

DiffNum – Howto : Klausur 18. Juli 2000

Aufgabe 1: Newton-Verfahren

Siehe auch Diskussion X, Aufgabe 2:

1.) Alles auf eine Seite bringen.

Aus den beiden gegebenen Gleichungen eine **JACOBI-Matrix** bilden:

(Term 1 nach **X** abgeleitet, Term 1 nach **Y** abgeleitet)

(Term 2 nach **X** abgeleitet, Term 2 nach **Y** abgeleitet)

2.) Gegebenen Anfangswert in Ausgangsgleichung \vec{a} Vektor

3.) Gegebenen Anfangswert in Jacobi-Matrix \vec{a} Matrix

4.) (Matrix | Vektor) nach Gauss lösen \vec{a} DeltaVektor (1/3, 1/3)

5.) Startwert-Vektor (1,1) – DeltaVektor = Näherungsvektor.

Aufgabe 2: Anfangswertproblem y'' mit Ansatz

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \cos(x)$$

1.) homogenes DGL = rechts Null setzen

2.) Charpoly aufstellen: einfach n-te Ableitung von $y = \lambda^n$ setzen. \vec{a} λ ausrechnen.

a. 2 einfache Nullstellen: $y = c_1 e^{1Ex} + e^{12Ex}$

b. mehrfache Nullstelle: $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \dots) E e^{1Ex}$

3.) Für rechte Seite ($e^x \cos x$) Ansatz raussuchen:

$aE \cos(mx) \vec{a}$ $y_p(x) = AE \cos(mx) + BE \sin(mx)$, das ableiten.

4.) Dieses y , y' und y'' nun in die inhomogene DGL einsetzen \vec{a} Koeffizientenvergleich

\vec{a} A und B. \vec{a} spezielle Lösung.

5.) Gesamtlösung $y =$ Homogene Lösung $y_H +$ Spezielle Lösung y_s

6.) C1 bestimmen durch einsetzen von $y(\dots)=\dots$, C2 bestimmen, indem man $y(x)$ ableitet und dann den Anfangswert von y' einsetzt. \vec{a} fertig.

Aufgabe 2, Weg II: DGL mit Wronski-Matrix lösen:

Gegeben: DGL der Form $y''(x) + a(x) y'(x) + b(x) y(x) = 0$ (oder inhomogener Teil)

1.) **Charpoly** aufstellen: aus y'' wird λ^2 , aus y' wird λ^1 , etc. \vec{a} λ ausrechnen.

2.) **Fundamentalsystem** aufstellen:

3.) $S = \{ e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \dots \}$. ACHTUNG: Falls λ_1 eine **2-fache Nullstelle** ist, so muß $e^{\lambda_1 x}$ nochmals vorkommen, und zwar mit x als Faktor. (3-fache Nullstelle: noch mal mit x^2 als Faktor, ...)

BEISPIEL: λ_1 doppelte Nullstelle, λ_2 einfache Nullstelle: \vec{a} $\{ e^{\lambda_1 x}, x e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x} \}$

- 4.) **Wronski-Matrix:** 1. Zeile: Fundamentalsystem, 2. Zeile: Ableitung der 1., (3. Zeile: Ableitung der 2., ...) ! immer $n \times n$ – Matrix. !
- 5.) $\mathbf{W}(\mathbf{x}_0) \times \mathbf{c}_0 = \mathbf{y}_0$ $\hat{=}$ \mathbf{c}_0 ¹ ausrechnen.²
 $\mathbf{y}_H = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \times \mathbf{c}_0$ (Allgemeine Lösung des homogenen AWP's³)
- 6.) $\mathbf{W}(\mathbf{x}) \times \mathbf{c}'(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$:⁴
- 7.) $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \text{Integral } \mathbf{c}'(\mathbf{x})$ von x_0 bis x (x bleibt x , nichts einsetzen!)
- 8.) $\mathbf{y}_s = \mathbf{W}(\mathbf{x}) \times \mathbf{C}(\mathbf{x})$: Spezielle Lösung
- 9.) $\mathbf{y} = \mathbf{y}_H + \mathbf{y}_s$ (Gesamtlösung = Homogene Lösung + spezielle Lösung)

- 10.) davon die **erste Zeile** ist unser gesuchtes y !

