1. Klausur 2013 - Lösung

Quantitative Methoden

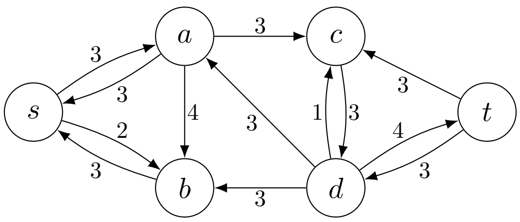
25.07.2013

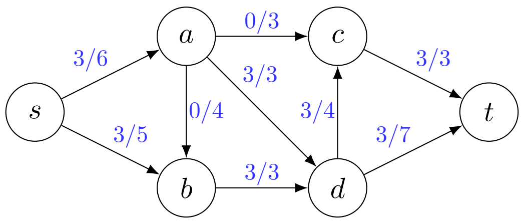
Hinweis:
Dies ist *keine* offizielle Musterlösung. Es besteht keine Garantie, dass die angegebenen Lösungen korrekt sind. Des Weiteren sind viele Erklärungen recht knapp gehalten und möglicherweise in der Klausur nicht ausreichend.

Aufgabe 1

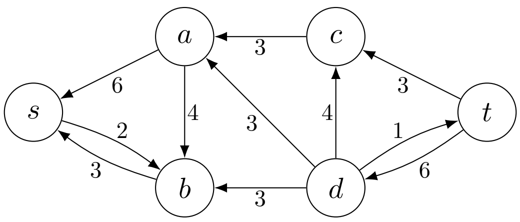
a)

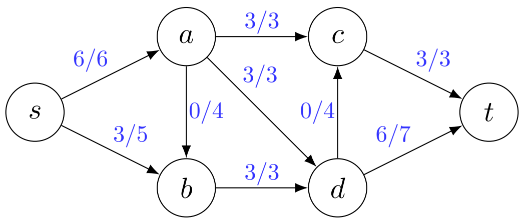
Wähle augmentierenden Pfad $(s, b), (b, d), (d, t)$ mit Engpasskapazität 3:





Wähle augmentierenden Pfad $(s, a), (a, c), (c, d), (d, t)$ mit Engpasskapazität 3:





Wir haben bereits einen maximalen Fluss mit Flusswert 9 gefunden, da es keinen s-t-Weg mehr im Residualgraphen gibt.

b)

Von s aus ist im letzten Residualgraphen nur b erreichbar, d.h. ein minimaler Schnitt wird im ursprünglichen Graphen von der Menge $X = \{s, b\}$ induziert und lautet $\delta^+ = \{(s,a),(b,d)\}$ mit $u(X) = 9$.

c)

Es wurde keine Dijkstra verwendet um die Distanzmarken zu bestimmen, da es keine Möglichkeit gibt Knoten E von A aus mit 7 Schritten zu erreichen.

Aufgabe 2

a)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 12A + 9B - 4G_A - 7K_A - 6Bu_A - 2P_A - 4G_B - 7K_B - 6Bu_B - 2P_B \\
s.t. & A = G_A + K_A + Bu_A + P_A \\
& B = G_B + K_B + Bu_B + P_B \\
& \frac{4}{10}A \leq K_A \\
& \frac{1}{10}A \geq P_A \\
& \frac{3}{10}B \leq P_B \\
& \frac{6}{10}B \leq G_B \\
& A + B \leq 300 \\
& \frac{1}{4}(A + B) \leq B \\
& A,\ B,\ G_A,\ K_A,\ Bu_A,\ P_A,\ G_B,\ K_B,\ Bu_B,\ P_B \geq 0
\end{array}
$$

Dabei steht A für die Anzahl der verkauften Backmischungen *Awesome Chocolate* in kg und B für die Anzahl der verkauften Backmischungen *Baked Sweetness* in kg. Die Variablen G_i, K_i, Bu_i und P_i stehen jeweils für die Anzahl in kg, welche von der entsprechenden Zutat in Backmischung $i \in \{A, B\}$ verwendet wurde.

b)

$$
\begin{array}{ll}
\max & 12A + 9B - 4G_A - 7K_A - 6Bu_A - 2P_A - 4G_B - 7K_B - 6Bu_B - 2P_B - 100x_n \\
s.t. & A = G_A + K_A + Bu_A + P_A \\
& B = G_B + K_B + Bu_B + P_B \\
& \frac{4}{10}A \leq K_A \\
& \frac{1}{10}A \geq P_A \\
& \frac{3}{10}B \leq P_B \\
& \frac{6}{10}B \leq G_B \\
& A + B \leq 300 + 50x_n \\
& \frac{1}{4}(A + B) \leq B \\
& A,\ B,\ G_A,\ K_A,\ Bu_A,\ P_A,\ G_B,\ K_B,\ Bu_B,\ P_B \geq 0 \\
& x_n \in \{0, 1\}
\end{array}
$$

