DiffNum – HowTo 2001

von klaus.ridder@post.rwth-aachen.de

bisher unvollständig. Sobald ich mit meinen Vorbereitungen für die DiffNum-VD-Prüfung WS2001 anfange, wird hier was neues kommen J

Inhalt

Vordiplomsklausur 01.08.2001

Aufgabe 1: Gedämpftes Newton-Verfahren

Gegeben: Gleichungssystem der Form

$$F = \begin{pmatrix} x(2y+1)+2=0 \\ x^2+y^2-\frac{5}{4}=0 \end{pmatrix}, z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

1.) Schreibe „suche nach Nullstellen der Funktion“

2.) Stelle Jacobi-Matrix nach immer folgendem Muster auf:

$$F' = \begin{pmatrix} df1/dx & df1/dy \\ df2/dx & df2/dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y+1 & 2x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}$$

3.) Funktionswerte berechnen, d.h. z_0 in F und F’ einsetzen. Dann Gauss F’ | F **à** δ.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow d = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.) Näherung ohne Dämpfung: $z_1 = z_0 - \delta$

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

4b.) Teste, ob der neue Vektor, eingesetzt in die Ausgangsgleichung auch kürzer ist als der alte („euklidische Norm“):

$$\text{es soll sein}: \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2 \\ .-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{4+4} < \sqrt{4+1} \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

5.) Dämpfung: Jetzt müssen wir so lange $1/2^n$ vor den δ - Vektor schreiben, bis dies gilt. Wir starten mit $1/2^1$:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{es soll sein}: \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 2 \\ .-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\tfrac{1}{4}+0} < \sqrt{4+1} \Rightarrow \text{OK.}$$

à fertig.

Aufgabe 2: Anfangswertproblem mit Ansatz

$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x, \qquad y(0) = y'(0) = 0$

1a.) Charpoly: Nur linker Teil. Die Ableitung ist Potenz der Lambda's:

$l^{2} - 2l + 2 = 0$

$l_1 = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm 1i$

1b.) Fundamentalsystem:

$\{e^{ax} \cdot \cos(bx), e^{ax} \cdot \sin(bx)\} \Rightarrow y_H = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(x)$

2.) Bestimmung einer speziellen Lösung für die Inhomogenität durch den Ansatz

$$f(x) = e^{ax} + \sum_{i=0}^{m} x^j \cdot (b_i \cdot \cos(bx) + c_j \cdot \sin(bx)) \Rightarrow$$

$$y_p(x) = e^{ax} \cdot x^k + \sum_{i=0}^{m} x^j \cdot (d_i \cdot \cos(bx) + e_j \cdot \sin(bx))$$

$a = 1, b = 0, m = 1, k = 0$

wobei k die Vielfachheit der Nullstelle „$a + bi$ ist, hier also 0.

$$\Rightarrow y_p(x) = e^{1x} \cdot x^0 \cdot \sum_{i=0}^{1} x^j \cdot (d_i \cdot \cos(bx) + e_j \cdot \sin(bx)) = e^x(d_0 + x \cdot d_1)$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x(ax+b)$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = e^x(ax+b+a)$$

$$\Rightarrow y_p''(x) = e^x(ax+b+2a)$$

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = [e^x(ax+b) = xe^x] \Rightarrow a = 1, b = 0.$$

$$\Rightarrow y_p(x) = e^x x$$

3a.) Allgemeine Lösung: $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(x) + e^x x$

3b.) Bestimmung der Konstanten nach den Anfangsbedingungen:

$$y(x) = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(x) + e^x x$$

$$y'(x) = c_1 \cdot e^x (\cos x - \sin x) + c_2 \cdot e^x \cdot (\sin x + \cos x) + e^x(x+1)$$

also eingesetzt y=y'=x=0: $\begin{array}{l} 0 = c_1 \\ 0 = c_2 + 1 \Rightarrow c_2 = -1 \end{array}$

4.) Gesamtlösung des AWP: $y(x) = -e^x \cdot \sin(x) + xe^x$

Aufgabe 2: Anfangswertproblem mit Wronski

$$y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x, \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

1a.) Charpoly: Nur linker Teil. Die Ableitung ist Potenz der Lambda’s:

$$l^{\prime 2} - 2l + 2 = 0$$

$$l_1 = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm 1i$$

1b.) Fundamentalsystem:

$$\left\{e^{ax} \cdot \cos(bx), e^{ax} \cdot \sin(bx)\right\} \Rightarrow \left\{e^{ax} \cdot \cos(bx), e^{ax} \cdot \sin(bx)\right\} y_H = c_1 \cdot e^x \cdot \cos(x) + c_2 \cdot e^x \cdot \sin(x)$$

2.) Wronski-Matrix: 1. Zeile= Fundamentalsystem, 2. Zeile = Ableitung der ersten.
y_0 ist ein Vektor mit nur Nullen, in der letzten Zeile steht der inhomogene Anteil (rechte Seite der Ausgangsgleichung).