Aufgabe 3: Einfaches DGL $Z:=Y/X$

- 1.) $y/x=z$, nach y ableiten $\hat{=}$ substituieren, lösen, resubstituieren, C ausrechnen.

Aufgabe 3: mit Bernoulli

- 1.) Bernoulli: $\mathbf{y}' + \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{y} = \mathbf{b}(\mathbf{x}) \mathbf{y}^m$ $\hat{=}$ $\mathbf{z} = \mathbf{y}^{1-m}$ $\hat{=}$ $\mathbf{u}' + (1-m) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \mathbf{u} = (1-m) \mathbf{b}(\mathbf{x})$
- 2.) Das substituieren.
- 3.) Homogene DGL lösen. (ohne rechten Teil)
- 4.) Variation der Konstanten: Lösung von grade * rechter Teil $\hat{=}$ $C(x)$ ausrechnen und einsetzen.
- 5.) Konstante c ausrechnen.
- 6.) Resubstitution
- 7.) Existenzintervall.

Aufgabe 4: Runge-Kutta (siehe auch Aufgabe 2!)

In diesem Fall haben wir y'' und y , was nicht sein darf.

Daher ersetzen wir y'' durch u' (also $u := y'$).

Der Index k ist hier immer 0, t entspricht x . (also $t_k = x_0$).

Aus y_k machen wir den Vektor (y_0, u_0) , der beide Variablen „mitschleppt“.

Ansonsten können wir einfach die angegebenen Formeln anwenden.

Aufgabe 5: LDL^T – Zerlegung

Auflösung der Matrix nach strengem Gauss-Verfahren:

a *Zeile 1 von Zeile 2 abziehen, so dass in der 2. Zeile an 1. Stelle 0 steht. Faktor a , mit dem man Zeile 1 multipliziert hat, nun an diese Stelle schreiben, wo die 0 hinkam, und „einkreisen“.

Das so weiter: immer die obere Zeile von der unteren abziehen(!!!), und den benutzten Faktor dort hinschreiben, wo man eine 0 erzeugt hat.

¹ ACHTUNG: \mathbf{C}_0 ist ein Vektor aus c_1 und c_2 , d.h. unseren beiden Parametern !

² Dies entspricht der Aufstellung des homogenen Gleichungssystem, das ist nämlich $y = c_1 * (1. \text{ Eintrag Wronski}) + c_2 * (w. \text{ Eintrag Wronski}) + \dots$

³ Homogen = auf der rechten Seite Null

⁴ $\mathbf{W}(x) =$ Wronski-Matrix, $\mathbf{c}'(x) =$ rechnen wir grade aus, $\mathbf{F}(x) =$ Nullvektor mit Störterm (also rechte Seite inhomogenes Gleichung) in letzter Zeile.

Auf der linken Seite, unter der Hauptdiagonalen, stehen nun diese ganzen „gemerkten Faktoren“. Nehmen wir diese, setzen auf die Hauptdiagonale 1-en und rechts darüber 0-en, so haben wir die „**L-Matrix**“.

Der rechte Teil über der Hauptdiagonalen, inkl. Der Hauptdiagonalen, bildet die „**R-Matrix**“. Die Hauptdiagonale alleine (sonst überall Nullen) heißt „**D-Matrix**“.

Wenn man bei der L-Matrix Zeilen vertauscht, hat man die „ L^T -Matrix“.

Man kann das Gleichungssystem nun folgendermaßen lösen:

- 1.) $L y = b$
- 2.) $D z = y$
- 3.) $L^T x = z$

Aufgabe 5 II: LR-Zerlegung:

Schematischer Gauss-Algorithmus:

- 1.) Die **erste** Zeile so von der **zweiten** abziehen, dass am Anfang 0 steht. Den Faktor, mit dem man die **erste** Zeile multipliziert hat, fett an diese „Stelle 0“ schreiben.
- 2.) Die **erste** Zeile so von der **dritten** abziehen, dass am Anfang 0 steht. Den Faktor, mit dem man die **erste** Zeile multipliziert hat, fett an diese „Stelle 0“ schreiben.
- 3.) Die **zweite** Zeile so von der **dritten** abziehen, dass am Anfang 0 steht. Den Faktor, mit dem man die **zweite** Zeile multipliziert hat, fett an diese „Stelle 0“ schreiben.

R-Matrix = alles rechts über der Diagonalen inkl. Diagonale, sonst Nullen.

