.

Punkte: 1+1+1+1=4

**Aufgabe 2:**

Lösen Sie das System der Differentialgleichungen

$$\begin{cases} y_1'(t) &= 4y_1(t) + y_2(t), \\ y_2'(t) &= -2y_1(t) + y_2(t) + e^{3t}; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1(0) &= 0, \\ y_2(0) &= 0. \end{cases}$$

*Hinweis.* Reduktion auf  $Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t)$ .

Punkte: 9

### Aufgabe 3:

Lösen Sie

$$y'(x) = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{\ln^2 x}, \quad \text{für } 0 < x < 1 \text{ und } y(1/e) = e.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

*Hinweis zu einem der betreffenden Integrale.*  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ .

Punkte: 6+1=7

### Aufgabe 4:

Sei  $y$  die Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) = 2y(x) - xy'(x), \quad y(2) = 5, \quad y'(2) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem

a.) Euler-Cauchy-Verfahren:      b.) rückwärtigen Euler-Cauchy-Verfahren:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$$

und der Schrittweite  $h = 1$  jeweils eine Approximation von  $y(3), y'(3)$ .

Punkte: 6

### Aufgabe 5:

Gegeben seien

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9+a & 9+2a & 3+a \\ 3 & 9+2a & 9+5a & 3+3a \\ 1 & 3+a & 3+3a & 2+2a \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 37 \\ 11 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

a.) Bestimmen Sie die  $LDL^T$ -Zerlegung der Matrix  $A_a$ .

b.) Lösen Sie das Gleichungssystem  $A_a x = b$  für  $a = 2$ .

c.) Wieviele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem  $A_a x = c$  für  $a = -1$ ?

(Begründung dazu)

Punkte: 3+3+1=7

### Aufgabe 6:

Sei  $p \in P_3$  das kubische Interpolationspolynom zu  $f(x) = \sin \frac{\pi}{2}x$  in den folgenden Knoten

|          |    |    |   |    |
|----------|----|----|---|----|
| $x_k$    | -3 | -1 | 1 | 3  |
| $f(x_k)$ | 1  | -1 | 1 | -1 |

a.) Zeigen Sie, ohne das Polynom  $p$  zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler in  $x = 0$  gilt:

$$|f(0) - p(0)| \leq \frac{9}{24}(\pi/2)^4.$$

b.) Geben Sie  $p$  in der Newton-Form an.

c.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $q \in P_4$  zu  $f$  mit der zusätzlichen Stützstelle  $x_5 = 0$ .

d.) Wie groß ist der Interpolationsfehler  $|f(0) - p(0)|$  tatsächlich? (Begründung)

Punkte: 1+4+1+1=7

**Viel Erfolg!**

## Aufgabe 1

a) Falsch.

1

Die dritte Voraussetzung des Banach'schen Fixpunktsatzes (Kontraktivität) fehlt.

Z.B. die Funktion

$$f(x) = 1/x, \quad x \in [1/2, 2]$$

hat genau einen Fixpunkt  $x^* = 1$ , aber, wenn  $x_0 \neq 1$ , alterniert jede Iterationsfolge  $x_{k+1} = f(x_k)$  zwischen  $x_0$  und  $1/x_0$ .

b) Richtig (s. S. 23 der Vorlesung)

1

Jede lineare DGL der Ordnung  $n$  mit stetiger rechten Seite hat  $n$  linear unabhängige Lösungen.

c) Richtig (s. S. 81 der Vorlesung).

1

d) Richtig.

1

Die rechte Seite ist Lipschitz-stetig.

## Aufgabe 2.

1) Äquivalente Formulierung

$$Y'(t) = A \cdot Y(t) + F(t), \quad Y(0) = 0; \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}. \quad [1]$$

2a) Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3. \quad [1]$$

2b) Bestimmung der Eigenvektoren.

$$\lambda_1 = 2 \Rightarrow (A - 2I)v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

$$\lambda_2 = 3 \Rightarrow (A - 3I)v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

2c) Berechnung des Fundamentalsystems  $\{e^{\lambda_k t} v_k\}_{k=1}^2$  und einer Wronski-Matrix:

$$y_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad y_2 = e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad W(t) = [y_1, y_2] = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \quad [1]$$

3) Lösung des Systems (Variation der Konstanten)

$$Y' = AY + F, \quad Y(t_0) = 0 \Rightarrow Y(t) = W(t) \int_{t_0}^t \underbrace{W^{-1}(x)F(x)}_{b(x)} dx. \quad [1]$$

3a) Berechnen von  $b(t) = W^{-1}(t)F(t)$  als Lösung des Systems  $W(t)b(t) = F(t)$ :

$$\begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix} \Rightarrow b(t) = \begin{pmatrix} -e^t \\ 1 \end{pmatrix}. \quad [1]$$

3b) Integrieren:  $\tilde{b}(t) = \int_0^t b(x) dx = \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix}. \quad [1]$

3c) Berechnen von  $Y(t)$ :

$$Y(t) = W(t)\tilde{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{3t} \\ -2e^{2t} & -e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^t + 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{3t} + e^{2t} + te^{3t} \\ 2e^{3t} - 2e^{2t} - te^{3t} \end{pmatrix}. \quad [1]$$

$$\Sigma = [9]$$

### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y' = -\frac{y}{x} + \frac{y^2}{\ln^2 x} \quad 0 < x < 1, \quad y(1/e) = e$$

ist eine Bernoulli-DGL mit  $\alpha = 2$ .

2a) Substitution (für  $y(x) \neq 0$ ):

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = 1/y(x) \quad \boxed{1}$$

2b) Die lineare Differentialgleichung

$$z' = \frac{1}{x}z - \frac{1}{\ln^2 x}, \quad z(1/e) = 1/e. \quad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{1}{x}z \Rightarrow \ln |z| = \ln |x| + c_1 \Rightarrow z = Cx. \quad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x = -\frac{1}{\ln^2 x} \Rightarrow C'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x} \Rightarrow C(x) = \frac{1}{\ln x} + c_2 \quad \boxed{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:

$$z(x) = C(x)x = \frac{x}{\ln x} + c_2x.$$

4) Bestimmung der Konstante

$$-1/e + c_2/e = z(1/e) = 1/e \Rightarrow c_2 = 2. \quad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y(x) = 1/z(x) = \frac{\ln x}{x(2 \ln x + 1)}. \quad \boxed{1}$$

6) Da für  $x = 1/\sqrt{e}$  der Nenner  $x(2 \ln x + 1) = 0$  ist, und die Ungleichungen

$$0 < 1/e < 1/\sqrt{e} < 1$$

gelten, ist für  $0 < x < 1$  das maximale Existenzintervall gegeben durch

$$0 < x < 1/\sqrt{e}. \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad z^{(0)} := z(2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$$z' := \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ 2z_1 - xz_2 \end{pmatrix} =: f(x, z). \quad \boxed{1}$$

a.) Euler-Cauchy-Verfahren ( $h = 1, x_0 = 2$ ):

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(0)} \\ 2 \cdot z_1^{(0)} - x_0 \cdot z_2^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \cdot 5 - 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

b.) Rückwärtiges Euler-Cauchy-Verfahren ( $h = 1, x_1 = 3$ ):

$$\begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_2^{(1)} \\ 2 \cdot z_1^{(1)} - x_1 \cdot z_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

und das äquivalente Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 + x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^{(1)} \\ z_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1^{(0)} \\ z_2^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

Lösung des Gleichungssystem.

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 4 & 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 14 \end{array} \right) \Rightarrow z^{(1)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

a.)  $LDL^T$ -Zerlegung von  $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 9+a & 9+2a & 3+a \\ 3 & 9+2a & 9+5a & 3+3a \\ 1 & 3+a & 3+3a & 2+2a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & 2a & 5a & 3a \\ \mathbf{1} & a & 3a & 1+2a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & a & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & a & 1+a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & a & 2a & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & a & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{3}$$

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \mathbf{3} & 1 & & \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & 1 & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, a, a, 1), \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

b.)  $a = 2 \Rightarrow D = \text{diag}(1, 2, 2, 1).$

$$L \underbrace{D \overbrace{L^T}^{\tilde{y}} x}_y = b = (0, 2, 6, 3)^T.$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 3 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$D\tilde{y} = y \Rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$L^T x = \tilde{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

c.) Genau eine Lösung. (Für  $a = -1$  ist  $\det A_a = \det D = a^2 \neq 0$ ).  $\boxed{1}$

$\Sigma = \boxed{7}$



## Aufgabe 6

a) Interpolationsfehler:

$$|p(x) - f(x)| \leq \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!} |\omega(x)|, \quad \omega(x) := (x+3)(x+1)(x-1)(x-3).$$

$$|f^{(4)}(\xi)| := |(\sin \frac{\pi}{2} \xi)^{(4)}| \leq (\pi/2)^4, \quad |\omega(0)| = 9 \quad \Rightarrow \quad |f(0) - p(0)| \leq \frac{9}{24}(\pi/2)^4. \quad \boxed{1}$$

b)-c) Die Newton-Darstellung (mit der zusätzlichen Stützstelle 0):

$$\begin{array}{c|cccccc} -3 & \mathbf{1} & & & & & \\ & & -\mathbf{1} & & & & \\ -1 & -1 & & \frac{1}{2} & & & \\ & & 1 & & -\frac{1}{6} & \dots & \\ 1 & 1 & & -\frac{1}{2} & \dots \vdots & & \mathbf{0} \\ & & -1 & \dots \vdots & -\frac{1}{6} & & \\ 3 & -1 & \dots \vdots & -\frac{2}{3} & & & \\ \dots & \dots \vdots & -\frac{1}{3} & & & & \\ 0 & 0 & & & & & \end{array} \quad \boxed{3}$$

Also gilt

$$p(x) = 1 - (x+3) + \frac{1}{2}(x+3)(x+1) - \frac{1}{6}(x+3)(x+1)(x-1). \quad \boxed{1}$$

und

$$q(x) \equiv p(x) \quad \boxed{1}$$

d.) Deshalb  $f(0) := q(0) = p(0)$ , und ist tatsächlich  $|f(0) - p(0)| = 0$ .  $\boxed{1}$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabenblatt zur Scheinklausur, 6. Juli 1999

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Do, 08. Juli 1999, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Do, 08. Juli 1999, 10.00–11.00 Uhr, R. 149
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten;
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen;
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- Keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten.

### Aufgabe 1.

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind (jede richtige Antwort ergibt einen Punkt):

- a.) Für jede  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$  besitzt das Anfangswertproblem

$$y' = y + y^{1999}, \quad y(x_0) = y_0$$

eine maximale Lösung.

1

- b.) Die Differentialgleichung

$$y''' - 2y'' + 2y' - y = e^x, \quad x \in (0, 1)$$

hat auf  $(0, 1)$  vier linear unabhängige Lösungen.

1

- c.) Wenn die Funktion  $f(x)$  auf dem Intervall  $(a, b)$  genau eine Nullstelle  $x^*$  besitzt, konvergiert das Newton Verfahren für jeden Startwert  $x_0 \in (a, b)$  gegen  $x^*$ .

1

- d.) Jede nichtsinguläre Matrix besitzt eine  $LR$ -Zerlegung.

1

**Aufgabe 2:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem:

$$y' = Ay, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad y(0) = (1, 1, 1)^T. \quad \boxed{9}$$

**Aufgabe 3**

Lösen Sie die DGL

$$y' = y + \frac{2x}{y}, \quad \text{für } y < 0, \quad y(-1) = -1.$$

Geben Sie das maximale Existenzintervall.  $\boxed{7}$

**Aufgabe 4.**

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $(x^0, y^0) = (0, \pi)$  aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + y \sin x &= \pi + 1 \\ y + x \cos y &= -(\pi + 1) \end{cases},$$

zu approximieren.  $\boxed{6}$

**Aufgabe 5.**

Gegeben seien

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4+a & 6+a^2 & 2+a \\ 3 & 6+a^2 & 10+a^3 & 4+a^2 \\ 1 & 2+a & 4+a^2 & 3+a \end{pmatrix}, \quad b = (-1, 2, 8, 7)^T.$$

a.) Bestimmen Sie die  $LDL^T$ -Zerlegung der Matrix  $A_a$ .  $\boxed{3}$

b.) Für welche  $a$  ist  $A_a$  positiv definit?  $\boxed{1}$

c.) Lösen Sie das Gleichungssystem  $A_a x = b$  für  $a = 2$ .  $\boxed{3}$

**Aufgabe 6.**

Sei  $p \in P_2$  dasjenige Polynom, das die Werte

$$\text{von } f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{auf } x_i \in \{1, 2, 3\}$$

interpoliert.

a.) Geben Sie  $p$  in der Newton-Form an.  $\boxed{3}$

b.) Berechnen Sie das Interpolationspolynom  $q \in P_3$  zu  $f$  mit der zusätzlichen Stützstelle 0.  $\boxed{2}$

c.) Zeigen Sie, daß für den Interpolationsfehler an der Stelle  $x = \frac{3}{2}$  gilt:

$$|f(\frac{3}{2}) - p(\frac{3}{2})| \leq \frac{1}{128} \quad \boxed{2}$$

$$\Sigma = \boxed{40}$$

**Viel Erfolg!**

# **Scheinklausur, 6. Juli 1999 (Musterlösung)**

## **Aufgabe 1**

- a) richtig
- b)-d) falsch

## Aufgabe 2.

1) Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= -(1-\lambda)^2(1+\lambda) - 4 + 2(1-\lambda) + 2(1+\lambda) \\ &= -(1-\lambda)^2(1+\lambda) \Rightarrow \lambda_{12} = 1, \quad \lambda_3 = -1. \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

2) Bestimmung der Eigenvektoren.

$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow (A - I)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} v_1 = 0 \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$$\lambda_3 = -1 \Rightarrow (A + I)v_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Bestimmung des Hauptvektors der Stufe 2 durch Lösung  $(A - \lambda_{12}I)v_2 = v_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} v_2 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Eine Wronski-Matrix:  $W(t) = (e^t v_1, e^t(v_2 + t v_1), e^{-t} v_3) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & 2e^{-t} \\ e^t & t e^t & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad \boxed{3}$

5) Allgemeine Lösung:  $y(t) = W(t)c$ . Bestimmung von  $c$  durch Lösung  $W(0)c = (1, 1, 1)^T$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Lösung des AWP's:  $y(t) = W(t)c = \begin{pmatrix} e^t & t e^t & -e^{-t} \\ 0 & e^t & 2e^{-t} \\ e^t & t e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+t)e^t \\ e^t \\ (1+t)e^t \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$

$$\Sigma = \boxed{9}$$

### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y' = y + \frac{2x}{y}, \quad y < 0, \quad y(-1) = -1,$$

ist eine Bernoulli-DGL mit  $\alpha = -1 \Rightarrow$  Substitution:  $z = y^{1-\alpha} = y^2$  1

2) Lineare DGL:

$$z' = 2z + 4x, \quad z(-1) = 1, \quad z(x) > 0. \quad \text{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = 2z \Rightarrow z = C e^{2x}. \quad \text{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)e^{2x} = 4x \Rightarrow C'(x) = 4xe^{-2x} \Rightarrow C(x) = -(2x+1)e^{-2x} + c, \quad \text{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:  $z = -(2x+1) + ce^{2x}$

4) Bestimmung der Konstante:

$$z(-1) = 1 \Rightarrow c = 0. \quad \text{1}$$

5) Resubstitution:

$$y = -\sqrt{z} = -\sqrt{-(2x+1)}. \quad \text{1}$$

6) Das Existenzintervall:

$$-(2x+1) > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2}. \quad \text{1}$$

$$\Sigma = \text{7}$$

### Aufgabe 4.

1) Suche nach einer Nullstelle der Funktion  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \sin x - (\pi + 1) \\ y + x \cos y + (\pi + 1) \end{pmatrix}$   $\boxed{1}$

2) Jacobi Matrix:  $F'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + y \cos x & \sin x \\ \cos y & 1 - x \sin y \end{pmatrix}$   $\boxed{1}$

3) Berechnen von  $F(z^0)$ ,  $F'(z^0)$

$$F(0, \pi) = \begin{pmatrix} -(\pi + 1) \\ 2\pi + 1 \end{pmatrix}, \quad F'(0, \pi) = \begin{pmatrix} 1 + \pi & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

