RWTH Aachen — **WS 2012/13**
Lehrgebiet Theoretische Informatik — Klausur
Reidl–Ries–Rossmanith–Sánchez–Tönnis — 22.02.2013

Klausur zur Vorlesung Berechenbarkeit und Komplexität

Gruppe A

Aufgabe 1 (2+5+5+1 Punkte)

Sind die folgenden Sprachen rekursiv oder nicht? Beweisen Sie Ihre Aussage!

a) $L_1 = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \{010, 101\} \}$

b) $L_2 = \{ \langle M \rangle \mid L(M) = \{\langle M \rangle\} \}$

c) $L_3 = \{ \langle M_1 \rangle \langle M_2 \rangle \mid \langle M_2 \rangle \in L(M_1) \}$

d) $L_4 = \{0, 1\}^*$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Es wird behauptet, daß der so skizzierte Aufzähler alle Ja-Instanzen des Postschen Korrespondenzproblems aufzählt:

$l := 0$
while($true$)
  $l := l + 1$
  for $w \in \Sigma^l$ // Σ^l *ist die Menge aller Wörter der Länge* l
    if $w = (u_1, v_1)(u_2, v_2) \cdots (u_k, v_k)$ // *Ist* w *syntaktisch korrekt?*
      for $m := 1$ **to** l
        for $(i_1, \ldots, i_m) \in \{1, \ldots, k\}^m$ // *Alle Möglichkeiten,* m *Karten hinzulegen*
          if $u_{i_1} u_{i_2} \ldots u_{i_m} = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_m}$ // *Ist das eine Lösung?*
            Gib w aus

Ist der Aufzähler wirklich korrekt oder enthält er einen Fehler?

Falls Sie glauben, daß er fehlerhaft ist, erläutern Sie, warum er nicht funktioniert. Korrigieren Sie den Fehler und geben Sie einen korrekten Aufzähler an. („Syntaktische" Fehler sind nicht gemeint.)

Aufgabe 3 (9 Punkte)

Nehmen wir an, es gibt eine Turingmaschine M die zu einem gegebenen Graphen G mit ganzzahligen Kantengewichten folgendes in polynomieller Zeit macht:

Falls es keinen Hamiltonkreis in G gibt, antwortet sie *nein*. Andernfalls gibt sie die Länge des kürzesten Hamiltonkreises zurück. Die Länge eines Kreises C ist die Summe der Gewichte der Kanten in C.

Beweisen Sie, daß aus der Existenz von M folgt, daß auch das folgende Problem in polynomieller Zeit durch eine Turingmaschine M' lösbar ist:

Falls es keinen Hamiltonkreis in G gibt, antwortet auch M' mit *nein*. Andernfalls berechnet M' einen kürzesten Hamiltonkreis und gibt die Menge seiner Kanten aus.

Aufgabe 4 (2 + 10 Punkte)

1. Geben Sie eine Polynomialzeitreduktion von VERTEXCOVER auf INDEPENDENTSET an (VERTEXCOVER $\leq_p$ INDEPENDENTSET).
2. Geben Sie eine Polynomialzeitreduktion von PARTITIONINTOCLIQUES auf eines der drei folgenden Probleme an:

   3-SAT oder K-COLORING oder HAMILTONCIRCLE.

   Hinweis: Nur eines der Probleme bietet sich für eine einfache Reduktion an.

Als Erinnerung und Hilfestellung hier noch einmal die nötigen Problemdefinitionen.

PARTITIONINTOCLIQUES
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.
Problem: Kann die Knotenmenge V in b Cliquen partitioniert werden?
Formal: $V = \bigcup_{i=1}^{b} V_i$, wobei die V_i Cliquen sind und $V_i \cap V_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

VERTEXCOVER
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.
Problem: Gibt es eine Knotenmenge $K \subseteq V$ mit $|K| \leq b$, so daß alle Kanten aus E inzident zu einem Knoten aus K sind?

INDEPENDENTSET
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$ und eine Zahl $b \in \mathbb{N}$.
Problem: Gibt es eine Knotenmenge $K \subseteq V$ mit $|K| \geq b$, so daß K eine unabhängige Menge ist?

3-SAT
Eingabe: Eine boolesche Formel φ in 3-KNF.
Problem: Gibt es eine erfüllende Belegung für φ?

K-COLORING
Eingabe: Ein Graph G, eine Zahl $k \in \mathbb{N}$.
Problem: Können die Knoten von G mit k verschiedenen Farben so gefärbt werden, daß gleichfarbige Knoten nicht durch eine Kante verbunden sind?

HAMILTONCIRCLE
Eingabe: Ein Graph $G = (V, E)$.
Problem: Gibt es einen Kreis, der jeden Knoten genau einmal besucht?

In einer *unabhängigen Menge* von Knoten sind keine Knoten durch eine Kante verbunden.
In einer *Clique* sind alle Knoten paarweise miteinander verbunden.