L-Matrix = alles links unter der Diagonalen, auf der Diagonalen 1-en, sonst Nullen.

DANN:

- 1.) Vorwärtseinsetzen: (L-Matrix | b) lösen
- 2.) Rückwärtseinsetzen: (R-Matrix | diese Lösung) lösen → Gesamtlösung.

Aufgabe 6 : Interpolation, Newton-Form :

Newton-Form:

Wir schreiben links untereinander, mit viel Abstand, die angegebenen „Stützstellen“. Strich. Rechts daneben schreiben wir die aus den Stützstellen ausgerechneten Funktionswerte $f(x)$.

Nun wird stufenweise interpoliert:

$$\frac{\text{Wert links drüber} - \text{Wert links drunter}}{\text{Schräg hochlaufen zur Stützstelle} - \text{Schräg runterlaufen zur Stückstelle}}$$

Für das Polynom Summieren wir nun den jeweils obersten Wert jeder Spalte (ab dem Strich): Dabei bekommen die Werte folgende Faktoren:

1. Wert: kein Faktor
2. Wert: $(x - 1. \text{ Stützstelle})$
3. Wert: $(x - 1. \text{ Stützstelle}) (x - 2. \text{ Stützstelle})$
4. Wert: $(x - 1. \text{ Stützstelle}) (x - 2. \text{ Stützstelle}) (x - 3. \text{ Stützstelle})$
- .. usw.

a) Interpolationsfehler, ohne das Polynom zu bestimmen:

QR-Zerlegung: (siehe Heft II)

Gegeben: 1 Gleichung (mit x,y sowie a,b), sowie verschiedene Werte für x und y. \Rightarrow LGS aufstellen, indem man die Wertepaare für x und y einsetzt.

\Rightarrow ergibt ein LGS mit a und b als Parameter.

Dieses LGS in Matrixform schreiben (Matrix)* $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ = Funktionswerte y.

d.h. $A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\text{Funktionswerte}) \quad | \quad A = Q \cdot R \quad (Q \text{ und } R \text{ sind angegeben})$

$\Rightarrow Q \cdot R \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (\text{Funktionswerte}) \quad | \quad \cdot Q^T \quad (\text{denn } Q \cdot Q^T = \text{Einheitsmatrix})$

$\Rightarrow R \times \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = Q^T \times (\text{Funktionswerte}) \quad | \quad \Rightarrow \text{nach } \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ auflösen. } \Rightarrow \text{fertig } J$

Trapezregel:

Anfang wie auch bei Runge-Kutta und Euler-Cauchy:

Gegeben: Differentialgleichung, z.B. dritter Ordnung:

$$y'''(x) = a(x) y''(x) + b(x) y'(x) + c(x) y(x) + d(x)$$

- 1.) Umformung in ein **System 1. Ordnung**, d.h.: Wir weisen allen y-Ableitungen ein z_i zu, nur der höchsten nicht: d.h. hier: $z_1 := y, z_2 := y', z_3 := y''$.
- 2.) z ist nun der Vektor aus z_1, z_2, z_3 . z' ist die Ableitung davon, d.h. die entsprechenden y-Ableitungen „shiften“ sich jeweils 1 weiter, d.h. hier 1.-3. Ableitung in z' (statt 0.-2. Ableitung in z).
- 3.) z' als 3-Zeilen-Vektor nach Vorschrift aufstellen.
(am Besten dann als Matrix schreiben).

Jetzt entscheiden, welches Verfahren angewendet werden soll: Runge-Kutta, Trapezregel oder Euler-Cauchy.

(bei Trapezregel und bei Rückwärtigem Euler-Cauchy muß ein Gleichungssystem gelöst werden, sonst muß nur eingesetzt werden!)

Jetzt einfach in entsprechendes Verfahren einsetzen:

$y_k = z$ -Vektor mit Startwerten,

$t_k = x_0$ (meistens Null)

Y_{k+1} ist hier z_1 , kennen wir noch nicht \Rightarrow auszurechnen (hiernach wird aufgelöst)

$f(x_0, y_0)$: x_0, y_0 in den Vektor z' einsetzen, bei $f(x_1, y_1)$ einfach z' komplett hinschreiben.

(diesen kennen wir ja noch nicht)

\Rightarrow ausrechnen, nach z_1 auflösen $\Rightarrow z_1$ ist unser Ergebnis.