4) Lösung des Gleichungssystems  $F'(z^0)\Delta z^0 = F(z^0)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 + \pi & 0 & -(\pi + 1) \\ -1 & 1 & 2\pi + 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \Delta x^0 \\ \Delta y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\pi \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Die nächste Näherung  $z^1 = z^0 - \Delta z^0$ :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

a.)  $LDL^T$ -Zerlegung von  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4+a & 6+a^2 & 2+a \\ 3 & 6+a^2 & 10+a^3 & 4+a^2 \\ 1 & 2+a & 4+a^2 & 3+a \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{3} & a^2 & 1+a^3 & 1+a^2 \\ \mathbf{1} & a & 1+a^2 & 2+a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{a} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{3} & \mathbf{a} & 1 & 1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{3}$$

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \mathbf{2} & 1 & & \\ \mathbf{3} & \mathbf{a} & 1 & \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, a, 1, 1), \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 1 & a & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

b.)  $A > 0 \Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow a > 0.$

$\boxed{1}$

c.)  $a = 2 \Rightarrow D = \text{diag}(1, 2, 1, 1).$

$$L \underbrace{D L^T}_y x = \underbrace{\tilde{y}}_b = (-1, 2, 8, 7)^T.$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 2 & 1 & & \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$D\tilde{y} = y \Rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$L^T x = \tilde{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 1 & 2 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$\Sigma = \boxed{7}$



## Aufgabe 6

1) Dividierte Differenzen mit der zusätzlichen Stützstelle 0:

$$\begin{array}{c|cccc}
 1 & \frac{1}{2} & & & \\
 & & -\frac{1}{6} & & \\
 2 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{24} & \\
 & & -\frac{1}{12} & \cdots & -\frac{1}{24} \\
 3 & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{12} & \\
 \cdots & \vdots & & & \\
 0 & 1 & & & 
 \end{array} \quad \boxed{2} + \boxed{1}$$

2) Newton Darstellung

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(x-1) + \frac{1}{24}(x-1)(x-2) \\
 q(x) &= p(x) - \frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)
 \end{aligned} \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3) Abschätzung für die 3-te Ableitung:

$$f'''(x) = -\frac{3!}{(x+1)^4} \Rightarrow \max_{\xi \in [1,3]} \frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \max_{\xi \in [1,3]} \frac{1}{(\xi+1)^4} = \frac{1}{(1+1)^4} = \frac{1}{16} \quad \boxed{1}$$

4) Interpolationsfehler:

$$\left| p\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) \right| \leq \max_{\xi \in [1,3]} \frac{|f'''(\xi)|}{3!} \left| \left(\frac{3}{2} - 1\right)\left(\frac{3}{2} - 2\right)\left(\frac{3}{2} - 3\right) \right| = \frac{1}{16} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{128} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabenblatt zur Vordiplomklausur, 20. Juli 1999

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Fr, 23. Juli 1999, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Fr, 23. Juli 1999, 10.00–12.00 Uhr, R. 149
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten;
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen;
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- Keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten.

### Aufgabe 1.

Geben Sie auf der Rückseite des Deckblatts an, ob die folgenden Aussagen jeweils richtig oder falsch sind (jede richtige Antwort ergibt einen Punkt):

- a.) Für jede  $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ ,  $y_0 \neq 0$ , ist das Anfangswertproblem

$$y' = x^2 y + x y^{1/2}, \quad y(x_0) = y_0$$

lokal eindeutig lösbar.

1

- b.) Für jede Menge von Stützstellen  $\{x_i\}$  und Werte  $\{y_i\}$  gibt es genau ein Polynom  $p$  vom Grad  $n$ , so daß

$$p(x_i) = y_i, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

1

- c.) Jede symmetrische nichtsinguläre Matrix besitzt eine  $LDL^T$ -Zerlegung.

1

- d.) Sei  $W(x)$  eine Wronski-Matrix zur Differentialgleichung

$$y'(x) = Ay(x), \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dann ist  $\det W(x) \neq 0$  für jedes  $x \in \mathbb{R}$ .

1

### Aufgabe 2.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(x) - 4y''(x) + 5y'(x) - 2y(x) = 2e^x, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$$

9

### Aufgabe 3

Lösen Sie

$$y'(x) = \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}, \quad \text{für } x > 0 \text{ und } y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

Hinweis.  $\frac{1}{(x-A)(x-B)} = C \left( \frac{1}{(x-A)} - \frac{1}{(x-B)} \right).$

7

### Aufgabe 4

Gegeben ist die Gleichung

$$y''' = x^2 y'' - x y' + y - 1, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = 0.$$

Berechnen Sie mit der Trapezregel

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$$

und der Schrittweite  $h = 1$  eine Approximation von  $y(2), y'(2), y''(2)$ .

6

### Aufgabe 5

1) Für welche  $a, b$  hat das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 5 & -11 \\ 4 & -11 & 26 - a^2 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 - 3b^2 \end{pmatrix}$$

a.) genau eine Lösung, b.) keine Lösung, c.) mehr als eine Lösung?

2) Für welche  $a$  ist die Matrix des Systems positiv definit?

7

### Aufgabe 6

Zeigen Sie mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes, daß für jedes  $a \in (0, 1)$  das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x = a \ln(1 + xy) \\ y = a \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2 y^2} \end{cases} \quad \text{auf } D = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$$

genau eine Lösung besitzt.

Für den Kontraktivitätsbeweis verwenden Sie die  $l_\infty$ -Norm einer Matrix  $A$ :  $\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ .

Hinweis. Um das Maximum einer symmetrischen Funktion  $G(x, y)$  (d.h.  $G(x, y) = G(y, x)$ ) zu bestimmen, kann man die folgende Aussage benutzen:

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in [a, b] \Rightarrow \begin{cases} \max_{x, y \in [a, b]} G(x, y) = G(b, b) \\ \max_{x, y \in [a, b]} xy \cdot G(x, y) = b^2 G(b, b) \end{cases}$$

7

$\Sigma =$  40

Viel Erfolg!

# Vordiplomklausur, 20. Juli 1999 (Musterlösung)

## Aufgabe 1

Für die Aufgaben a)-b) hat jeder 2 Punkte bekommen

(da diese nicht deutlich formuliert wurden)

a) Für  $y_0 < 0$  ist die rechte Seite nicht bestimmt  
Für  $y_0 > 0$  ist die DGL lokal eindeutig lösbar, da die rechte Seite lokal Lipschitz-stetig ist.

b) Für  $n + 1$  paarweise verschiedene Stützstellen gibt es genau ein Interpolationsspolynom vom Grad  $p$ .

c) Falsch. Es gibt keine  $LDL^T$ -Zerlegung für  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . 1

d) Richtig. Die Determinante von Wronski-Matrix ist von Null verschieden. 1

## Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S_1 = \{e^x, xe^x, e^{2x}\}$   $\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \underbrace{\int_{x_0}^x W^{-1}(t)f(t) dt}_{c'(t)}, \quad Y_s(x_0) = (0, 0, 0)^T. \quad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ e^x & (x+1)e^x & 2e^{2x} \\ e^x & (x+2)e^x & 4e^{2x} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & 2e^x & 3e^{2x} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^x \end{vmatrix} \quad \boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e^x & xe^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & e^{2x} \\ 0 & 0 & e^{2x} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^x \end{vmatrix} \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ -2 \\ 2e^{-x} \end{pmatrix}.$$

3b) Integrieren:  $c(x) = \int_0^x c'(t) dt = \begin{pmatrix} x^2 - 2x \\ -2x \\ -2e^{-x} + 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) &= [W(x)c(x)]_1 = ([e^x, xe^x, e^{2x}], [x^2 - 2x, -2x, -2e^{-x} + 2]) \\ &= (x^2 - 2x)e^x - 2x^2e^x - 2e^x + 2e^{2x} \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^x + 2e^{2x}. \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{9}$$

## Aufgabe 2 (Andere Sortierung des FS)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2$$

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 1. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S = \{e^{2x}, e^x, xe^x\}$   $\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{2x} & e^x & xe^x \\ 2e^{2x} & e^x & (x+1)e^x \\ 4e^{2x} & e^x & (x+2)e^x \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \underbrace{\int_{x_0}^x W^{-1}(t)f(t) dt}_{c'(t)}, \quad Y_s(x_0) = (0, 0, 0)^T. \quad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c} e^{2x} & e^x & xe^x & 0 \\ 2e^{2x} & e^x & (x+1)e^x & 0 \\ 4e^{2x} & e^x & (x+2)e^x & 2e^x \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} e^{2x} & e^x & xe^x & 0 \\ 0 & -e^x & (-x+1)e^x & 0 \\ 0 & -3e^x & (-3x+2)e^x & 2e^x \end{array} \right) \quad \boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} e^{2x} & e^x & xe^x & 0 \\ 0 & -e^x & (-x+1)e^x & 0 \\ 0 & 0 & -e^x & 2e^x \end{array} \right) \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} 2e^{-x} \\ 2x-2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3b) Integrieren:  $c_2(x) = \int_0^x c'_2(t) dt = \begin{pmatrix} -2e^{-x} + 2 \\ x^2 - 2x \\ -2x \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) &= [W(x)c(x)]_1 = ([e^{2x}, e^x, xe^x], [-2e^{-x} + 2, x^2 - 2x, -2x]) \\ &= -2e^x + 2e^{2x} + (x^2 - 2x)e^x - 2x^2e^x \\ &= -(x^2 + 2x + 2)e^x + 2e^{2x}. \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{9}$$

## Aufgabe 2 (Alternative)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 2. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S_1 = \{e^x, xe^x, e^{2x}\}$   $\boxed{1}$

2) Bestimmung einer speziellen Lösung durch den Ansatz

$$y_s(x) = cx^2e^x. \quad \boxed{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_s(x) &= cx^2e^x, \\ y'_s(x) &= c(x^2 + 2x)e^x, \\ y''_s(x) &= c(x^2 + 4x + 2)e^x, \\ y'''_s(x) &= c(x^2 + 6x + 6)e^x, \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

und

$$y'''_s - 4y''_s + 5y'_s - 2y_s = -2ce^x := 2e^x \Rightarrow c = -1. \quad \boxed{1}$$

3a) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{2x} - x^2e^x. \quad \boxed{1}$$

3b) Bestimmung der Konstanten entsprechend den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0,$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$$

4) Also ist

$$y(x) = -2e^x - 2xe^x + 2e^{2x} - x^2e^x$$

die Lösung des AWP's.

$$\Sigma = \boxed{9}$$

### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y'(x) = \frac{y^2}{2x^2} + \frac{y}{x} - \frac{1}{2}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

hat die Form  $y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow$  Substitution  $z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$  1

2) Die DGL mit getrennten Variablen:

$$z' = \frac{1}{x} \frac{z^2 - 1}{2} \quad z\left(\frac{1}{2}\right) = 3. \quad \text{1}$$

3) Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned} \int \frac{2}{z^2 - 1} dz &= \int \frac{2}{(z+1)(z-1)} dz = \int \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \int \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \ln \left| \frac{z-1}{z+1} \right| &= \ln |x| + \ln C \Rightarrow \frac{z-1}{z+1} = Cx. \end{aligned} \quad \text{1}$$

4) Bestimmung der Konstante:

$$z\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \Rightarrow \frac{3-1}{3+1} = C \frac{1}{2} \Rightarrow C = 1. \quad \text{1}$$

4) Lösung:

$$\frac{z-1}{z+1} = x \Rightarrow 1 - \frac{2}{z+1} = x \Rightarrow z = -1 + \frac{2}{1-x} = -\frac{x+1}{x-1}. \quad \text{1}$$

5) Resubstitution:

$$y = -x \frac{x+1}{x-1}. \quad \text{1}$$

6) Das maximale Existenzintervall (das  $x = \frac{1}{2}$  beinhaltet):

$$0 < x < 1. \quad \text{1}$$

$$\Sigma = \text{7}$$



## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:  $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$

$$z' := \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ x^2 z_3 - x z_2 + z_1 - 1 \end{pmatrix} =: f(x, z), \quad z(1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

2) Sei  $z(2) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$ . Die Trapezregel  $z(2) = z(1) + \frac{1}{2}[f(1, z(1)) + f(2, z(2))]$  liefert

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_2 \\ z_3 \\ 4z_3 - 2z_2 + z_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{1}$$

und das äquivalente Gleichungssystem ist

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Lösung des Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{8} \end{pmatrix} \left| \begin{array}{c} \frac{5}{2} \\ 1 \\ 0 \end{array} \right. \Rightarrow z = \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \\ y''(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

1) Gauß-Elimination:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & -11 & 2 \\ 4 & -11 & 26 - a^2 & -3 - 3b^2 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -\mathbf{2} & 1 & -3 & 0 \\ \mathbf{4} & -3 & 10 - a^2 & 1 - 3b^2 \end{array} \right) \quad [1]$$

$$\Rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & -1 \\ -\mathbf{2} & 1 & -3 & 0 \\ \mathbf{4} & -\mathbf{3} & 1 - a^2 & 1 - 3b^2 \end{array} \right) \quad [1]$$

**a)**  $a \neq \pm 1$  – genau eine Lösung für jedes  $b$  [1]  
(da die Determinante des äquivalenten Systems  $\neq 0$  ist).

**b)**  $a = \pm 1, b \neq \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  – keine Lösung [1]  
(da die Gleichung  $(1 - a^2)x_3 = 1 - 3b^2$  unlösbar ist)

**c)**  $a = \pm 1, b = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$  – unendlich viele Lösungen  $x$  (der Form  $x = (-1 + 2\gamma, 3\gamma, \gamma)^T$ ) [1]

2) Cholesky-Zerlegung von  $A$ :

$$A = LDL^T, \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, 1, 1 - a^2) \quad [1]$$

$A$  ist positiv definit  $\Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow 1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow |a| < 1$ . [1]

$\Sigma =$  [7]

## Aufgabe 6

1) Eine Lösung des Gleichungssystems ist ein Fixpunkt der Funktion  $F(x, y)$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y) \\ F_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \ln(1 + xy) \\ a \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2 y^2} \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Überprüfung der Voraussetzungen des Fixpunktsatzes:

1.1)  $D$  ist offensichtlich abgeschlossen. [1]

1.2)  $F$  ist selbstabbildend. Für  $0 \leq x, y \leq 1$  und  $0 < a < 1$  gilt

$$0 = a \ln 1 \leq \underbrace{a \ln(1 + xy)}_{F_1(x, y)} \leq a \ln(1 + 1) < a < 1, \quad [1]$$

$$0 \leq \underbrace{a \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + x^2 y^2}}_{F_2(x, y)} \leq a \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + 1} = a < 1 \quad [1]$$

d.h.  $F(D) \subset D$ .

1.3) Kontraktivität von  $F$ . Zu zeigen:

$$L := \sup_{(x, y) \in D} \|F'(x, y)\|_\infty < 1.$$

Jacobi-Matrix:

$$F'(x, y) = a \begin{pmatrix} \frac{y}{1+xy} & \frac{x}{1+xy} \\ \frac{xy^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2y^2}} & \frac{yx^2}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2y^2}} \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Die  $l_\infty$ -Norm:

$$\|F'(x, y)\|_\infty = a \max \left\{ \frac{x+y}{1+xy}, xy \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2y^2}} \right\}$$

Abschätzungen (nach dem Hinweis):

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1 \cdot (1+xy) - (x+y) \cdot y}{(1+xy)^2} = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x+y}{1+xy} \leq \frac{1+1}{1+1 \cdot 1} = 1. \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2y^2}} &= \frac{1 \cdot \sqrt{\phantom{x}} - (x+y) \cdot \frac{xy^2}{\sqrt{\phantom{x}}}}{1+x^2y^2} = \frac{(1+x^2y^2) - (x+y) \cdot xy^2}{(1+x^2y^2) \cdot \sqrt{\phantom{x}}} = \frac{1-xy^3}{(1+x^2y^2) \cdot \sqrt{\phantom{x}}} \geq 0 \\ &\Rightarrow xy \frac{x+y}{\sqrt{2}\sqrt{1+x^2y^2}} \leq 1 \cdot 1 \cdot \frac{1+1}{\sqrt{2}\sqrt{1+1 \cdot 1}} = 1. \end{aligned} \quad [1]$$

1.4) Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, daß  $F$  auf  $D$  genau einen Fixpunkt besitzt.

$$\Sigma = [7]$$

## Aufgabenblatt zur Vordiplomklausur, 31. März 2000

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Di, 04. April 2000, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Di, 04. April 2000, 10.00–11.00 Uhr, SFO1 (Karman Auditorium)
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten;
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen;
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- Keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten.

