1. Klausur 2012 - Lösung

Quantitative Methoden

07.08.2012

Hinweis:
Dies ist *keine* offizielle Musterlösung. Es besteht keine Garantie, dass die angegebenen Lösungen korrekt sind. Des Weiteren sind viele Erklärungen recht knapp gehalten und möglicherweise in der Klausur nicht ausreichend.

Aufgabe 1

	pred	A	B	D	E	C
A	-	-	-	-	-	-
B	A	1	-	-	-	-
C	E	10	9	8	7	-
D	B	∞	4	-	-	-
E	D	12	6	6	-	-

Kürzeste Wege:

- A-B: (A,B)
- A-C: (A,B),(B,D),(D,E),(E,C)
- A-D: (A,B),(B,C)
- A-E: (A,B),(B,D),(D,E)

Aufgabe 2

a)

Eine zulässige Sitzordnung existiert genau dann, wenn es einen zulässigen Fluss mit dem Flusswert $f_w = m_p + m_m + m_c + m_f$ in dem folgenden Graphen gibt.

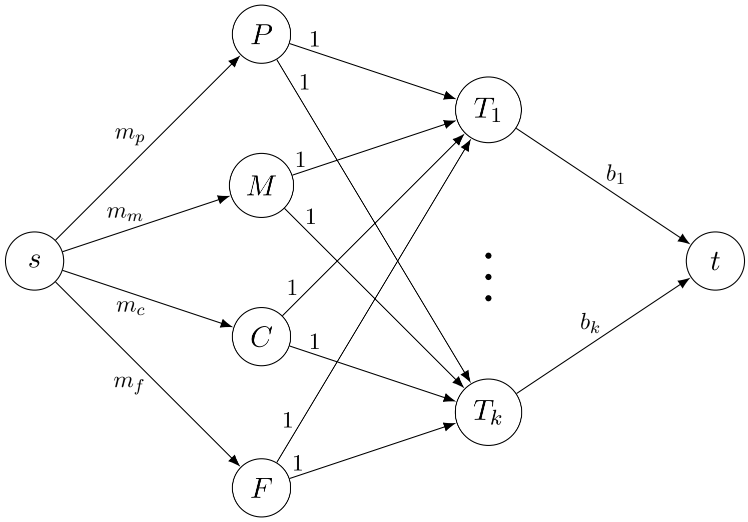


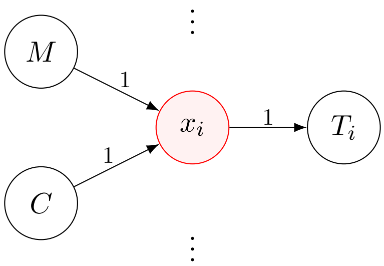
Abbildung 1: Graph zu Aufgabe 2 a)

b)

Setze die Kapazität aller Kanten von P zu einem Tisch T_i mit $i \in \{1, \dots, k\}$ auf 2.

c)

Füge vor jeden Knoten T_i einen neuen Knoten x_i ein (für alle $i \in \{1, \dots, k\}$):



Beachte, dass die Kanten, welche direkt von M bzw. C zu Tisch T_i führen, durch die obige Konstruktion *ersetzt* werden.

Aufgabe 3

Der Fluss ist *nicht* optimal, da es einen negativen Kreis $(A, D), (D, B), (B, A)$ im zugehörigen Residualgraphen gibt.

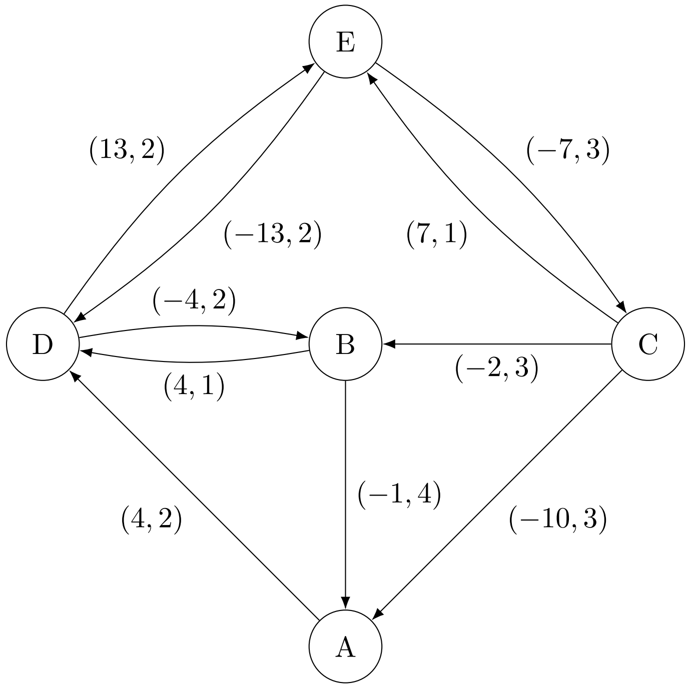


Abbildung 2: Residualgraph des gegebenen Flusses

Aufgabe 4

a)