Neu eingeführte Variable x_n:

$$
x_n := \begin{cases} 1 & \text{falls die Exportlizenz gekauft wird} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

Aufgabe 3

a)

Optimale Basislösung: $x = (1, 3, 0, 0)^T$, zugehöriger (optimaler) Zielfunktionswert: 11

2	3	0	0	0
-1	**1**	1	0	2
1	1	0	1	4

$\Longrightarrow$

5	0	-3	0	-6
-1	1	1	0	2
2	0	-1	1	2

$\Longrightarrow$

0	0	-0.5	-2.5	-11
0	1	0.5	0.5	3
1	0	-0.5	0.5	1

Tabelle 1: Simplex-Tableaus zu Aufgabe 3 a)

b)

Zulässige Basislösung: $x = (3, 0, 1)^T$, zugehöriger (nicht optimaler) Zielfunktionswert: 3

0	0	0	-M	0
1	2	0	0	0
1	1	1	0	4
-1	1	0	**-1**	-3

$\Longrightarrow$

M	-M	0	0	3M
1	2	0	0	0
1	1	1	0	4
1	-1	0	1	3

$\Longrightarrow$

0	0	0	-M	0
0	3	0	-1	-3
0	2	1	-1	1
1	-1	0	1	3

Tabelle 2: Simplex-Tableaus zu Aufgabe 3 b)

Aufgabe 4

$$
\begin{array}{lrcrcr}
min & 4y_1 & + & 5y_2 & & \\
s.t. & 3y_1 & - & y_2 & = & 2 \\
 & -2y_1 & + & 2y_2 & \geq & -3 \\
 & & & y_2 & \leq & 1 \\
 & y_1 & & & \geq & 0
\end{array}
$$

Aufgabe 5

a)

Der Fluss, welcher in den Knoten M_i hinein geht, steht für die von Maschine i verarbeiteten Produkteinheiten. Außerdem kann dem Flusswert einer Kante (M_i, M_j) entnommen werden, wie viele Produkteinheiten von Maschine i zu Maschine j geleitet werden.

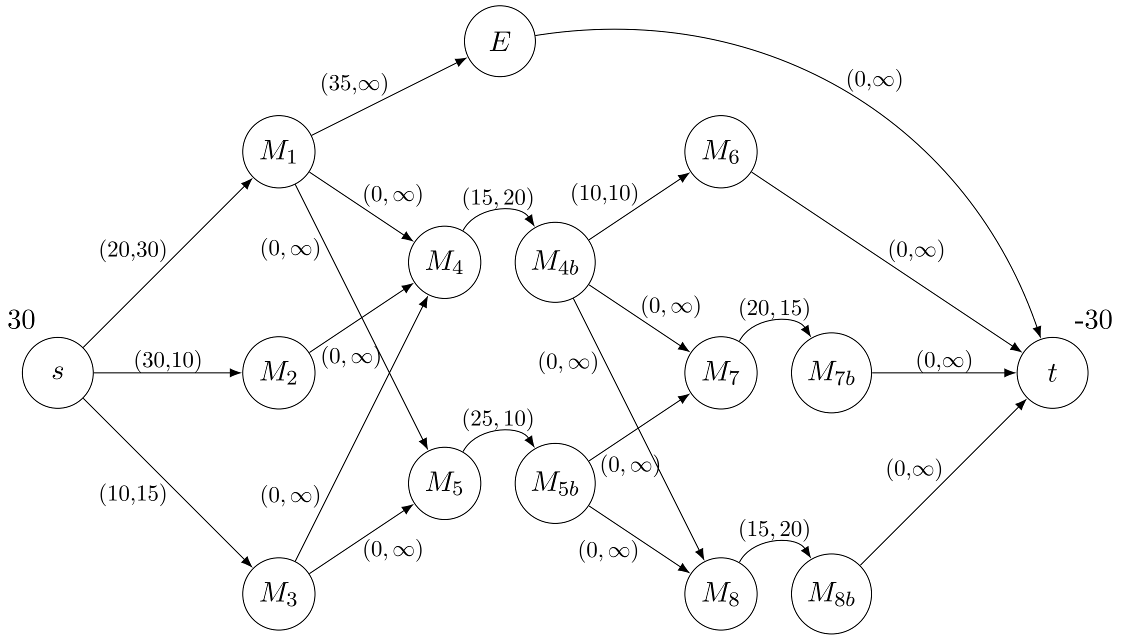


Abbildung 1: Graph zum Minimalkostenflussproblem, für Kanten gilt: (Kosten, Kapazität), die 0 für Knoten ohne Bedarf wurde weggelassen

b)