### Aufgabe 1.

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $(x^0, y^0) = (0, 1)$  aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ e^x + \ln y = 1 \end{cases}$$

zu approximieren. (Keine Reduktion auf den skalaren Fall.)

5

### Aufgabe 2.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = e^{2x}, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

8

### Aufgabe 3.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}xy^3, \quad y(1) = \sqrt{e}.$$

Geben Sie das maximale Existenzintervall an.

7

**Aufgabe 4.**

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' - xy' + y = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), & k_3 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_2), \\ k_2 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), & k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

und der Schrittweite  $h = 1$  eine Approximation von  $y(1), y'(1)$ .

6

**Aufgabe 5.**

Gegeben seien

$$A_a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4+a & 4a \\ a & 4a & a^2 + 4a - 1 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 2, 4)^T.$$

a.) Bestimmen Sie die  $LDL^T$ -Zerlegung der Matrix  $A_a$ .

3

b.) Für welche  $a$  ist  $A_a$  positiv definit?

1

c.) Lösen Sie das Gleichungssystem  $A_a x = b$  für  $a = 3$ .

3

**Aufgabe 6.**

Seien  $p \in P_2$  und  $q \in P_3$  diejenigen Polynome, die die Werte

$$\text{von } f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{auf } x_i \in \{2, 3, 4\} \quad \text{bzw. auf } x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

interpolieren.

a.) Zeigen Sie, ohne das Polynom  $p$  zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler in  $x = \frac{5}{2}$  gilt:

$$|f(\tfrac{5}{2}) - p(\tfrac{5}{2})| \leq \frac{1}{2^{16}}$$

2

b.) Geben Sie  $p$  und  $q$  in der Newton-Form an. (Weitere Vereinfachungen sind nicht nötig.)

5

$\Sigma =$  40

**Viel Erfolg!**

# Vordiplomklausur, 31. März 2000 (Musterlösung)

## Aufgabe 1.

1) Suche nach einer Nullstelle der Funktion  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - 2 \\ e^x + \ln y - 1 \end{pmatrix}$  □1

2) Jacobi Matrix:  $F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ e^x & 1/y \end{pmatrix}$  □1

3) Berechnen von  $F(z^0)$ ,  $F'(z^0)$

$$F(0, 1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F'(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{□1}$$

4) Lösung des Gleichungssystems  $F'(z^0) \delta z^0 = F(z^0)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta x^0 \\ \delta y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}. \quad \text{□1}$$

4) Die nächste Näherung  $z^1 = z^0 - \delta z^0$ :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \quad \text{□1}$$

$$\Sigma = \text{□5}$$

## Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S = \{e^x, e^{2x}\}$   $\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \underbrace{\int_{x_0}^x W^{-1}(t)f(t) dt}_{c'(t)}, \quad Y_s(x_0) = (0, 0, 0)^T. \quad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & e^{2x} \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} e^x & e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} & e^{2x} \end{array} \right) \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} -e^x \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:  $c(x) = \int_0^x c'(t) dt = \begin{pmatrix} -e^x + 1 \\ x \end{pmatrix}$   $\boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$y(x) = y_s(x) = [W(x)c(x)]_1 = ([e^x, e^{2x}], [-e^x + 1, x]) = -e^{2x} + e^x + xe^{2x}. \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{8}$$

## Aufgabe 2 (Alternative)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S = \{e^x, e^{2x}\}$   $\boxed{1}$

2) Bestimmung einer speziellen Lösung durch den Ansatz

$$y_s(x) = cxe^{2x}. \quad \boxed{1}$$

Es gilt

$$y_s(x) = cxe^{2x}, \quad y'_s(x) = c(2x + 1)e^{2x}, \quad y''_s(x) = c(4x + 4)e^{2x}, \quad \boxed{1}$$

und

$$y''_s - 3y'_s + 2y_s = ce^{2x} := e^{2x} \Rightarrow c = 1. \quad \boxed{1}$$

3a) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + xe^{2x}. \quad \boxed{1}$$

3b) Bestimmung der Konstanten entsprechend den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Also ist

$$y(x) = e^x - e^{2x} + xe^{2x} \quad \boxed{1}$$

die Lösung des AWP's.

$$\Sigma = \boxed{8}$$



### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}xy^3, \quad y(1) = \sqrt{e}$$

ist eine Bernoulli-DGL mit  $\alpha = 3$ .

2) Substitution  $z = y^{1-\alpha} = 1/y^2 \Rightarrow$  Die lineare DGL

$$z' = -z + x, \quad z(1) = 1/e. \quad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = -z \Rightarrow z = C e^{-x}. \quad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned} C'(x)e^{-x} &= x \Rightarrow C'(x) = x e^x \\ C(x) &= \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + c \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

3c) Allgemeine Lösung:  $z(x) = C(x)e^x = (x-1) + c e^{-x}. \quad \boxed{1}$

4) Bestimmung der Konstante

$$z(1) = c/e := 1/e \Rightarrow c = 1. \quad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1) + e^{-x}}}. \quad \boxed{1}$$

6) Für den Ausdruck  $z(x)$  unter der Wurzel gilt

$$z(0) = 0, \quad z(x) > 0, \quad x \neq 0 \quad (z'(x) = 1 - e^{-x})$$

Das maximale Existenzintervall (das  $x = 1$  beinhaltet)

$$0 < x < \infty \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$z'(x) := \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ x z_2(x) - z_1(x) + 1 \end{pmatrix} =: f(x, z). \quad \boxed{1}$$

2) Das Runge-Kutta-Verfahren mit der Schrittweite  $h = 1$ :

$$k_1 = f(0, z(0)) = f\left(0, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 - 1 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} k_2 &= f\left(\frac{1}{2}, z(0) + \frac{1}{2}k_1\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 - 3 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$k_3 = k_2 = k_1 \quad \boxed{1}$$

$$\begin{aligned} k_4 &= f(1, z(0) + k_3) = f\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - 5 + 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = k_1 \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$z(1) = z(0) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = z(0) + k_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

3) Also liefert das Runge-Kutta-Verfahren folgende Approximation

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

a.)  $LDL^T$ -Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 4+a & 4a \\ a & 4a & a^2+4a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ \mathbf{2} & a & 2a \\ \mathbf{a} & 2a & 4a-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ \mathbf{2} & a & 2a \\ \mathbf{a} & \mathbf{2} & -1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

d.h.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \mathbf{2} & 1 & \\ \mathbf{a} & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(1, a, -1), \quad L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

b.)  $A > 0 \Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow d_{ii} > 0$ .

Da  $d_{33} = -1$  ist, gibt es kein  $a$ , für welches  $A_a$  positiv definit ist.

$\boxed{1}$

c.)  $a = 3$ .

$$L \underbrace{D L^T x}_{\tilde{y}} = b = (1, 2, 4)^T.$$

$$Ly = b \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$D\tilde{y} = y \Rightarrow \text{diag}(1, 3, -1)\tilde{y} = (1, 0, 1)^T \Rightarrow \tilde{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$L^T x = \tilde{y} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 2 \\ & & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$\Sigma = \boxed{7}$

## Aufgabe 6

a<sub>1</sub>) Abschätzung für die 3-te Ableitung:

$$f'''(x) = -\frac{3!}{(x+1)^4} \Rightarrow \max_{\xi \in [2,4]} \frac{|f'''(\xi)|}{3!} = \max_{\xi \in [2,4]} \frac{1}{(\xi+1)^4} = \frac{1}{(2+1)^4} = \frac{1}{81} \quad \boxed{1}$$

a<sub>2</sub>) Interpolationsfehler:

$$|p(\frac{5}{2}) - f(\frac{5}{2})| \leq \max_{\xi \in [1,3]} \frac{|f'''(\xi)|}{3!} |(\frac{5}{2}-2)(\frac{5}{2}-3)(\frac{5}{2}-4)| = \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{27 \cdot 8} = \frac{1}{216} \quad \boxed{1}$$

bc<sub>1</sub>) Dividierte Differenzen mit der zusätzlichen Stützstelle 1:

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & \frac{1}{3} & & & \\ & & -\frac{1}{12} & & \\ 3 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{60} & \\ & & -\frac{1}{20} & \dots \vdots & -\frac{1}{120} \\ & & & \frac{1}{40} & \\ 4 & \frac{1}{5} & \dots \vdots & & \\ \dots & \dots \vdots & -\frac{1}{10} & & \\ 1 & \frac{1}{2} & & & \end{array} \quad \boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$$

bc<sub>2</sub>) Newton Darstellung

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(x-2) + \frac{1}{60}(x-2)(x-3) \\ q(x) &= p(x) - \frac{1}{120}(x-2)(x-3)(x-4) \end{aligned} \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabenblatt zur Scheinklausur, 18. Juli 2000

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Do, 20. Juli 2000, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Do, 20. Juli 2000, 10.00–11.00 Uhr, R. 149
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten;
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen;
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- Keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten.

### Aufgabe 1.

Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $(x^0, y^0) = (e, e)$  aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x + y \ln x &= \frac{3}{2}e \\ y + x \ln y &= \frac{5}{2}e \end{cases}$$

zu approximieren.

5

### Aufgabe 2.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

8

### Aufgabe 3

Lösen Sie

$$y'(x) = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}, \quad \text{für } y, x > 0 \text{ und } y(1) = 1.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

7

**Aufgabe 4.**

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' + y = x^2, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 0.$$

Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), & k_3 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_2), \\ k_2 &= f(t_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1), & k_4 &= f(t_k + h, y_k + hk_3), \\ y_{k+1} &= y_k + \tfrac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned}$$

und der Schrittweite  $h = 2$  eine Approximation von  $y(2), y'(2)$ .

**6**

**Aufgabe 5.**

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = (1, 1, 1, 1)^T.$$

a.) Bestimmen Sie die  $LDL^T$ -Zerlegung der Matrix  $A$ .

**3**

b.) Stellen Sie fest, ob  $A$  positiv definit oder negativ definit oder indefinit ist. (Begründung dazu)

**1**

c.) Lösen Sie das Gleichungssystem  $Ax = b$ .

**3**

**Aufgabe 6.**

Seien  $p \in P_2$  und  $q \in P_3$  diejenigen Polynome, die die Werte

$$\text{von } f(x) = \sqrt{x} \quad \text{auf } x_i \in \{1, 4, 9\} \quad \text{bzw. auf } x_i \in \{0, 1, 4, 9\}$$

interpolieren.

a.) Zeigen Sie, ohne das Polynom  $p$  zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler in  $x = 5$  gilt:

$$|f(5) - p(5)| \leq 1.$$

**2**

b.) Geben Sie  $p$  und  $q$  in der Newton-Form an. (Weitere Vereinfachungen sind nicht nötig.)

**5**

$\Sigma =$  **40**

**Viel Erfolg!**

# Scheinklausur, 18. Juli 2000 (Musterlösung)

## Aufgabe 1.

1) Suche nach einer Nullstelle der Funktion  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x + y \ln x - \frac{3}{2}e \\ y + x \ln y - \frac{5}{2}e \end{pmatrix}$  1

2) Jacobi Matrix:  $F'(x, y) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{y}{x} & \ln x \\ \ln y & 1 + \frac{x}{y} \end{pmatrix}$  1

3) Berechnen von  $F(z^0)$ ,  $F'(z^0)$

$$F(e, e) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}e \end{pmatrix}, \quad F'(e, e) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad \text{1}$$

4) Lösung des Gleichungssystems  $F'(z^0)\delta z^0 = F(z^0)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 1 & \frac{1}{2}e \\ 1 & 2 & -\frac{1}{2}e \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta x^0 \\ \delta y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}e \end{pmatrix}. \quad \text{1}$$

4) Die nächste Näherung  $z^1 = z^0 - \delta z^0$ :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e \\ -\frac{1}{2}e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e \\ \frac{3}{2}e \end{pmatrix} \quad \text{1}$$

$$\Sigma = \text{5}$$

## Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2, \quad \lambda_{12} = 1. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S = \{e^x, xe^x\}$

$\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \cos x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \int_{x_0}^x \underbrace{W^{-1}(t)f(t)}_{c'(t)} dt, \quad Y_s(x_0) = (0, 0)^T. \quad \boxed{1}$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ e^x \cos x \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ e^x \cos x \end{vmatrix} \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} -x \cos x \\ \cos x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:  $c(x) = \int_0^x c'(t) dt = \begin{pmatrix} -x \sin x - \cos x + 1 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) = [W(x)c(x)]_1 &= (e^x, xe^x) \begin{pmatrix} -x \sin x - \cos x + 1 \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \boxed{1} \\ &= e^x(-x \sin x - \cos x + 1 + x \sin x) = e^x - e^x \cos x \end{aligned}$$

$$\Sigma = \boxed{8}$$



## Aufgabe 2 (Alternative)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2, \quad \lambda_{12} = 1. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein Fundamentalsystem:  $S = \{e^x, xe^x\}$   $\boxed{1}$

2) Bestimmung einer speziellen Lösung durch den Ansatz

$$y_s(x) = ae^x \cos x + be^x \sin x. \quad \boxed{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_s(x) &= ae^x \cos x && + be^x \sin x, \\ y'_s(x) &= ae^x(\cos x - \sin x) && + be^x(\sin x + \cos x), \\ y''_s(x) &= ae^x(-2 \sin x) && + be^x(2 \cos x), \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

und

$$y''_s - 2y'_s + y_s = ae^x(-\cos x) + be^x(-\sin x) := e^x \cos x \Rightarrow a = -1, \quad b = 0. \quad \boxed{1}$$

3a) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x - e^x \cos x. \quad \boxed{1}$$

3b) Bestimmung der Konstanten entsprechend den Anfangsbedingungen

$$y(0) = y'(0) = 0,$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Also ist

$$y(x) = e^x - e^x \cos x \quad \boxed{1}$$

die Lösung des AWP's.

$$\Sigma = \boxed{8}$$

### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y'(x) = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1$$

hat die Form  $y' = f(\frac{y}{x}) \Rightarrow$  Substitution  $z = \frac{y}{x} \Rightarrow z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$  1

2) Die DGL mit getrennten Variablen:

$$z' = \frac{1}{x}(z + 1/z) \quad z(1) = 1. \quad \text{1}$$

3) Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\int \frac{z}{z^2 + 1} dz = \int \frac{dx}{x} \quad \text{1}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2} \ln |z^2 + 1| = \ln |x| + \ln |C| \Rightarrow z^2 + 1 = Cx^2.$$

4) Bestimmung der Konstante:

$$z(1) = 1 \Rightarrow C = 2. \quad \text{1}$$

4) Lösung:

$$z = \sqrt{2x^2 - 1} \quad \text{1}$$

5) Resubstitution:

$$y = x\sqrt{2x^2 - 1}. \quad \text{1}$$

6) Das maximale Existenzintervall (das  $x = 1$  beinhaltet):

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty. \quad \text{1}$$

$$\Sigma = \text{7}$$

### Aufgabe 3 (Alternative)

1) Die DGL

$$y' = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}, \quad y(1) = 1$$

ist eine Bernoulli-DGL mit  $\alpha = -1$ .