Wir definieren die Variable

$$F_{kij} := \begin{cases} 1 & \text{Bus } k \text{ fährt von } i \text{ zu } j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{für alle } k \in K \text{ und } i,j \in S^*.$$

Dabei gilt $K := \{1, \dots, k\}$. N

$$\begin{array}{llcll}
 & min \sum_{k \in K,\ i,j \in S^*} c_{ij} \cdot F_{kij} & & & \\
(1) & \sum_{i \in S} F_{ks_0 i} & = & 1 & \text{für alle } k \in K \\
(2) & \sum_{i \in S} F_{kis_0} & = & 1 & \text{für alle } k \in K \\
(3) & \sum_{i \in S^*} F_{kij} & = & \sum_{i \in S^*} F_{kij} & \text{für alle } j \in S,\ k \in K \\
(4) & \sum_{i \in S^*,\ k \in K} F_{kij} & = & 1 & \text{für alle } j \in S \\
 & F_{kij} & \in & \{0,1\} & \text{für alle } k \in K,\ i,j \in S^*
\end{array}$$

Erläuterungen der *Bedingungen:*

- (1) und (2) sorgen dafür das jeder Bus im Depot startet und dort auch wieder seine Fahrt beendet.

- (3) sorgt dafür, dass jede Schule die angefahren wird, auch wieder verlassen wird.

- (4) beschränkt die Fahrten so, dass jede Schule genau einmal angefahren wird.

b)

c)

Aufgabe 5

a)

$$\begin{array}{|cccc|c|} \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|cccc|c|} \hline 3 & 0 & -2 & 0 & -6 \\ \hline -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{|cccc|c|} \hline 0 & 0 & -0.5 & -1.5 & -7.5 \\ \hline 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 3.5 \\ 1 & 0 & -0.5 & 0.5 & 0.5 \\ \hline \end{array}$$

Damit folgt die optimale Basislösung $x^* = (0.5, 3.5, 0, 0)^T$ und der zugehörige Zielfunktionswert 7.5.

b)

Wir setzen die gefundene Lösung in die Nebenbedingung ein:

$$2 \cdot 0.5 + 3 \cdot 3.5 = 11.5 \leq b_3$$

Mit $b_3 \geq 11.5$ folgt nun, dass die Basislösung immer noch zulässig ist. Außerdem ist die Basislösung immer noch optimal, da die Variablen durch die anderen Bedingungen bereits beschränkt sind.

Aufgabe 6

Im folgenden stehen die Variablen N_B, S_B und R_B für die im Benzin (B) enthaltenen Stoffe und die Variablen S_M und R_M für die im Maschinenöl (M) enthaltenen Rohstoffe. Die Menge an gekauftem Rohöl wird mit Ro bezeichnet.

$$\begin{array}{llcccccccccccccccc}
max & -80Ro & - & 5N_B & - & 2S_B & - & R_B & - & 2S_M & - & R_M & + & 160B & + & 50M & & \\
s.t. & Ro & = & N_B & + & S_B & + & R_B & + & S_M & + & R_M & & & & & & \\
 & & & N_B & + & S_B & + & R_B & & & & & = & B & & & & \\
 & & & & & & & & & S_M & + & R_M & & & = & M & & \\
 & \frac{1}{2}Ro & \geq & N_B & & & & & & & & & & & & & & \\
 & \frac{2}{5}Ro & \geq & & & S_B & & & & & & & & & & & & \\
 & & & N_B & & & & & & & & & \geq & \frac{3}{5}B & & & & \\
 & & & & & S_B & & & & & & & \geq & \frac{1}{5}B & & & & \\
 & & & & & & & R_B & & & & & \leq & \frac{1}{10}B & & & & \\
 & & & & & & & & & & & R_M & & & \leq & \frac{9}{10}M & & \\
 & & & & & & & & & & & & & \frac{1}{2}B & \leq & M & & \\
 & Ro & \leq & 1000 & & & & & & & & & & & & & & \\
 & Ro, & & N_B, & & S_B, & & R_B, & & S_M, & & R_M, & & B, & & M & \geq & 0
\end{array}$$

Aufgabe 7

a)

$$\begin{array}{lccccccc}
min & 3y_1 & + & 4y_2 & & & & \\
s.t. & -y_1 & + & 2y_2 & & & \leq & 1 \\
 & y_1 & + & 3y_2 & - & 3y_3 & \geq & 0 \\
 & -y_1 & & & + & 2y_3 & = & -2 \\
 & y_1 & & & & & \geq & 0 \\
 & & & & & y_3 & \leq & 0
\end{array}$$

b)

Das primale LP hat keine zulässige Lösung.

c)

Der optimale Zielfunktionswert des primalen LPs ist nach oben mit 10 beschränkt.

d)

Das primale Minimierungsproblem ist entweder nach unten unbeschränkt *oder* hat keine zulässige Lösung.