Wir nutzen das Logarithmengesetz: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$
Außerdem multiplizieren wir die Ergebnisse mit -1, um aus dem Längste-Wege-Problem eine Kürzeste-Wege-Problem zu machen. Dazu definieren wir uns die Funktion f:

$$f : x \mapsto -\log(x)$$

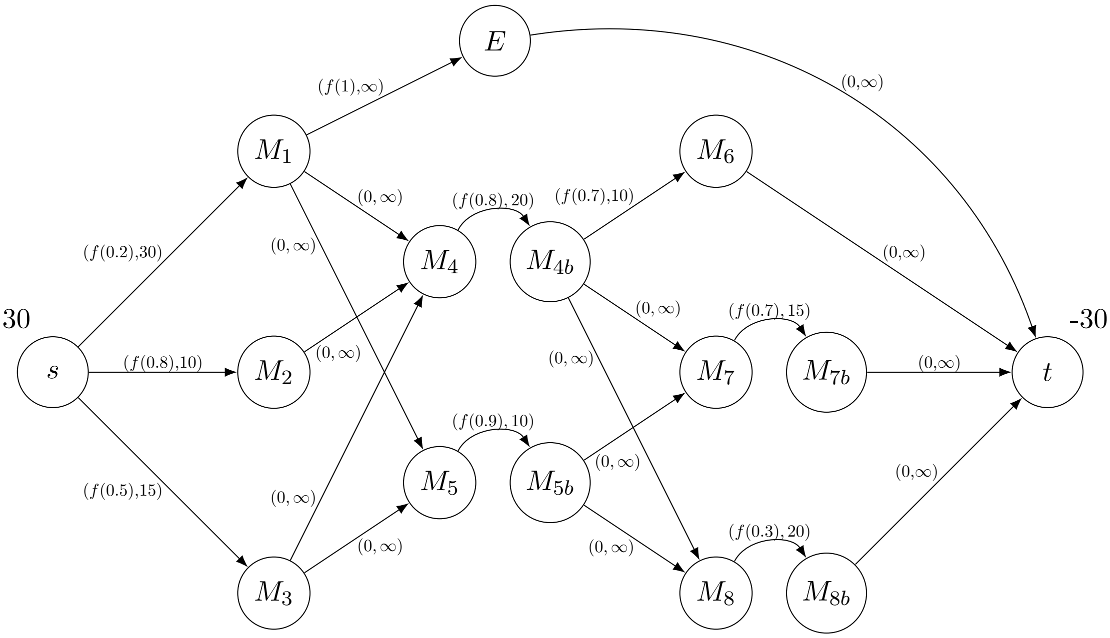


Abbildung 2: Graph mit angepassten Kanten-Kosten ($f : x \mapsto -\log(x)$)

Aufgabe 7

a)

Zunächst definieren wir:

$$M := \{1, \dots, m\}$$
$$N := \{1, \dots, n\}$$

Außerdem definieren wir die folgenden Variablen:

$$G_i := \begin{cases} 1 & \text{Polizeistation wird auf Grundstück } i \text{ gebaut} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in M$$

$$Z_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{Station } i \text{ ist für Bezirk } j \text{ zuständig} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } i \in M \text{ und } j \in N$$

Nun können wir das ganzzahlige, lineare Programm aufstellen:

$$\begin{array}{lllll}
min & \sum\limits_{i \in M} f_i \cdot G_i \; + \sum\limits_{i \in M,\ j \in N} c_{ij} \cdot Z_{ij} & & & \\
s.t. & \sum\limits_{i \in M} Z_{ij} & = & 1 & \text{für alle } j \in N \\
 & \sum\limits_{i \in N} Z_{ij} & \leq & q \cdot G_i & \text{für alle } i \in M \\
 & G_i, \quad Z_{ij} & \in & \{0,1\} & \text{für alle } i \in M,\ j \in N
\end{array}$$

b)

$$L := \{1, \dots, l\}$$

Führe neue Variable S ein:

$$S_k := \begin{cases} 1 & \text{falls Station } k \text{ in Betrieb bleibt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } k \in L$$

$$\begin{array}{llllllll}
min & \sum\limits_{i \in M} f_i \cdot G_i & + \sum\limits_{i \in M,\ j \in N} c_{ij} \cdot Z_{ij} & + \sum\limits_{k \in L,\ j \in N} d_{kj} \cdot r_{kj} \cdot S_k & + \sum\limits_{k \in L} g_k \cdot |S_k - 1| & & & \\
s.t. & & \sum\limits_{i \in M} Z_{ij} & + \sum\limits_{k \in L} r_{kj} \cdot S_k & & = & 1 & \text{für alle } j \in N \\
 & & \sum\limits_{i \in N} Z_{ij} & & & \leq & q \cdot G_i & \text{für alle } i \in M \\
 & G_i, & Z_{ij}, & S_k & & \in & \{0,1\} & \text{für alle } i \in M,\ j \in N,\ k \in L
\end{array}$$