2) Substitution  $z = y^{1-\alpha} = y^2 \Rightarrow$  Die lineare DGL

$$z' = \frac{4}{x}z + 2x, \quad z(1) = 1. \quad \boxed{1}$$

3a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{4}{x}z \Rightarrow z = Cx^4. \quad \boxed{1}$$

3b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x^4 = 2x \Rightarrow C'(x) = 2/x^3 \Rightarrow C(x) = -1/x^2 + c \quad \boxed{1}$$

$$3c) \text{ Allgemeine Lösung: } z(x) = C(x)x^4 = -x^2 + cx^4. \quad \boxed{1}$$

4) Bestimmung der Konstante

$$z(1) = 1 \Rightarrow c = 2. \quad \boxed{1}$$

5) Resubstitution:

$$y(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{2x^4 - x^2} = x\sqrt{2x^2 - 1}. \quad \boxed{1}$$

6) Das maximale Existenzintervall (das  $x = 1$  beinhaltet)

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ x^2 - z_1(x) \end{pmatrix} =: f(x, z). \quad \boxed{1}$$

2) Das Runge-Kutta-Verfahren mit der Schrittweite  $h = 2$ :

$$k_1 = f(0, z(0)) = f\left(0, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$k_2 = f\left(1, z(0) + k_1\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$k_3 = f\left(1, z(0) + k_2\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = f\left(1, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$k_4 = f\left(2, z(0) + 2k_3\right) = f\left(2, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(2, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$z(3) = z(0) + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

3) Also liefert das Runge-Kutta-Verfahren folgende Approximation

$$\begin{pmatrix} y(1) \\ y'(1) \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

a.)  $LDL^T$ -Zerlegung:

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{1} \\
 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} &\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \quad \boxed{1} + \boxed{1}
 \end{aligned}$$

d.h.

$$A = LDL^T, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & & \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 & \\ 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag} \left( 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \right).$$

b.) Da  $D > 0$  ist, ist auch  $A > 0$  (wegen  $A > 0 \Leftrightarrow D > 0$ ).  $\boxed{1}$

c.)  $L \underbrace{D \overbrace{L^T}^y}_z x = b = (1, 1, 1, 1)^T.$

$$Lz = b \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & & & 1 \\ & -\frac{2}{3} & 1 & & 1 \\ & & -\frac{3}{4} & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 2 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}; \quad \boxed{1}$$

$$Dy = z \Rightarrow \text{diag} \left( 2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4} \right) \Rightarrow y = \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2 \right)^T; \quad \boxed{1}$$

$$L^T x = y \Rightarrow \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ & 1 & -\frac{2}{3} & & 1 \\ & & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ & & & 1 & 2 \end{array} \right) \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabe 6

a<sub>1</sub>) Abschätzung für die 3-te Ableitung:

$$f(x) = x^{1/2}, \quad f'''(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} x^{-5/2} = \frac{3}{8} x^{-5/2} \Rightarrow \max_{\xi \in [1,9]} |f'''(\xi)| = \frac{3}{8}. \quad \boxed{1}$$

a<sub>2</sub>) Interpolationsfehler:

$$|p(5) - f(5)| \leq \frac{1}{3!} \max_{\xi \in [1,9]} |f'''(\xi)| \cdot |(5-1)(5-4)(5-9)| = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot 16 = 1. \quad \boxed{1}$$

b<sub>1</sub>) Dividierte Differenzen mit der zusätzlichen Stützstelle 1:

|         |          |               |                                                         |                |  |  |
|---------|----------|---------------|---------------------------------------------------------|----------------|--|--|
| 1       | 1        |               |                                                         |                |  |  |
|         |          | $\frac{1}{3}$ |                                                         |                |  |  |
| 4       | 2        |               | $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{9-1} = -\frac{1}{60}$ |                |  |  |
|         |          | $\frac{1}{5}$ | $\vdots$                                                | $\frac{1}{60}$ |  |  |
| 9       | 3        | $\vdots$      | $\frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{9}}{9-4} = -\frac{1}{30}$ |                |  |  |
| $\dots$ | $\vdots$ | $\frac{1}{3}$ |                                                         |                |  |  |
| 0       | 0        |               |                                                         |                |  |  |

$\boxed{1} + \boxed{1} + \boxed{1}$

b<sub>2</sub>) Newton Darstellung

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{60}(x-1)(x-4) \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$q(x) = p(x) + \frac{1}{60}(x-1)(x-4)(x-9)$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

## Aufgabenblatt zur Vordiplomklausur, 1. August 2000

- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.
- Außer Papier und dokumentenechtem Schreibgerät sind keine Hilfsmittel erlaubt.
- Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich.
- Klausurergebnisse: Fr, 04. August 2000, Schaukasten von Prof. Esser
- Klausureinsicht: Fr, 04. August 2000, R. 149,
 

|                     |                   |
|---------------------|-------------------|
| $10^{00} - 10^{30}$ | 150 000 – 217 000 |
| $10^{30} - 11^{00}$ | 217 000 – 222 500 |
| $11^{00} - 11^{30}$ | 222 500 – 224 000 |
| $11^{30} - 12^{00}$ | 224 000 – 227 000 |
- Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblatt kontrollieren: Sechs Aufgaben auf zwei Seiten;
- Für jede neue Aufgabe eine neue Seite anfangen;
- Jedes Blatt mit dem Namen und der Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- Keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten.

### Aufgabe 1.

Führen Sie einen Schritt des gedämpften Newton-Verfahrens mit dem Startwert  $(x^0, y^0) = (0, \frac{1}{2})$  durch, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems

$$\begin{cases} x(2y+1)+2 &= 0 \\ x^2+y^2-\frac{5}{4} &= 0 \end{cases}$$

zu approximieren. Für den Abbruchtest  $\|F(x^1, y^1)\| < \|F(x^0, y^0)\|$  benutzen Sie die Euklidische Norm.

7

### Aufgabe 2.

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x, \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

7

### Aufgabe 3

Lösen Sie

$$y' = \frac{4}{x}y + 4x^3\sqrt{y}, \quad x > 0, \quad y \geq 0, \quad y(1) = \frac{9}{16}$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

8

#### Aufgabe 4

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' = xy' - y - 1, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2.$$

Berechnen Sie

a.) mit der Trapezregel:  $y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} [f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})]$

b.) mit dem verbesserten Euler-Cauchy-Verfahren:  $k_1 = f(x_k, y_k)$

$$k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + hk_2.$$

und der Schrittweite  $h = 1$  jeweils eine Approximation von  $y(2), y'(2)$ .

3 + 3

#### Aufgabe 5

Gegeben sei

$$A_a = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & a+8 & a^2+4 & a+12 \\ 2 & a^2+4 & a^3+a+2 & a^2+2a+6 \\ 6 & a+12 & a^2+2a+6 & 5a+19 \end{pmatrix}$$

a.) Führen Sie die  $LDL^T$ -Zerlegung der Matrix  $A_a$  durch.

b.) Finden Sie den Wert der Determinante von  $A_a$ .

c.) Für welche  $a$  ist die Matrix  $A_a$  positiv definit?

3  
1  
1

#### Aufgabe 6.

Seien  $p \in P_2$  und  $q \in P_3$  diejenigen Polynome, die die Funktion

$$f(x) = x^3 \quad \text{in } x_i \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, +\frac{\sqrt{3}}{2}\} \quad \text{bzw. in } x_i \in \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, +\frac{\sqrt{3}}{2}, a\}$$

interpolieren, wobei  $a$  verschieden von  $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$  und 0 ist.

a.) Zeigen Sie, ohne das Polynom  $p$  zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler auf  $[-1, 1]$  gilt:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{4}$$

3

b.) Geben Sie  $p$  in der Newton-Form an und vereinfachen Sie diese Darstellung.

2

c.) Finden Sie (wie Sie wollen) die explizite Form des Interpolationspolynoms  $q$ .

2

$\Sigma =$  40

**Viel Erfolg!**



# Vordiplomklausur, 1. August 2000 (Musterlösung)

## Aufgabe 1.

1) Suche nach einer Nullstelle der Funktion  $F(x, y) = \begin{pmatrix} x(2y+1) + 2 \\ x^2 + y^2 - \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ .

2) Jacobi Matrix:  $F'(x, y) = \begin{pmatrix} 2y+1 & 2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$  1

3) Berechnen von  $F(z^0)$ ,  $F'(z^0)$  für  $z^0 = (0, \frac{1}{2})^T$ :

$$F(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F'(0, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 1$$

4) Lösung des Gleichungssystems  $F'(z^0)\delta z^0 = F(z^0)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{pmatrix} \delta x^0 \\ \delta y^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad 1$$

4a) Die nächste Näherung ohne Dämpfung  $z^1 = z^0 - \delta z^0$ :

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 1$$

4b) Test:  $F(x^1, y^1) = (-2, 2)^T$ ,

$$\|F(x^1, y^1)\|_2 < \|F(x^0, y^0)\|_2 ? \quad \text{nicht erfüllt.}$$

1

5a) Die nächste Näherung mit dem Dämpfungsparameter  $\frac{1}{2}$ :  $z^1 = z^0 - \frac{1}{2}\delta z^0$

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ y^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad 1$$

5b) Test:  $F(x^1, y^1) = (\frac{1}{2}, 0)^T$ ,

$$\|F(x^1, y^1)\|_2 < \|F(x^0, y^0)\|_2 ? \quad \text{in Ordnung.}$$

1

$\Sigma = 7$

## Aufgabe 2

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein reelles Fundamentalsystem:  $S = \{e^x \cos x, e^x \sin x\}$

$\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \int_{x_0}^x \underbrace{W^{-1}(t)f(t)}_{c'(t)} dt, \quad Y_s(x_0) = (0, 0)^T.$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ e^x(\cos x - \sin x) & e^x(\sin x + \cos x) \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ xe^x \end{vmatrix} \\ \xrightarrow{(2) \cdot \cos x - (1) \cdot (\cos x - \sin x)} \begin{pmatrix} e^x \cos x & e^x \sin x \\ 0 & e^x \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ xe^x \cos x \end{vmatrix} \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} -x \sin x \\ x \cos x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:  $c(x) = \int_0^x c'(t) dt = \begin{pmatrix} x \cos x - \sin x \\ x \sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) = [W(x)c(x)]_1 &= (e^x \cos x, e^x \sin x) \begin{pmatrix} x \cos x - \sin x \\ x \sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix} \\ &= e^x(x \cos^2 x - \cos x \sin x + x \sin^2 x + \sin x \cos x - \sin x) \\ &= e^x(x - \sin x). \end{aligned}$$

$\boxed{1}$

$\Sigma = \boxed{7}$

## Aufgabe 2 (Alternative)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1, \quad \lambda_{12} = 1 \pm i. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein reelles Fundamentalsystem:  $S = \{e^x \cos x, e^x \sin x\}$

$\boxed{1}$

2) Bestimmung einer speziellen Lösung durch den Ansatz

$$y_s(x) = e^x(ax + b) \quad \boxed{1}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} y_s(x) &= e^x(ax + b), \\ y'_s(x) &= e^x(ax + b + a), \\ y''_s(x) &= e^x(ax + b + 2a), \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

und

$$y''_s - 2y'_s + 2y_s = e^x(ax + b) := xe^x \Rightarrow a = 1, \quad b = 0. \quad \boxed{1}$$

3a) Allgemeine Lösung:

$$y(x) = c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + x e^x. \quad \boxed{1}$$

3b) Bestimmung der Konstanten entsprechend den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 e^x \cos x + c_2 e^x \sin x + x e^x, & y(0) &= 0; \\ y'(x) &= c_1 e^x (\cos x - \sin x) + c_2 e^x (\sin x + \cos x) + (x + 1)e^x, & y'(0) &= 0; \end{aligned}$$

d.h. Lösung des Gleichungssystems:

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{array} \right) \Rightarrow c = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

4) Also ist

$$y(x) = -e^x \sin x + x e^x.$$

die Lösung des AWP's.

$\Sigma = \boxed{7}$

## Aufgabe 2 (Alternative)

1a) Charakteristisches Polynom und seine Nullstellen:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1, \quad \lambda_{1,2} = 1 \pm i. \quad \boxed{1}$$

1b) Ein komplexes Fundamentalsystem:  $S = \{e^{(1+i)x}, e^{(1-i)x}\}$   $\boxed{1}$

2) Wronski-Matrix  $W$  und die rechte Seite  $f$  des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \\ (1+i)e^{(1+i)x} & (1-i)e^{(1-i)x} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Eine spezielle Lösung des äquivalenten Systems:

$$Y_s(x) = W(x)c(x) = W(x) \int_{x_0}^x \underbrace{W^{-1}(t)f(t)}_{c'(t)} dt, \quad Y_s(x_0) = (0, 0)^T.$$

3a) Berechnen von  $c'(x) = W^{-1}(x)f(x)$  als Lösung des Systems  $W(x)c'(x) = f(x)$ :

$$\begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \\ (1+i)e^{(1+i)x} & (1-i)e^{(1-i)x} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ xe^x \end{vmatrix} \xrightarrow{(1)-(2) \cdot (1+i)} \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & e^{(1-i)x} \\ 0 & -2ie^{(1-i)x} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ xe^x \end{vmatrix} \Rightarrow c'(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}xe^{-ix} \\ -\frac{1}{2i}xe^{ix} \end{pmatrix}. \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

3b) Integrieren:  $c(x) = \int_0^x c'(t) dt = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}(ix+1)e^{-ix} - \frac{1}{2i} \\ -\frac{1}{2i}(-ix+1)e^{ix} + \frac{1}{2i} \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$

4) Berechnen der Lösung des AWP's:

$$\begin{aligned} y(x) = y_s(x) = [W(x)c(x)]_1 &= (e^{(1+i)x}, e^{(1-i)x}) \begin{pmatrix} \frac{1}{2i}(ix+1)e^{-ix} - \frac{1}{2i} \\ -\frac{1}{2i}(-ix+1)e^{ix} + \frac{1}{2i} \end{pmatrix} \\ &= e^x \left[ \frac{1}{2i}(ix+1) - \frac{1}{2i}e^{ix} - \frac{1}{2i}(-ix+1) + \frac{1}{2i}e^{-ix} \right] \\ &= e^x \left[ x - \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \right] = e^x(x - \sin x). \end{aligned} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$

### Aufgabe 3

1) Die DGL

$$y' = \frac{4}{x}y + 4x^3\sqrt{y}, \quad x > 0, \quad y \geq 0, \quad y(1) = \frac{9}{16}$$

ist eine Bernoulli-DGL mit  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

2) Da für  $y = 0$  die rechte Seite  $= 0$  ist, ist  $y \equiv 0$  eine Lösung (s.u. 7b).

3) Für  $y > 0 \Rightarrow$  Substitution  $z = y^{1-\alpha} = y^{1/2} \Rightarrow$  Die lineare DGL

$$z' = \frac{2}{x}z + 2x^3, \quad z(1) = \frac{3}{4}, \quad z(x) > 0. \quad \boxed{1}$$

4a) Lösung der homogenen Gleichung:

$$z' = \frac{2}{x}z \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| + \ln|C| \Rightarrow z = Cx^2. \quad \boxed{1}$$

4b) Variation der Konstanten:

$$C'(x)x^2 = 2x^3 \Rightarrow C(x) = x^2 + c, \quad \boxed{1}$$

4c) Allgemeine Lösung:

$$z(x) = C(x)x^2 = x^2(x^2 + c), \quad \text{wenn } z > 0. \quad \boxed{1}$$

5) Bestimmung der Konstante

$$z(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow c = -\frac{1}{4}. \quad \boxed{1}$$

6) Positivität (Existenzintervall für  $z > 0$ ):

$$z(x) > 0 \Leftrightarrow x^2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right) > 0, \quad x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}. \quad \boxed{1}$$

7a) Resubstitution (für  $y > 0$ ):

$$y(x) = z^2 = x^4\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)^2, \quad x > \frac{1}{2}. \quad \boxed{1}$$

7b) Nullteil der Lösung

$$y(x) \equiv 0, \quad x \in (0, \frac{1}{2}]. \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{8}$$

## Aufgabe 4

1) Reduktion auf ein System 1-ter Ordnung:  $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ .

$$z' := \begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2 \\ xz_2 - z_1 - 1 \end{pmatrix} =: f(x, z), \quad z(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

2) Sei  $z(2) = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ . Die Trapezregel  $z(2) = z(1) + \frac{1}{2}[f(1, z(1)) + f(2, z(2))]$  liefert

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_2 \\ 2z_2 - z_1 - 1 \end{pmatrix}, \quad \boxed{1}$$

und die Lösung des äquivalenten Gleichungssystems ist

$$\left( \begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \end{array} \right) \Rightarrow z = \begin{pmatrix} y(2) \\ y'(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

3) Das verbesserte Euler-Cauchy-Verfahren liefert

$$k_1 = f(1, z(1)) = f\left(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$k_2 = f\left(1 + \frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\frac{3}{2}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 - 2 - 1 = 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$z(2) = z(1) + k_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\Sigma = \boxed{6}$$

## Aufgabe 5

1)  $LDL^T$ -Zerlegung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & a+8 & a^2+4 & a+12 \\ 2 & a^2+4 & a^3+a+2 & a^2+2a+6 \\ 6 & a+12 & a^2+2a+6 & 5a+19 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{1} & a^2 & a^3+a & a^2+2a \\ \mathbf{3} & a & a^2+2a & 5a+1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & a & 2a \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & 2a & 4a+1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ \mathbf{2} & a & a^2 & a \\ \mathbf{1} & \mathbf{a} & a & 2a \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1} + \boxed{1}$$

$$A = LDL^T, \quad \text{mit} \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \text{diag}(2, a, a, 1)$$