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos x & e^x \cdot \sin x \\ e^x \cdot (\cos x - \sin x) & e^x \cdot (\sin x + \cos x) \end{pmatrix}, y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}$$

3a.) Jetzt Gauss mit W | y_0 à c’

$$W(x) = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos x & e^x \cdot \sin x \\ e^x \cdot (\cos x - \sin x) & e^x \cdot (\sin x + \cos x) \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ xe^x \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} e^x \cdot \cos x & e^x \cdot \sin x & 0 \\ e^x \cdot (\cos x - \sin x) & e^x \cdot (\sin x + \cos x) & xe^x \end{array}\right) \Rightarrow c' = \begin{pmatrix} -x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix}$$

3b.) c’ integrieren: $\int u'v = uv - \int uv'$

$$\int_0^x c' = C = \int_0^x \begin{pmatrix} -x\sin x \\ x\cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos x - \int \cos x \\ x\sin x - \int \sin x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos x - \sin x \\ x\sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}$$

4.) Berechnung des AWP:

$$y_x = W(x) \cdot C(x) = \begin{pmatrix} e^x \cdot \cos x & e^x \cdot \sin x \\ - & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x\cos x - \sin x \\ x\sin x + \cos x - 1 \end{pmatrix}$$

$$= e^x \cos x(x\cos x - \sin x) + e^x \sin x(x\sin x + \cos x - 1) =$$

$$= e^x (x\cos^2 x - \sin x\cos x + x\sin^2 x + \sin x\cos x - \sin x)$$

$$= e^x (x - \sin x).$$

Aufgabe 3: Bernoulli-DGL:

$y' = \frac{4}{x} y + 4x^3 y^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0, \quad y \geq 0, \quad y(1) = \frac{9}{16}, \quad$ z(x) > 0.

allgemein: (a ist a(x), b ist b(x))

$y' = ay + by^m \mid \cdot (1-m) \cdot y^{-m}$

$y' \cdot (1-m) \cdot y^{-m} = a \cdot (1-m) \cdot y^{1-m} + b \cdot (1-m)$

$u' = (1-m)au + (1-m)b$

Substitution:

$u := y^{1-m}$

$u' := (1-m) \cdot y^{-m} \cdot y'$

in unserem Beispiel gilt: a = 4/x, b = $4x^3$, m = ½. Also:

$u' = \frac{2}{x} u + 2x^3, u(1) = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

Lösung der homogenen Gleichung:

$u' = \frac{2}{x} u$

$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x} u$

$\int \frac{1}{u} du = \int \frac{2}{x} dx$

$\ln|u| = 2\ln|x| + \ln|C| = \ln|Cx^2|$

$u = Cx^2$

Variation der Konstanten: „u = Integral des imhomogenen Teils“

$C'(x)x^2 = 2x^3$

$C'(x) = 2x$

$C(x) = x^2 + c$

Allgemeine Lösung: in die homogene Lösung für C nun C(x) einsetzen:

$u = C(x)x^2 = (x^2 + c)x^2, \quad$ wenn u > 0

Bestimmung der Konstanten c durch Einsetzen der Anfangswerte: $u(1) = \frac{3}{4} \Rightarrow c = -\frac{1}{4}$

Existenzintervall für u>0: $u(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - \frac{1}{4}) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Resubstitution: $y(x) = u^2 = \left((x^2 - \frac{1}{4})x^2\right)^2, x > \frac{1}{2}$

Nullteil der Lösung: y(x) = 0: x von 0 bis ½.

Weiere Übung zu Wronski:

gegeben: DGL-System der Art $y' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

1.) Eigenwerte: Lösungen von $\begin{pmatrix} 2-l & -5 \\ 8 & -2-l \end{pmatrix}$ à l_1 = 0+6i, l_2 = 0-6i,

2a.) Eigenvektor 1: $\begin{pmatrix} 2-6i & -5 \\ 8 & -2-6i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à $v_1 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

2b.) Eigenvektor 2: Da wir hier einen ***komplexen*** Eigenvektor haben, ist der 2. Eigenvektor automatisch komplex konjugiert[1]: $v_2 = \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1+3i \end{pmatrix}$

3a.) Komplexes Fundamentalsystem: $\{e^{l_1 t} \cdot v_1, e^{l_2 t} \cdot v_2, ...\}$, wobei l = (a + bi)

hier also: $\{e^{6it} \cdot v_1, e^{-6it} \cdot v_2\}$, (da a=0.)

3b.) Komplexes FS nach Euler umwandeln: $\{e^{lt}\} \to \{e^{at} \cdot \cos(bt) + i \cdot e^{at} \cdot \sin(bt)\}$, hier also:

$$\left\{ [\cos(6t) + i \cdot \sin(6t)] \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

3c.) Daraus Reeles FS machen: einfach ausmultiplizieren und dann nur Realteil nehmen:

$$\left\{ \cos(6t) \cdot \begin{pmatrix} 5/2 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(6t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

3d.) Lösungsgesamtheit:
$y_H(t) = c_1 \cdot y_1(t) + c_2 \cdot y_2(t)$, hier also: $y_H = \cos(6t) \cdot c_1 + \sin(6t) \cdot c_2$

4.) AWP: Wronski: $W(t) = (y_1, y_2)$

$W(x_0) \cdot c_0 = y_0$. Anfangswertbedingung ist x_0 = **t = 0** und $y_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 5/2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot c_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \to c_0 = \begin{pmatrix} 8/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

$$\to y = y_H(t) = W(t) \cdot \begin{pmatrix} 8/5 \\ 6/5 \end{pmatrix}$$

[1] komplex konjugiert = statt a+ib einfach a-ib