Berechenbarkeit und Komplexität, WS17/18, 1. Klausur

bei Prof. Woeginger

19.02.2018

Aufgabe 1

a) Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, B, q_0, \overline{q}, \delta)$ eine deterministische Turingmaschine. Definiere den Definitions- und Wertebereich von δ.

b) Formuliere das Problem SUBSET-SUM.

c) Definiere: Logarithmische Laufzeit eines Schritts auf einer RAM.

d) Gib ein Problem an (ohne Begründung) das entweder in EXPTIME liegt oder rekursiv aufzählbar ist (nicht beides).

e) Gegeben waren 3 Fotos von für die Vorlesung wichtigen Wissenschaftlern (wie auf den Folien). Wie heißen sie? (Turing, Hilbert, Karp)

f) Definiere coNP.

Aufgabe 2

Definiert wurde ein Entscheidungsproblem wie folgt: Gegeben ein Schachbrett $\in \{\bigcirc, \bullet\}^{m \times n}$. Können Steine so entfernt werden, dass in jeder Zeile nur $\bigcirc$ oder nur $\bullet$ verbleiben, und dass keine Spalte leer ist?

a) Dann war ein Schachbrett mit konkreter Belegung gegeben. Ist es eine Ja- oder Nein-Instanz?

b) Formuliere ein Zertifikat für das Problem (mit Angabe der Länge) und wie der Verifizierer es abarbeitet (mit Laufzeit).

c) Beweise mit Reduktion, dass das Problem NP-schwer ist.

Aufgabe 3

a) Formuliere den Satz von Rice.

b) Aus einer Liste von gegebenen Sprachen, wähle eine aus auf die der Satz von Rice anwendbar ist. (Bsp.: $L := \{\langle M \rangle \mid L(M) = H_{tot}\}$)

c) Beweise mit dem Satz von Rice, dass die gewählte Sprache unentscheidbar ist.

d) Zeige/widerlege: $L := \{\langle M_1\rangle\langle M_2\rangle \mid L(M_1) \cap L(M_2) \neq \emptyset\}$ ist rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 4

a) Gegeben folgendes LOOP-Programm (Syntax anders, wie in der Vorlesung). Was steht bei Terminierung in x_2, wenn das Programm mit $x_1 = m$, $m \in \mathbb{N}$ aufgerufen wird? Gib eine geschlossene Formel an und beweise.

```
x2 := 2
for x1 do
    x3 := 0
    for x2 do
        for x2 do
            x3 := x3 + 1
        end for
    end for
    x2 := x3
end for
```

b) Für welche $b \in \mathbb{N}$ ist $g(n) = b^{(2^n)}$ primitiv rekursiv?

c) Zeige/widerlege, dass für das LOOP-Programm aus (a) gilt: Bei Eingabe a_1, a_2, a_3 und Ausgabe b_1, b_2, b_3 gilt $b_1 + b_2 + b_3 \leq A(3, a_1 + a_2 + a_3 + 20)$. ($A(\cdot, \cdot)$ ist die Ackermann-Funktion.)