1)  $\det A = \det D = 2a^2$   $\boxed{1}$

2)  $A > 0 \Leftrightarrow D > 0 \Leftrightarrow d_{ii} > 0 \Leftrightarrow a > 0$   $\boxed{1}$

$\Sigma = \boxed{5}$

## Aufgabe 6

a) Interpolationsfehler:

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!} \omega(x) \max_{\xi \in [-1,1]} |f'''(\xi)|.$$

a<sub>1</sub>) Bestimmung des Maximums von

$$\omega(x) = (x + \frac{\sqrt{3}}{2})x(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = x^3 - \frac{3}{4}x.$$

Wir haben

$$\omega'(x) = 3x^2 - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_{12} = \pm \frac{1}{2},$$

und

$$\omega(\pm \frac{1}{2}) = \mp \frac{1}{4}, \quad \omega(\pm 1) = \pm \frac{1}{4}. \quad \boxed{1}$$

Also gilt auf  $[-1, 1]$

$$|\omega(x)| \leq \max(|\omega(\pm \frac{1}{2})|, |\omega(\pm 1)|) = \frac{1}{4}. \quad \boxed{1}$$

a<sub>2</sub>) Da  $f'''(x) = 6$  ist, gilt die Abschätzung

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{1}{3!} \omega(x) \max_{\xi \in [-1,1]} |f'''(\xi)| \leq \frac{1}{4} \quad \boxed{1}$$

b<sub>1</sub>) Dividierte Differenzen (mit der zusätzlichen Stützstelle  $a$ ):

$$\begin{array}{c|cccc} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{8} & & & \\ & & \frac{3}{4} & & \\ 0 & 0 & & 0 & \\ & & \frac{3}{4} & \dots\dots\dots & 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{8} & \dots\dots\dots & a + \frac{\sqrt{3}}{2} & \\ \dots & \dots\dots\dots & a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{3}{4} & & \\ a & a^3 & & & \end{array} \quad \boxed{1} : \boxed{1}$$

b<sub>2</sub>) Newton Darstellung von  $p$ :  $p(x) = -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4}(x + \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4}x. \quad \boxed{1}$

c) Explizite Form von  $q$  mittels Newton Darstellung:

$$q(x) = p(x) + (x + \frac{\sqrt{3}}{2})x(x - \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4}x + x(x^2 - \frac{3}{4}) = x^3. \quad \boxed{1}$$

### Alternative

c) Explizite Form von  $q$ . Da  $f(x) = x^3$  ein Polynom vom Grad 3 ist und  $q$  ist das Interpolationspolynom zu  $f$  auch vom Grad 3, gilt

$$q(x) \equiv f(x) = x^3. \quad \boxed{2}$$

$$\Sigma = \boxed{7}$$



## Scheinklausur Differentialgleichungen und Numerik, SS 01 (Physiker/innen)

- Hilfsmittel: keine (außer dokumentenechtes Schreibgerät);
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift schreiben;
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten;
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben;
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten;

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden ab Fr., 27. Juli 2001, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Fr., 27. Juli im Raum 149, Hauptgebäude erste Etage, von 10:00 bis 12:00 Uhr statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

### Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\Sigma$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
|     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1:**

Ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich auf der  $x$ -Achse mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 > 0$  bewegt, wird durch Reibung abgebremst. Gegeben ist das Reibungsgesetz

$$K(v) = -\gamma \sqrt{v}, \quad \gamma > 0.$$

- a) Wie ist der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$ ?
- b) Wann und nach welcher Strecke kommt das Teilchen zum Stillstand?
- c) Berechnen Sie die totale, durch Reibung verlorgene Energie  $W$ .

Hinweis: Es gilt

$$W = - \int_0^\infty K(v(t)) v(t) dt.$$

(3+3+2 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(7 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' + y \sin x = \sin x, \quad y(0) = \pi.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' - xy' + y = 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Berechnen Sie

a) mit dem impliziten Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

b) mit dem verbesserten Euler-Verfahren

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + \tfrac{1}{2}h, y_k + \tfrac{1}{2}hk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{aligned}$$

und der Schrittweite  $h = 1$  jeweils eine Approximation von  $y(1)$ ,  $y'(1)$ .

(4+3 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  *ohne* Pivotisierung.
- b) Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .
- c) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $Ax = c$ .

(2+1+4 Punkte)

**Aufgabe 6:**

Zeigen Sie: Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\cos x + 2y &= 6x, \\ xy^2 + \sin y &= 8y,\end{aligned}$$

besitzt auf  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  genau eine Lösung.

(5 Punkte)









*Musterlösung*

**Scheinklausur Differentialgleichungen und Numerik, SS 01  
(Physiker/innen)**

- Hilfsmittel: keine (außer dokumentenechtes Schreibgerät);
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift schreiben;
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten;
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben;
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten;

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden ab Fr., 27. Juli 2001, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Fr., 27. Juli im Raum 149, Hauptgebäude erste Etage, von 10:00 bis 12:00 Uhr statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\Sigma$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
|     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1:**

Ein Teilchen der Masse  $m$ , das sich auf der  $x$ -Achse mit einer Anfangsgeschwindigkeit  $v_0 > 0$  bewegt, wird durch Reibung abgebremst. Gegeben ist das Reibungsgesetz

$$K(v) = -\gamma \sqrt{v}, \quad \gamma > 0.$$

- Wie ist der zeitliche Verlauf der Geschwindigkeit  $v(t)$ ?
- Wann und nach welcher Strecke kommt das Teilchen zum Stillstand?
- Berechnen Sie die totale, durch Reibung verlorgene Energie  $W$ .

Hinweis: Es gilt

$$W = - \int_0^\infty K(v(t)) v(t) dt.$$

(3+3+2 Punkte)

a) Newton:  $m \dot{v} = K(v)$ , daraus folgt HWP

$$m \dot{v} = -\gamma \sqrt{v(t)}$$

$$\Leftrightarrow \dot{v} = -\frac{\gamma}{m} \sqrt{v(t)}, \quad v(0) = v_0, \quad t \geq 0$$

[1]

(unter der Annahme, daß die Abbremsung zum Zeitpunkt  $t_0 = 0$  beginnt)

Dies ist eine DGL mit getrennten Veränderlichen. Setze

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto -\frac{\gamma}{m}$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto v^{-1/2}$$

Dann sind  $f, g$  stetig,  $g(v) \neq 0 \quad \forall v > 0$ . Setze

$$F(t) := \int_0^t f(\sigma) d\sigma = -\frac{\gamma}{m} \int_0^t d\sigma = -\frac{\gamma}{m} t$$

[1]

$$G(v) := \int_{v_0}^v (u)^{-1/2} du = \int_{v_0}^v g(u) du = 2\sqrt{v} - 2\sqrt{v_0}$$

Dann ist das AWP auf einem Intervall  $I$  eindeutig lösbar, und die Lösung ist gegeben durch  $v: I \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  
 $v(t) = G^{-1} \circ \vec{f}(t)$ .

[Nebenrechnung: (bestimme  $G^{-1}$ )

$$y = 2x - c, \quad c = 2\sqrt{v_0}$$

$$x = 2y - c$$

$$\Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}(x+c)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}(x+c)^2 \quad ]$$

Also ist  $G^{-1}(s) = \frac{1}{4}(s + 2\sqrt{v_0})^2$  und damit

$$v(t) = \frac{1}{4} \left( 2\sqrt{v_0} - \frac{\gamma^e}{2m} t \right)^2 = \left( \sqrt{v_0} - \frac{\gamma^e}{2m} t \right)^2, \quad t \geq 0 \quad [1]$$

$$b) \quad 0 = v(t)$$

$$= \left( \sqrt{v_0} - \frac{\gamma^e}{2m} t \right)^2$$

$$\Rightarrow 0 = \sqrt{v_0} - \frac{\gamma^e}{2m} t$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{2m}{\gamma^e} \sqrt{v_0}$$

Zum Zeitpunkt  $\bar{t} = \frac{2m}{\gamma^e} \sqrt{v_0}$  kommt das Teilchen zur Ruhe. [1]

Berechnung der Strecke (beachte:  $v = \dot{x}$ ):

$$\dot{x}(t) = \left( \sqrt{v_0} - \frac{\gamma^e}{2m} t \right)^2, \quad x(0) = 0, \quad 0 \leq t \leq \bar{t} \quad [1]$$

Dies ist ein AWP, welches elementar gelöst werden kann.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t \left( \sqrt{v_0} - \frac{g^e}{2m} \tau \right)^2 d\tau \\
 &= \int_0^t \left( \frac{g^{e2}}{4m^2} \tau^2 - \frac{g^e}{m} \sqrt{v_0} \tau + v_0 \right) d\tau \\
 &= \left[ \frac{g^{e2}}{12m^2} \tau^3 - \frac{g^e}{2m} \sqrt{v_0} \tau^2 + v_0 \tau \right]_0^t \\
 \Rightarrow x(\bar{t}) &= \frac{g^{e2}}{12m^2} \bar{t}^3 - \frac{g^e}{2m} \sqrt{v_0} \bar{t}^2 + v_0 \bar{t} \\
 &= \left( \frac{2}{3} - 2 + 2 \right) \frac{m}{g^e} v_0^{3/2} \\
 &= \frac{2}{3} \frac{m}{g^e} v_0^{3/2}
 \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned}
 c) \quad W &= - \int_0^{\infty} K(v(t)) \cdot v(t) dt \\
 &= g^e \int_0^{\bar{t}} (v(t))^{3/2} dt \\
 &= g^e \int_0^{\bar{t}} \left( \sqrt{v_0} - \frac{g^e}{2m} t \right)^3 dt \\
 &= g^e \left[ - \frac{2m}{g^e} \left( \sqrt{v_0} - \frac{g^e}{2m} t \right)^4 \right]_0^{\bar{t}} \\
 &= g^e \left( - \frac{2m}{g^e} \left( \sqrt{v_0} - \frac{g^e}{2m} \frac{2m}{g^e} \sqrt{v_0} \right)^4 + \frac{2m}{4g^e} (\sqrt{v_0})^4 \right) \\
 &= \frac{1}{2} m v_0^2
 \end{aligned}$$

[2]

Dieses Ergebnis folgt auch direkt aus dem Energieerhaltungssatz.

**Aufgabe 2:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(7 Punkte)

1. Möglichkeitchar. Gleichung

$$0 = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)$$

1

Fundamentalsystem (rech)

$$\{e^x, e^{-x}\}$$

1

partikuläre Lösung ("Ansatz von Typ der rechten Seite")

$$y_p(x) = a \cos(x) + b \sin(x), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1

$$y_p''(x) = -a \cos(x) - b \sin(x) = -y_p(x)$$

Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich:

$$-2a \cos(x) - 2b \sin(x) = \cos(x) \Rightarrow b = 0, \quad a = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = -\frac{1}{2} \cos(x), \quad y_p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1

Lösungsgesamtheit

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x), \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

1

### Aufangsbedingungen

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x), \quad y(0) = 0$$

$$y'(x) = \lambda_1 e^x - \lambda_2 e^{-x} + \frac{1}{2} \sin(x), \quad y'(0) = 0$$

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -\frac{1}{2} \\ \hline 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ \hline 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \begin{array}{l} + (-1) \\ + \end{array}$$
  
$$\left. \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right\} \begin{array}{l} + \\ +(-1) \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{4}$$

1

### Lösung

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x)$$

1

27

### 2. Möglichkeit

char. Gleichung und Fundamentalsystem wie oben 1 + 1

Wronski-Matrix und rechte Seite des äquivalenten

Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}, \quad p(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(x) \end{pmatrix},$$

1

$$\text{Bedingung: } \det(W(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



partikuläre Lösung ("Variation der Konstanten")

$$y_p(x) = W(x) \cdot c(x) = W(x) \cdot \int_{x_0}^x W^{-1}(s) f(s) ds, \quad y_p(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Berechne  $c'(s) := W^{-1}(s) f(s)$  als Lösung des Systems

$$W(s) c'(s) = f(s) :$$

$$\begin{array}{cc|c} e^s & e^{-s} & 0 \\ e^s & -e^{-s} & \cos(s) \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right\} +$$


---


$$\begin{array}{cc|c} e^s & e^{-s} & 0 \\ 2e^s & 0 & \cos(s) \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \nwarrow \\ \searrow \end{array} \right\} + (-\frac{1}{2})$$


---


$$\begin{array}{cc|c} 0 & e^{-s} & -\frac{1}{2} \cos(s) \\ e^s & 0 & \frac{1}{2} \cos(s) \end{array} \quad \left. \begin{array}{c} \nwarrow \\ \searrow \end{array} \right\}$$


---


$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} e^{-s} \cos(s) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} e^s \cos(s) \end{array}$$

$$\Rightarrow c'(s) = \frac{1}{2} \cos(s) \begin{pmatrix} e^{-s} \\ -e^s \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

Integration:  $c(x) = \int_0^x c'(s) ds = \frac{1}{2} \int_0^x \begin{pmatrix} \cos(s) e^{-s} \\ -\cos(s) e^s \end{pmatrix} ds$

1. Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_0^x \cos(s) e^{-s} ds &= \int_0^x \cos(s) (-e^{-s})' ds \\ &= - \int_0^x (-\sin(s)) (-e^{-s}) ds \quad (\text{partielle Integration}) \\ &\quad + \left[ \cos(s) (-e^{-s}) \right]_0^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^x \sin(s) e^{-s} ds - \cos(x) e^{-x} + 1 \\
&= - \int_0^x \sin(s) (-e^{-s})' ds - \cos(x) e^{-x} + 1 \\
&= \int_0^x \cos(s) (-e^{-s}) ds \quad (\text{part. Integration}) \\
&\quad - [\sin(s) (-e^{-s})]_0^x - \cos(x) e^{-x} + 1 \\
&= - \int_0^x \cos(s) e^{-s} ds + \sin(x) e^{-x} - \cos(x) e^{-x} + 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos(s) e^{-s} ds = \left( \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) \right) e^{-x} + \frac{1}{2}$$

2. Nebenrechnung

$$\begin{aligned}
\int_0^x \cos(s) e^s ds &= \int_0^x \cos(s) (e^s)' ds \\
&= - \int_0^x -\sin(s) e^s ds + [\cos(s) e^s]_0^x \\
&= \int_0^x \sin(s) (e^s)' ds + \cos(x) e^x - 1 \\
&= - \int_0^x \cos(s) e^s ds + [\sin(s) e^s]_0^x + \cos(x) e^x - 1 \\
&= - \int_0^x \cos(s) e^s ds + \sin(x) e^x + \cos(x) e^x - 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^x \cos(s) e^s ds = \frac{1}{2} \sin(x) e^x + \frac{1}{2} \cos(x) e^x - \frac{1}{2}$$

Insgesamt folgt

$$c(x) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sin(x) e^{-x} - \cos(x) e^{-x} + 1 \\ -\sin(x) e^x - \cos(x) e^x + 1 \end{pmatrix}$$

□

Lösung

$$y(x) = y_p(x) \quad / \text{wg. Anfangsbed.}$$

$$= (c(x))^T \cdot ((1, 0) \cdot W(x))$$

$$= (e^x, e^{-x}) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \sin(x) e^{-x} - \frac{1}{4} \cos(x) e^{-x} + \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \sin(x) e^x - \frac{1}{4} \cos(x) e^x + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} e^x + \frac{1}{4} e^{-x} - \frac{1}{2} \cos(x)$$

□

$(y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

Σ 7

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' + y \sin x = \sin x, \quad y(0) = \pi.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

(6 Punkte)

$$y'(x) = \underbrace{-\sin(x)}_{a(x)} y(x) + \underbrace{\sin(x)}_{b(x)}$$

(i) homogene Gleichung

$$H(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds = \int_0^x (-\sin(s)) ds = [\cos(s)]_0^x = \cos(x) - 1 \quad \boxed{1}$$

homogene Lösungsgesamtheit:

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = c e^{(\cos(x) - 1)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$= \tilde{c} e^{\cos(x)}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R} \quad \boxed{1}$$

(ii) partikuläre Lösung

$$\begin{aligned} c(x) &= \int_0^x e^{(-H(s))} \cdot b(s) ds \\ &= \int_0^x e^{(-\cos(s) + 1)} \cdot \sin(s) ds \\ &= e \int_0^x e^{-\cos(s)} \cdot \sin(s) ds \\ &= e \left[ e^{-\cos(s)} \right]_0^x \end{aligned}$$

$$= e(e^{-\cos(x)} - e^{-1})$$

$$= e^{-\cos(x)+1} - 1$$

$$\Rightarrow y_p(x) = c(x) \cdot e^{\int(x)}$$

$$= (e^{-\cos(x)+1} - 1) \cdot e^{\cos(x)-1}$$

$$= 1 - e^{\cos(x)-1}$$

1

(iii) Lösungsgesamtheit

$$y(x) = c \cdot e^{\cos(x)} + 1 - e^{\cos(x)-1} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

1

(iv) Anfangsbedingung

$$y(0) = \pi$$

$$\Leftrightarrow \pi = c \cdot e + 1 - 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{\pi}{e}$$

1

(v) Lösung

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{\pi}{e} e^{\cos(x)} + 1 - e^{\cos(x)-1}$$

1

Σ 6

**Aufgabe 4:**

Gegeben ist die Gleichung

$$y'' - xy' + y = 3, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$$

Berechnen Sie

- a) mit dem impliziten Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(x_{k+1}, y_{k+1})$$

- b) mit dem verbesserten Euler-Verfahren

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1)$$

$$y_{k+1} = y_k + hk_2$$

und der Schrittweite  $h = 1$  jeweils eine Approximation von  $y(1)$ ,  $y'(1)$ .

(4+3 Punkte)

Transformation der DGL 2. Ordnung auf ein System  
1. Ordnung:

$$z(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(x) \\ z_2(x) \end{pmatrix}, \quad z(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$z'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_2(x) \\ x z_2(x) - z_1(x) + 3 \end{pmatrix} =: f(x, z)$$

1

- a) (implizites Euler-Verfahren)

$$z(1) = z(0) + 1 \cdot f(1, z(1))$$

$$= z(0) + \begin{pmatrix} z_2(1) \\ z_2(1) - z_1(1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} z_1(1) - z_2(1) \\ z_1(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z(1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad [1]$$

LGS:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow z_1(1) = 5, \quad z_2(1) = 2$$

$$\Rightarrow y(1) \approx 5, \quad y'(1) \approx 2$$

b) (verbessertes Euler-Verfahren)

$$K_1 = f(0, z(0)) = \begin{pmatrix} z_2(0) \\ -z_1(0) + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$K_2 = f\left(\frac{1}{2}, z(0) + \frac{1}{2} K_1\right) = f\left(\frac{1}{2}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \cdot 2 - 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$z(1) = z(0) + 1 \cdot K_2$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad [1]$$

$$\Rightarrow y(1) \approx 5, \quad y'(1) \approx 2$$

Σ 7

**Aufgabe 5:**

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 11 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  *ohne* Pivotisierung.  
 b) Berechnen Sie die Determinante von  $A$ .  
 c) Lösen Sie die beiden Gleichungssysteme  $Ax = b$  und  $Ax = c$ .

(2+1+4 Punkte)

a)

$$\begin{array}{cccc|l}
 3 & 1 & 2 & 1 & \left. \begin{array}{l} +(-2) \\ + \end{array} \right\} \\
 6 & 4 & 5 & 5 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 3 & 5 & 7 & 8 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 6 & 4 & 11 & 8 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & \\
 0 & 2 & 1 & 3 & \left. \begin{array}{l} +(-2) \\ + \end{array} \right\} \\
 0 & 4 & 5 & 7 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 0 & 2 & 7 & 6 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & \\
 0 & 2 & 1 & 3 & \\
 0 & 0 & 3 & 1 & \left. \begin{array}{l} +(-2) \\ + \end{array} \right\} \\
 0 & 0 & 6 & 3 & \left. \begin{array}{l} + \\ + \end{array} \right\} \\
 \hline
 3 & 1 & 2 & 1 & \\
 0 & 2 & 1 & 3 & \\
 0 & 0 & 3 & 1 & \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 
 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$



$$\begin{aligned}
 b) \det(A) &= \det(L \cdot R) \\
 &= \det(L) \cdot \det(R) \\
 &= \det(R) \\
 &= 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \\
 &= 18
 \end{aligned}$$

□

$$c) Ax = b \Leftrightarrow L(\underbrace{Rx}_y) = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 7 \\ 20 \\ 23 \\ 29 \end{pmatrix} \Rightarrow y = (7, 6, 4, 1)^T$$

□

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (1, 1, 1, 1)^T$$

□

$$A\bar{x} = c \Leftrightarrow L(\underbrace{R\bar{x}}_{\bar{y}}) = c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \bar{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{y} = (1, -1, 2, -4)^T$$

□

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x} = \left(-\frac{7}{6}, \frac{9}{2}, 2, -4\right)^T$$

□

□□

**Aufgabe 6:**

Zeigen Sie: Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\cos x + 2y &= 6x, \\ xy^2 + \sin y &= 8y,\end{aligned}$$

besitzt auf  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$  genau eine Lösung.

(5 Punkte)

Definiere  $\Phi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  durch

$$\Phi(x, y) := \begin{pmatrix} \frac{1}{6} \cos(x) + \frac{2}{3} y \\ \frac{1}{8} x y^2 + \frac{1}{8} \sin(y) \end{pmatrix}. \quad [1]$$

Zeige, daß  $\Phi$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt  $\Rightarrow$  Beh.(i)  $\Omega$  ist abgeschlossen [1](ii) für  $x, y \in [0, 1]$  gilt  $\cos(x) \geq 0$  und  $\sin(y) \geq 0$ , daher $\Phi(\Omega) \subseteq \Omega$ , d.h.  $\Phi$  ist eine Selbstabbildung [1](iii)  $\Phi$  ist differenzierbar, und es ist

$$\Phi'(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \sin(x) & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{8} y^2 & \frac{1}{8} \cos(y) + \frac{1}{4} xy \end{pmatrix}.$$

Wählt man  $\|\cdot\|_\infty$  als Norm auf  $\mathbb{R}^2$ , so ist

$$\begin{aligned}\|\Phi'(x, y)\|_\infty &= \max \left\{ \frac{1}{6} |\sin(x)| + \frac{2}{3}, \frac{1}{8} (y^2 + \cos(y) + 2xy) \right\} \\ &\leq \max \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}\end{aligned} \quad [1]$$

Aus der Mittelwertungleichung für vektorwertige Funktionen folgt

$$\begin{aligned}\|\Phi(x, y) - \Phi(\bar{x}, \bar{y})\|_{\infty} &\leq \max_{(z, \eta) \in R} \|\Phi'(z, \eta)\|_{\infty} \cdot \|(x, y)^T - (\bar{x}, \bar{y})^T\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|(x, y)^T - (\bar{x}, \bar{y})^T\|_{\infty} \quad \forall (x, y), (\bar{x}, \bar{y}) \in R\end{aligned}$$

□

D.h.  $\Phi$  ist Lipschitz-stetig mit einer Konstanten kleiner 1.

Damit erfüllt  $\Phi$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes.

□ 5

## Diplomvorprüfung Differentialgleichungen und Numerik, SS 01 (InformatikerInnen)

- teilnahmeberechtigt an dieser Klausur sind laut DPO nur StudentInnen, die den Schein zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“ erworben haben;
- Hilfsmittel: keine (außer dokumentenechtes Schreibgerät);
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift schreiben;
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten;
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben;
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten;

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden ab Mo, 13.08.2001, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet ebenfalls am Mo, 13.08.2001 statt (Uhrzeit und Raum s. Aushang im Schaukasten). Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\Sigma$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
|     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1:**

- a) Wie ist die Exponentialfunktion für Matrizen definiert? Wieso existiert  $\exp(A)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?
- b) Formulieren Sie unter vollständiger Angabe der Voraussetzungen und der Behauptung den Hauptsatz über die Existenz der maximalen Lösung eines Anfangswertproblems.
- c) Zeigen Sie: Das Lagrange Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu gegebenen Daten  $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  und paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  existiert ein eindeutiges Polynom  $P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{P}_n$  mit

$$P_n(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

(2+2+3 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Die Gleichung

$$\cos x = x$$

besitzt genau eine Lösung  $x^* \in \mathbb{R}$ . Mit dem klassischen Newton-Verfahren zum einen und mit einer Fixpunktiteration zum anderen sollen Näherungswerte zu  $x^*$  berechnet werden. Als Startwert wird jeweils  $x_0 = 0.1$  gewählt.

- Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren auf.
- Stellen Sie die Iterationsvorschrift für die Fixpunktiteration auf und begründen Sie, weshalb die Fixpunktiteration für den Startwert  $x_0 = 0.1$  konvergiert.
- Die Fixpunktiteration und das Newton-Verfahren liefern folgende Näherungswerte  $x_k$ :

| $k$ | Fixpunktiteration | Newton-Verfahren |
|-----|-------------------|------------------|
| 0   | 0.10000000        | 0.10000000       |
| 1   | 0.99500417        | 0.91376339       |
| 2   | 0.54449940        | 0.74466424       |
| 3   | 0.85538671        | 0.73909197       |
| 4   | 0.65592666        | 0.73908513       |
| 5   | 0.79248310        | 0.73908513       |
| 6   | 0.70207927        | 0.73908513       |
| 7   | 0.76350103        | 0.73908513       |
| 8   | 0.72241964        | 0.73908513       |
| 9   | 0.75020806        | 0.73908513       |
| 10  | 0.73154703        | 0.73908513       |

Beschreiben und begründen Sie das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren.

(1+3+2 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

(7 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' - xy^2 - 3xy = 0, \quad y(0) = -1.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

(7 Punkte)



**Aufgabe 5:**

Vorgelegt sei das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie eine Näherungslösung  $x^2$  des Gleichungssystems, indem Sie ausgehend vom Startwert  $x^0 = (0, 0, 0)^T$  zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens durchführen.
- b) Weshalb konvergiert das Gesamtschrittverfahren?
- c) Berechnen Sie die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  ohne Pivotisierung.
- d) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  unter Verwendung der in Aufgabenteil c) bestimmten  $LR$ -Zerlegung.

(3+1+2+2 Punkte)

**Aufgabe 6:**

Gegeben sind die Punkte

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ \hline y_i & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

Diese Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = ax^2 - b$$

liegen. Bestimmen Sie die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode mit Hilfe der folgenden  $QR$ -Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6}\sqrt{30} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{30}\sqrt{30} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{15}\sqrt{30} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} & -\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{30} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)







*Klausur*

**Diplomvorprüfung Differentialgleichungen und Numerik,  
SS 01 (InformatikerInnen)**

- ~~teilnahmeberechtigt an dieser Klausur sind laut DPO nur diejenigen StudentInnen, die den Schein zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“ erworben haben;~~
- Hilfsmittel: keine (außer dokumentenechtes Schreibgerät);
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift schreiben;
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten;
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben;
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten;

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden ab Mo, 13.08.2001, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet ebenfalls am ~~Mo, 13.08.2001~~ statt (Uhrzeit und Raum s. Aushang im Schaukasten). Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\Sigma$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
|     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1:**

- a) Wie ist die Exponentialfunktion für Matrizen definiert? Wieso existiert  $\exp(A)$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ?
- b) Formulieren Sie unter vollständiger Angabe der Voraussetzungen und der Behauptung den Hauptsatz über die Existenz der maximalen Lösung eines Anfangswertproblems.
- c) Zeigen Sie: Das Lagrange Interpolationsproblem ist stets eindeutig lösbar, d.h. zu gegebenen Daten  $f_0, \dots, f_n \in \mathbb{R}$  und paarweise verschiedenen Stützstellen  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  existiert ein eindeutiges Polynom  $P_n(x) = P(f|x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{P}_n$  mit

$$P_n(x_j) = f_j, \quad j = 0, \dots, n.$$

(2+2+3 Punkte)

a) Definition

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{n \times n} &\rightarrow \mathbb{R}^{n \times n} \\ \exp: \quad A &\mapsto \exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \end{aligned}$$

1

für  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ist

$$\left\| \sum_{k=l}^m \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=l}^m \frac{1}{k!} \|A\|^k \quad \forall l, m \in \mathbb{N}_0, \quad l \leq m,$$

so daß nach dem Cauchy-Kriterium die Matrix

$$\exp(A) := \lim_{K \rightarrow \infty} \left( \sum_{j=0}^K \frac{1}{j!} A^j \right)$$

existiert.

1

b) Vor:  $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

$f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig und erfülle lokale Lipschitz-  
bedingung auf  $D$

□

Beh: Das IWP

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0,$$

mit  $(x_0, y_0) \in D$  besitzt eine maximale Lösung  
 $y \in C^1(I)$ ,  $I$  offenes Intervall.

□

c) Es gibt mehrere Möglichkeiten die Behauptung zu zeigen.  
Hier ein einfacher konstruktiver Beweis:

Definiere

$$P_n(x) := \sum_{j=0}^n f_j L_{jn}(x),$$

wobei

$$L_{jn}(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k},$$

dann  $L_{jn} \in P_n$  und  $L_{jn}(x_i) = \delta_{ji}$ , d.h.

$$P_n(x_i) = \sum_{j=0}^n f_j L_{jn}(x_i) = \sum_{j=0}^n f_j \delta_{ji} = f_i.$$

Also ist  $P_n$  tatsächlich eine Lösung des Lagrange-  
Interpolationsproblems.



Sei  $\tilde{p}_n$  eine beliebige Lösung dieses Problems. Dann gilt für  $Q_n := \tilde{p}_n - p_n$ , daß  $Q_n \in \mathcal{P}_n$  und

$$Q_n(x_j) = \tilde{p}_n(x_j) - p_n(x_j) = f_j - f_j = 0, \quad j=0, \dots, 4.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Algebra muß  $Q_n(x) = 0$  für alle  $x$  gelten, woraus die Eindeigkeit der Lösung folgt.

3

Σ 7 Punkte

**Aufgabe 2:**

Die Gleichung

$$\cos x = x$$

besitzt genau eine Lösung  $x^* \in \mathbb{R}$ . Mit dem klassischen Newton-Verfahren zum einen und mit einer Fixpunktiteration zum anderen sollen Näherungswerte zu  $x^*$  berechnet werden. Als Startwert wird jeweils  $x_0 = 0.1$  gewählt.

- Stellen Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren auf.
- Stellen Sie die Iterationsvorschrift für die Fixpunktiteration auf und begründen Sie, weshalb die Fixpunktiteration für den Startwert  $x_0 = 0.1$  konvergiert.
- Die Fixpunktiteration und das Newton-Verfahren liefern folgende Näherungswerte  $x_k$ :

| $k$ | Fixpunktiteration | Newton-Verfahren |
|-----|-------------------|------------------|
| 0   | 0.10000000        | 0.10000000       |
| 1   | 0.99500417        | 0.91376339       |
| 2   | 0.54449940        | 0.74466424       |
| 3   | 0.85538671        | 0.73909197       |
| 4   | 0.65592666        | 0.73908513       |
| 5   | 0.79248310        | 0.73908513       |
| 6   | 0.70207927        | 0.73908513       |
| 7   | 0.76350103        | 0.73908513       |
| 8   | 0.72241964        | 0.73908513       |
| 9   | 0.75020806        | 0.73908513       |
| 10  | 0.73154703        | 0.73908513       |

Beschreiben und begründen Sie das Konvergenzverhalten der beiden Verfahren.

(1+3+2 Punkte)

a) Setze  $f(x) := \cos(x) - x$ , dann  $f'(x) = -\sin(x) - 1$ .

Newton-Iteration:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

$$= x_k + \frac{\cos(x_k) - x_k}{\sin(x_k) + 1}, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 0.1$$



b) Setze  $g(x) := \cos(x)$ . Die Fixpunktiteration lautet:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= g(x_k) \\ &= \cos(x_k), \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad x_0 = 0.1\end{aligned}$$

Setze  $\Omega := [0, 1]$  und zeige, daß  $g$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt: [1]

(i)  $\Omega$  abgeschlossen

(ii)  $g$  Selbstabbildung (klar)

(iii) Seien  $x, y \in \Omega$ , dann

$$|g(x) - g(y)| \leq \max_{\xi \in \Omega} |g'(\xi)| \cdot |x - y| \quad (\text{Mittelwertsatz})$$

$$= \max_{\xi \in \Omega} |\sin(\xi)| \cdot |x - y|$$

$$= \underbrace{\sin(1)}_{< 1} \cdot |x - y|$$

[1]

Damit erfüllt  $g$  die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes, d.h.  $g$  hat genau einen Fixpunkt  $x^*$  in  $\Omega$  und die Fixpunktiteration konvergiert für jeden Startwert  $x \in \Omega$ , insb. für  $x_0 = 0.1$ . [1]

c) Das Newton-Verfahren liefert schon nach vier Iterationen 8 richtige Dezimalstellen. Die Fixpunktiteration hat nach 10 Iterationen gerade 2 richtige Dezimalstellen.

Begründung: Das Newton-Verfahren ist (lokal) quadratisch konvergent. Die Fixpunktiteration ist ein Verfahren 1. Ordnung. [2]

6 Punkte

**Aufgabe 3:**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' - 3y' + 2y = e^x \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

(7 Punkte)

1. Möglichkeitchar. Gleichung

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

Fundamentalsystem

$$\{e^x, e^{2x}\}$$

□

Lösungsgesamtheit der hom. Gleichung

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x}, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

partikuläre Lösung (Ansatz vom Typ der rechten Seite)

$$y_p(x) = e^x (a \sin(x) + b \cos(x)), \quad a, b \in \mathbb{R}$$

□

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= e^x (a \sin(x) + b \cos(x)) + e^x (a \cos(x) - b \sin(x)) \\ &= e^x ((a-b) \sin(x) + (a+b) \cos(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= e^x ((a-b) \sin(x) + (a+b) \cos(x)) + e^x ((a-b) \cos(x) - (a+b) \sin(x)) \\ &= e^x (-2b \sin(x) + 2a \cos(x)) \end{aligned}$$

Einsetzen in DGL und Koeffizientenvergleich liefert (beachte  $e^x \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ ):

$$-2b \sin(x) + 2a \cos(x) - 3(a-b) \sin(x) - 3(a+b) \cos(x)$$

$$+ 2a \sin(x) + 2b \cos(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow (-a+b) \sin(x) + (-a-b) \cos(x) = \sin(x)$$

Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem:

$$-a + b = 1,$$

$$-a - b = 0.$$

Löse dieses LGS:

$$\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{array} \xrightarrow{+} \begin{array}{cc|c} -1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = \frac{1}{2} e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

3

Lösungsgesamtheit

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x (\cos(x) - \sin(x)),$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

### Aufangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 3$$

$$y(x) = \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

$$\begin{aligned} y'(x) &= \lambda_1 e^x + 2\lambda_2 e^{2x} + \frac{1}{2} e^x (\cos(x) - \sin(x)) + \frac{1}{2} e^x (-\sin(x) - \cos(x)) \\ &= \lambda_1 e^x + 2\lambda_2 e^{2x} - e^x \sin(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(0) = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2} = 0$$

$$y'(0) = \lambda_1 + 2\lambda_2 = 3$$

Löse dieses lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \cdot (-1) \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \cdot (-1) \\ \downarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = \frac{7}{2}$$

Lösung

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = -4e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x(\cos(x) - \sin(x))$$

[2]

7 Punkte

## 2. Möglichkeit

char. Gleichung und Fundamentalsystem wie oben

1

Wronski-Matrix und rechte Seite des äquivalenten Systems:

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 2e^{2x} \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \sin(x) \end{pmatrix}$$

1

(beachte:  $\det(W(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ )

partikuläre Lösung (Variation der Konstanten)

$$y_p(x) = W(x) c(x) = W(x) \int_{x_0}^x W^{-1}(s) f(s) ds,$$

Berechnen von  $c'(s) := W^{-1}(s) f(s)$  als Lösung des Systems  $W(s) c'(s) = f(s)$ :

$$\begin{array}{cc|c} e^s & e^{2s} & 0 \\ e^s & 2e^{2s} & e^s \sin(s) \\ \hline e^s & e^{2s} & 0 \\ 0 & e^{2s} & e^s \sin(s) \\ \hline e^s & 0 & -e^s \sin(s) \\ 0 & e^{2s} & e^s \sin(s) \\ \hline 1 & 0 & -\sin(s) \\ 0 & 1 & e^{-s} \sin(s) \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} * (-1) \\ + \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} + \\ * (-1) \end{array} \right\} \end{array}$$

$$\Rightarrow c'(s) = \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ e^{-s} \sin(s) \end{pmatrix}$$

1

Integration:

$$c(x) = \int_{x_0}^x c'(s) ds = \int_0^x \begin{pmatrix} -\sin(s) \\ e^{-s} \sin(s) \end{pmatrix} ds$$

Nebenrechnung:

$$\int_0^x -\sin(s) ds = [\cos(s)]_0^x = \cos(x) - 1$$

$$\int_0^x e^{-s} \sin(s) ds = \int_0^x (-e^{-s}) \sin(s) ds$$

$$= - \int_0^x (-e^{-s}) \cos(s) ds \quad (\text{partielle Integration})$$
$$+ [-e^{-s} \sin(s)]_0^x$$

$$= \int_0^x (-e^{-s})' \cos(s) ds - e^{-x} \sin(x)$$

$$= - \int_0^x (-e^{-s}) (-\sin(s)) ds + [-e^{-s} \cos(s)]_0^x - e^{-x} \sin(x)$$

$$\Rightarrow \int_0^x e^{-s} \sin(s) ds = -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{1}{2}$$

insgesamt:

$$f_p(x) = (1, 0) \cdot W(x) \cdot c(x)$$

$$= (e^x, e^{2x}) \cdot \begin{pmatrix} \cos(x) - 1 \\ -\frac{1}{2} e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{2} e^{-x} \cos(x) + \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= e^x \cos(x) - e^x$$

$$- \frac{1}{2} e^x \sin(x) - \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{2} e^x \cos(x) - \frac{1}{2} e^x \sin(x) - e^x + \frac{1}{2} e^{2x}$$

2



### Aufangsbedingungen

Löse dazu das LGS:  $W(x_0) c_0 = y_0$ ,  $y_0 = (0, 3)^T$ ,  $x_0 = 0$ .

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \cdot (-1) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \cdot (-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow c_0 = (-3, 3)^T$$

□

### Lösung

$$y(x) = (1, 0) \cdot W(x) \cdot c_0 + y_p(x)$$

$$= (e^x, e^{2x}) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} + y_p(x)$$

$$= -3e^x + 3e^{2x} + \frac{1}{2}e^x \cos(x) - \frac{1}{2}e^x \sin(x) - e^x + \frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= -4e^x + \frac{7}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

□

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

---

7 Punkte

**Aufgabe 4:**

Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$y' - xy^2 - 3xy = 0, \quad y(0) = -1.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

(7 Punkte)

Die DGL ist vom Typ „Bernoulli-DGL“. Daher Substitution

$$u := y^{-\alpha}, \quad \alpha = 2$$

(i) Substitution

$$u := y^{-1}, \quad y = u^{-1}, \quad y' = -u^{-2} u'$$

$$\Rightarrow -\frac{u'(t)}{u^2(t)} - \frac{t}{u^2(t)} - 3t \frac{1}{u(t)} = 0$$

$$\Rightarrow u'(t) = \underbrace{-3t u(t)}_{a(t)} - \underbrace{t}_{b(t)}$$

Dies ist eine lineare DGL 1. Ordnung. Löse zunächst diese Gleichung:

(ii) Lösungsgesamtheit der hom. Gleichung

$$\begin{aligned} H(t) &= \int_{t_0}^t a(s) \, ds \\ &= \int_0^t (-3s) \, ds \\ &= -3 \left[ \frac{1}{2} s^2 \right]_0^t \\ &= -\frac{3}{2} t^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u_h(t) = c \cdot e^{A(t)} \\ = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t^2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$u_h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

□

(iii) partikuläre Lösung

$$c(t) = \int_{t_0}^t e^{-A(s)} \cdot b(s) ds \\ = \int_0^t e^{\frac{3}{2}s^2} \cdot (-s) ds \\ = \left[ -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}s^2} \right]_0^t \\ = -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}t^2} + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow u_p(t) = c(t) \cdot e^{A(t)} \\ = \left( -\frac{1}{3} e^{\frac{3}{2}t^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot e^{-\frac{3}{2}t^2} \\ = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}t^2}$$

□

(iv) Lösungsgesamtheit

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) \\ = c \cdot e^{-\frac{3}{2}t^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{-\frac{3}{2}t^2}, \quad c \in \mathbb{R} \\ = \tilde{c} e^{-\frac{3}{2}t^2} - \frac{1}{3}, \quad \tilde{c} \in \mathbb{R}$$

□

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

KKK

(v) Rücksubstitution

$$y(x) = u^{-1}(x)$$

$$= \left( -\frac{1}{3} + c e^{-\frac{3}{2}x^2} \right)^{-1}, \quad c \in \mathbb{R}, \quad y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \square$$

(vi) Anfangsbedingung

$$y(0) = -1$$

$$\Rightarrow -1 = \left( -\frac{1}{3} + c \right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow -1 = -\frac{1}{3} + c$$

$$\Leftrightarrow c = -1 + \frac{1}{3} \\ = -\frac{2}{3} \quad \square$$

(vii) Lösung

$$y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} e^{-\frac{3}{2}x^2}}$$

Die Lösung ex. auf ganz  $\mathbb{R}$ , da Nenner stets  $\neq 0$ .  $\square$

---

$\sum 7$  Punkte

**Aufgabe 5:**

Vorgelegt sei das Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie eine Näherungslösung  $x^2$  des Gleichungssystems, indem Sie ausgehend vom Startwert  $x^0 = (0, 0, 0)^T$  zwei Schritte des Gesamtschrittverfahrens durchführen.
- Weshalb konvergiert das Gesamtschrittverfahren?
- Berechnen Sie die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  ohne Pivotisierung.
- Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  unter Verwendung der in Aufgabenteil c) bestimmten  $LR$ -Zerlegung.

(3+1+2+2 Punkte)

a) Gesamtschrittverfahren:

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left( b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^k \right), \quad i=1, \dots, n$$

Also hier:

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{8} (-1 - 2x_2^k)$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{8} (2 - 2x_1^k - 4x_3^k)$$

$$x_3^{k+1} = -\frac{1}{8} (1 - x_1^k - 4x_2^k)$$

$\Rightarrow$

$$x_1^1 = \frac{1}{8} (-1) = -\frac{1}{8}$$

$$x_2^1 = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$x_3^1 = -\frac{1}{8} (1) = -\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow x^1 = \left( -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \right)^T \quad \square$$

$$x_1^2 = \frac{1}{8} \left( -1 - \frac{2}{4} \right) = \frac{1}{8} \left( -\frac{3}{2} \right) = -\frac{3}{16}$$

$$x_2^2 = \frac{1}{8} \left( 2 + \frac{2}{8} + \frac{4}{8} \right) = \frac{1}{8} \left( \frac{8+1+2}{4} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{11}{4} = \frac{11}{32}$$

$$x_3^2 = -\frac{1}{8} \left( 1 + \frac{1}{8} - 1 \right) = -\frac{1}{64}$$

$$\Rightarrow x^2 = \left( -\frac{3}{16}, \frac{11}{32}, -\frac{1}{64} \right)^T$$

□

b)  $A$  erfüllt das starke Zeilensummekriterium. Daher ist das Gesamtschnittverfahren für  $A$  konvergent. □

c)

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 0 & \left. \begin{array}{l} \cdot (-\frac{1}{4}) \\ \cdot (-\frac{1}{8}) \end{array} \right\} \\ 2 & 8 & 4 & \\ 1 & 4 & -8 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 0 & \\ 0 & \frac{15}{2} & 4 & \left. \cdot (-\frac{2}{15}) \right\} \\ 0 & \frac{15}{4} & -8 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & 0 & \\ 0 & \frac{15}{2} & 4 & \\ 0 & 0 & -10 & \end{array}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

□

$$R = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

□

$$a) \quad Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{L} \underbrace{Rx} = b$$

$$Ly = b \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad y = \left( -1, \frac{9}{4}, 0 \right)^T \quad \boxed{1}$$

$$Rx = y \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{15}{2} & 4 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \left( -\frac{1}{8}, \frac{3}{10}, 0 \right)^T \quad \boxed{1}$$

---

Σ 8 Punkte

**Aufgabe 6:**

Gegeben sind die Punkte

$$\begin{array}{c|ccc} x_i & 0 & 1 & 1/\sqrt{2} \\ \hline y_i & 1 & 2 & 3 \end{array}.$$

Diese Punkte  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , sollen gemäß theoretischen Überlegungen auf der Kurve

$$y(x) = ax^2 - b$$

liegen. Bestimmen Sie die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}$  optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadratmethode mit Hilfe der folgenden  $QR$ -Zerlegung

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{6}\sqrt{30} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{30}\sqrt{30} & \frac{1}{6}\sqrt{6} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} & -\frac{1}{15}\sqrt{30} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} & -\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{30} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(5 Punkte)

$$H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}, \quad \|Hx - b\|_2 \rightarrow \min, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{array}$$

mit  $QR$ -Zerlegung:

$$\begin{aligned} \|Hx - b\|_2^2 &= \|QRx - Qb\|_2^2 = \|Q(Rx - Q^T b)\|_2^2 = \|Rx - Q^T b\|_2^2 \\ &= \|\tilde{R}x - \tilde{b}\|_2^2 + \|\tilde{b}\|_2^2, \end{aligned}$$

$$\text{wobei } \tilde{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} & -\frac{3}{5}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{30} \end{pmatrix}. \quad \boxed{1}$$

$$Q^T b = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{1}{6}\sqrt{30} & \frac{1}{30}\sqrt{30} & -\frac{1}{15}\sqrt{30} \\ \frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{6}\sqrt{6} & -\frac{1}{3}\sqrt{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{30} \\ * \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ * \end{pmatrix} \quad \boxed{1}$$



Löse  $\tilde{R}x = b$  ( $x = (a, b)^T$ ) durch Rückwärtseinsetzen:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{5} & -\frac{3}{2}\sqrt{5} \\ 0 & \frac{1}{5}\sqrt{30} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{3}{10}\sqrt{30} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow b = -\frac{3}{2}, \quad a = 1.$$

□

---

Σ 5 Punkte

## Diplomvorprüfung Differentialgleichungen und Numerik, WS 01/02 (Informatiker/innen)

- Hilfsmittel: keine (außer dokumentenechtes Schreibgerät);
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Bleistift schreiben;
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten;
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben;
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben;
- jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer versehen;
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen;
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten;

Zum Bestehen der Klausur sind 20 der insgesamt 40 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden ab Mi, 10. April 2002, durch Aushang im Schaukasten von Prof. Esser bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Do, 11. April im Raum 149, Hauptgebäude erste Etage, von 10:00 bis 12:00 Uhr statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich.

Matrikelnummer: \_\_\_\_\_

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Hiermit erkläre ich, daß ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, daß bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Unterschrift: \_\_\_\_\_

Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\Sigma$ |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|----------|
|     |     |     |     |     |     |          |

**Aufgabe 1**

- a) Was ist eine Wronski-Matrix? Nennen Sie außerdem zwei wesentliche Eigenschaften einer Wronski-Matrix.
- b) Geben Sie eine geometrische Deutung für das implizite Euler-Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1})$$

mit  $f : D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

- c) Vorgelegt sei das lineare Ausgleichsproblem  $\|Ax - b\|_2 \rightarrow \min$  mit  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $m \geq n$ ,  $\text{Rang}(A) = n$  und  $b \in \mathbb{R}^m$ . Sei  $x^*$  Lösung dieses Problems und  $r := b - Ax^*$ . Zeigen Sie

$$r \perp \text{Bild}(A),$$

d. h. das Residuum  $r$  steht senkrecht auf dem Teilraum  $\text{Bild}(A)$ .

*Hinweis:* Es ist  $\text{Bild}(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ .

(3+2+3 Punkte)

**Aufgabe 2**

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = y^2(t) - 5t, \quad y(1) = 2.$$

- a) Berechnen Sie mit dem expliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite  $h = \frac{1}{2}$  eine Näherung zu  $y(2)$ .
- b) Formulieren Sie für obiges Anfangswertproblem die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens zur Schrittweite  $h = \frac{1}{8}$ .
- c) Die in jedem Zeitschritt zu lösende quadratische Gleichung in  $y_{k+1}$  besitzt jeweils zwei reelle Lösungen. Welche Lösung muß man im impliziten Euler-Verfahren verwenden (Begründung)?
- d) Führen Sie einen Schritt des impliziten Euler-Verfahren zur Schrittweite  $h = \frac{1}{8}$  durch, um eine Näherung zu  $y(\frac{9}{8})$  zu berechnen.

*Hinweis:* Wenn Sie Aufgabenteil c) nicht gelöst haben, benutzen Sie diejenige Lösung der quadratischen Gleichung, die am nächsten zur vorhergehenden Approximation  $y_k$  liegt.

(2+1+2+2 Punkte)

**Aufgabe 3**

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) - y^3(t) + 5y(t) = 0, \quad y(0) = 1.$$

Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

(6 Punkte)

**Aufgabe 4**

Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y(t) + \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{t}e^t \end{pmatrix}, \quad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -e \end{pmatrix}.$$

(7 Punkte)

**Aufgabe 5**

Vorgelegt sei das lineare Gleichungssystem  $Ax = b$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Berechnen Sie eine Näherungslösung  $x^2$  des Gleichungssystems, indem Sie ausgehend vom Startwert  $x^0 = (0, 0, 0)^T$  zwei Schritte des Einzelschrittverfahrens durchführen.
- b) Berechnen Sie die  $LR$ -Zerlegung der Matrix  $A$  ohne Pivotisierung.
- c) Berechnen Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems  $Ax = b$  unter Verwendung der in Aufgabenteil c) bestimmten  $LR$ -Zerlegung.

(3+2+2 Punkte)

**Aufgabe 6**

Die Funktion

$$f(x) = \int_0^x \sin^2(t) dt$$

soll im Intervall  $I = [0, \frac{\pi}{2}]$  äquidistant so tabelliert werden, daß bei linearer Interpolation der Interpolationsfehler für jedes  $x \in I$  kleiner als  $\frac{1}{4}10^{-4}$  ist.

Wie groß darf der Stützstellenabstand  $h$  dann höchstens sein und wieviele Funktionswerte müssen in die Tabelle aufgenommen werden? (5 Punkte)







## Diplomvorprüfung Differentialgleichungen und Numerik, WS 01/02 (Musterlösung)

### Aufgabe 1:

- a) Betrachtet wird die lineare, homogene Differentialgleichung

$$y'(t) = A(t)y(t)$$

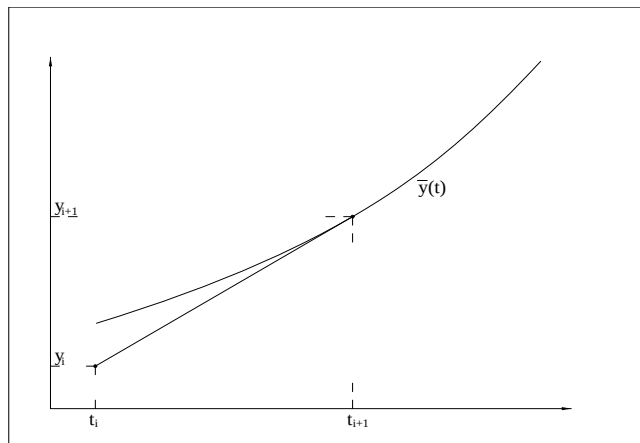
auf einem Intervall  $I \in \mathbb{R}$  mit  $A(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Ein Fundamentalsystem besteht aus  $n$  linear unabhängigen Lösungen  $y_1, \dots, y_n$ . Die zugehörige  $n \times n$  Matrix  $W(t) := (y_1(t), \dots, y_n(t))$ ,  $t \in I$ , heißt *Wronski-Matrix*.

Diese Matrix besitzt für  $t \in I$  unter anderem folgende Eigenschaften:

- (a)  $W'(t) = A(t)W(t)$ ,
- (b)  $\det(W(t)) \neq 0$ ,
- (c) eine weitere Matrix  $\tilde{W}(t)$ ,  $t \in I$  ist eine Wronski-Matrix genau dann, wenn eine nicht-singuläre Matrix  $B$  existiert mit

$$\tilde{W}(t) = W(t)B.$$

- b) Skizze zum impliziten Euler-Verfahren:



Da die Steigung für den impliziten Eulerschritt  $f(t_{i+1}, y_{i+1})$  ist, liegt eine Berührung mit dem Schaubild von  $\bar{y}(t)$  vor. Dabei ist  $\bar{y}(t)$  die Lösung der Differentialgleichung mit  $\bar{y}'(t) = f(t, \bar{y}(t))$  zum Startwert  $\bar{y}_0 = y_{i+1}$ .

- c) Unter den angegebenen Voraussetzungen ist das lineare Ausgleichsproblem äquivalent zur Lösung der Normalengleichungen

$$A^T A x = A^T b \iff A^T (A x - b) = 0,$$

d. h. der Vektor  $Ax^* - b$  muß senkrecht zu den Spalten von  $A$  und damit zu allen Linearkombinationen der Spalten von  $A$ , also zum Bild von  $A$  sein.

**Aufgabe 2:**

- a) Das explizite Euler-Verfahren lautet

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h f(t_k, y_k) \\ &= y_k + h ((y_k)^2 - 5 t_k) \end{aligned}$$

und liefert die Näherungswerte

$$\begin{aligned} y_0 &= 2, \\ y_1 &= \frac{3}{2}, \\ y_2 &= -\frac{9}{8}. \end{aligned}$$

- b) Die Iterationsvorschrift des impliziten Euler-Verfahrens lautet für obige Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k + h f(t_{k+1}, y_{k+1}) \\ &= y_k + h ((y_{k+1})^2 - 5(t_k + h)). \end{aligned}$$

In jedem Zeitschritt ist somit die quadratische Gleichung

$$0 = h (y_{k+1})^2 - y_{k+1} + y_k - 5 h (t_k + h)$$

zu lösen.

- c) Sei
- $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- definiert durch
- $g(h, y) := h y^2 - y + y_k - 5 h (t_k + h)$
- , wobei
- $y_k$
- und
- $t_k$
- vorgegeben sind. Da
- $g$
- stetig differenzierbar ist,
- $g(0, y_k) = 0$
- und
- $\partial_y g(0, y_k) = -1 \neq 0$
- , läßt sich nach dem Satz über implizite Funktionen die Gleichung
- $g(h, y) = 0$
- lokal um
- $h = 0$
- nach
- $y$
- auflösen. Es gibt also ein
- $\hat{h} > 0$
- und eine offene Menge
- $V \subseteq \mathbb{R}$
- mit
- $y_k \in V$
- sowie eine stetig differenzierbare Funktion
- $p : (-\hat{h}, \hat{h}) \rightarrow V$
- , so daß

$$g(h, y) = 0 \iff y = p(h)$$

für alle  $(h, y) \in (-\hat{h}, \hat{h}) \times V$ . Insbesondere gilt  $y_k = p(0)$ .Löst man die quadratische Gleichung aus Aufgabenteil b) nach  $y_{k+1}$  auf, so erhält man für  $h \neq 0$  die beiden Wurzeln

$$\begin{aligned} y_{k+1,1}(h) &= \frac{1 + \sqrt{1 - 4h y_k + 20h^2(t_k + h)}}{2h}, \\ y_{k+1,2}(h) &= \frac{1 - \sqrt{1 - 4h y_k + 20h^2(t_k + h)}}{2h}. \end{aligned}$$

Für  $h \rightarrow 0$  gilt  $y_{k+1,1}(h) \rightarrow \infty$ . Daher kommt diese Wurzel nicht in Frage. Nach dem Satz über implizite Funktionen ist demnach  $y_{k+1,2}(h)$  die Lösung der quadratischen Gleichung, die beim impliziten Euler-Verfahren benutzt werden muß.*Bemerkung:* Die Abbildung  $p$  lautet in diesem Beispiel

$$p(h) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1 - 4h y_k + 20h^2(t_k + h)}}{2h} & \text{für } h \neq 0 \\ y_k & \text{für } h = 0 \end{cases}.$$

Die Stetigkeit von  $p$  folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Man kann die Stetigkeit im Punkte  $h = 0$  aber auch direkt mit der Regel von l'Hospital zeigen.

- d) Zur Berechnung von
- $y_1$
- löst man

$$0 = (y_1)^2 - 8 y_1 + (16 - 5 \cdot \frac{9}{8})$$

und erhält unter Verwendung des Hinweises oder der Ergebnisse aus Aufgabenteil c):

$$y_1 = 4 - \sqrt{\frac{45}{8}} \approx 1.628.$$

**Aufgabe 3:**

Die vorgelegte Differentialgleichung ist vom Typ *Bernoulli-DGL*.

**Substitution**

Die Substitution  $u(t) := y^{-2}(t)$  führt auf die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

$$u'(t) = 10 u(t) - 2.$$

**Lösungsgesamtheit der linearen DGL**

Die Lösungsgesamtheit der homogenen Gleichung

$$u'(t) = 10 u(t)$$

ist gegeben durch

$$u_h(t) = c e^{10t}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Eine partikuläre Lösung erhält man durch Variation der Konstanten. Der Ansatz

$$u_p(t) = c(t) e^{10t}$$

führt auf

$$c(t) = -2 \int_0^t e^{-10\tau} d\tau = \frac{1}{5} (e^{-10t} - 1)$$

und damit

$$u_p(t) = \frac{1}{5} (1 - e^{10t}).$$

Die Lösungsgesamtheit der homogenen DGL lautet somit

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = \hat{c} e^{10t} + \frac{1}{5}, \quad \hat{c} \in \mathbb{R}.$$

**Rücksubstitution**

Die Rücksubstitution  $y(t) = u^{-1/2}(t)$  führt auf

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\hat{c} e^{10t} + \frac{1}{5}}}, \quad t \in I.$$

für ein offenes Intervall  $I$ .

**Anfangswert**

Mit  $y(0) = 1$  bestimmt man die Konstante  $\hat{c}$  und erhält

$$\hat{c} = \frac{4}{5}.$$

**Lösung**

Die Lösung lautet

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{5} e^{10t} + \frac{1}{5}}}.$$

Wegen  $\frac{4}{5} e^{10t} + \frac{1}{5} > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$  ist  $I = \mathbb{R}$ .

**Aufgabe 4:**

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(t) = \begin{pmatrix} 2e^t \\ \frac{1}{t}e^t \end{pmatrix}.$$

**Fundamentalsystem/Wronski-Matrix**Die Eigenwerte von  $A$  sind

$$\det(A - \lambda E_2) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = 1.$$

Bestimmung der Eigenvektoren (Hauptvektoren der Stufe 1):

$$(A - E_2)v_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es gibt keinen anderen Eigenvektor  $v_2$  zu  $\lambda = 1$ , so daß die Vektoren  $\{v_1, v_2\}$  ein linear unabhängiges System im  $\mathbb{R}^2$  bilden. Deshalb Bestimmung eines Hauptvektors der Stufe 2 durch Lösung von  $(A - \lambda_1 E_2)v_2 = v_1$ , also

$$(A - E_2)v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_1 \implies v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zwei linear unabhängige Lösungen der DGL sind somit

$$\begin{aligned} Y_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Y_2(t) &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die zugehörige Wronski-Matrix lautet dann

$$W(t) = (Y_1(t), Y_2(t)) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

**Partikuläre Lösung**

Eine partikuläre Lösung des Systems erhält man durch Variation der Konstanten. Der Ansatz  $y_p(t) := W(t) c(t)$  führt zu

$$y_p(t) = W(t) \int_1^t (W(\tau))^{-1} F(\tau) d\tau.$$

Berechnung von  $c'(\tau) = (W(\tau))^{-1} F(\tau)$  als Lösung des Systems  $W(\tau) c'(\tau) = F(\tau)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} e^t & t e^t & 2 e^t \\ 0 & e^t & \frac{1}{t} e^t \end{array} \right) \longrightarrow c'(\tau) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/t \end{pmatrix}.$$

Integration liefert

$$c(t) = \int_1^t c'(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} t-1 \\ \log t \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist gegeben durch

$$y(t) = W(t) (c(t) + c), \quad c \in \mathbb{R}^2.$$

**Anfangswert**Bestimmung von  $c$  als Lösung des Systems  $W(t_0) c = y(t_0)$ :

$$\left( \begin{array}{cc|c} e & e & 0 \\ 0 & e & -e \end{array} \right) \longrightarrow c = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

**Lösung**

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$y(t) = W(t) (c(t) + c) = \begin{pmatrix} e^t & t e^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (t-1)+1 \\ \log t - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t e^t \log t \\ e^t (\log t - 1) \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe 5:**

- a) Die Iterationsvorschrift des Einzelschrittverfahrens im  $j$ -ten Schritt lautet

$$x_i^{j+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left( \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} x_k^{j+1} + \sum_{k=i+1}^3 a_{ik} x_k^j - b_i \right), \quad i = 1, 2, 3.$$

Die Matrix  $A$  erfüllt offensichtlich das starke Zeilensummenkriterium. Somit konvergiert das Einzelschrittverfahren.

Im ersten Schritt erhält man die Werte

$$\begin{aligned} x_1^1 &= -\frac{1}{4}, \\ x_2^1 &= \frac{9}{16}, \\ x_3^1 &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

also  $x^1 = (-\frac{1}{4}, \frac{9}{16}, \frac{3}{8})^T$ .

Der zweite Schritt liefert

$$\begin{aligned} x_1^2 &= -\frac{17}{32}, \\ x_2^2 &= \frac{69}{128}, \\ x_3^2 &= \frac{33}{64}. \end{aligned}$$

also  $x^2 = (-\frac{17}{32}, \frac{69}{128}, \frac{33}{64})^T$ .

- b) Die  $LR$ -Zerlegung von  $A$  lautet

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} \end{pmatrix}.$$

- c) Im ersten Schritt wird  $Ly = b$  durch Vorwärtseinsetzen gelöst, also

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{4} & 1 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{2}{7} & 1 & 1 \end{array} \right) \longrightarrow y = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{9}{4} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix}.$$

Im zweiten Schritt  $Rx = y$  durch Rückwärtseinsetzen, also

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{7}{2} & 1 & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{30}{7} & \frac{15}{7} \end{array} \right) \longrightarrow x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$



**Aufgabe 6:**

Sei  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = \frac{\pi}{2}$ .  $P(f|x_i, x_{i+1})$  bezeichne das lineare Interpolationspolynom zu  $f$  an den Stützstellen  $x_i$  und  $x_{i+1}$ .

Da  $f \in C^2(I)$ , gibt es zu jedem  $x \in I$  ein  $i \in \{0, \dots, N-1\}$  mit  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  und ein  $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$  mit

$$f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x) = (x_i - x)(x_{i+1} - x) \frac{f''(\xi_i)}{2!}.$$

Bei äquidistanter Unterteilung läßt sich der Interpolationsfehler abschätzen durch

$$|f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x)| \leq \frac{h^2}{4} \frac{\max_{\xi \in I} |f''(\xi)|}{2!}.$$

Die ersten beiden Ableitungen von  $f$  lauten

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin^2(x), \\ f''(x) &= 2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x). \end{aligned}$$

Damit folgt

$$|f(x) - P(f|x_i, x_{i+1})(x)| \leq \frac{h^2}{4} \frac{\max_{\xi \in I} |\sin(2\xi)|}{2!} = \frac{h^2}{8}.$$

Soll der Interpolationsfehler kleiner als  $\frac{1}{4}10^{-4}$  sein, also

$$\frac{h^2}{8} \leq \frac{1}{4}10^{-4},$$

so muß  $h \leq \frac{\sqrt{2}}{100}$  gewählt werden.

Mit obiger Notation ist die Anzahl der benötigten Funktionswerte gleich  $N+1$ . Der Anzahl  $N$  der Teilintervalle muß so gewählt werden, daß

$$\frac{\frac{\pi}{2}}{N} \leq h$$

gilt. Da  $N$  ganzzahlig ist, bedeutet das

$$N \geq \left\lceil \frac{\pi}{2h} \right\rceil = \left\lceil \frac{\pi \cdot 100}{2 \cdot \sqrt{2}} \right\rceil = 112.$$

Es müssen also mindestens 113 Funktionswerte in die Tabelle aufgenommen werden.