Lehrstuhl für Informatik 1
Prof. Dr. Berthold Vöcking
Alexander Skopalik
Matthias Englert

WS 2007/08
14.12.2007

Präsenzübung

Berechenbarkeit und Komplexität

NAME: ....

VORNAME: ....

MATRIKELNUMMER: ....

STUDIENGANG: ....

Hinweise:

- Bitte versehen Sie jedes Blatt mit Namen und Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie deutlich. Unleserliches wird nicht korrigiert und als fehlerhaft gewertet.
- Streichen Sie Konzeptrechnungen, die nicht gewertet werden sollen, durch, oder machen Sie sie andersweitig kenntlich. Bei mehreren Lösungsversuchen pro Aufgabe wird der schlechtere gewertet.
- Bitte verwenden Sie einen dokumentenechten Stift mit blauer oder schwarzer Tinte, und verwenden Sie keinen Tintenkiller oder ähnliches. Benutzen Sie ausschließlich das zur Verfügung gestellte Papier.
- Halten Sie bitte Ihren Studierendenausweis und einen Lichtbildausweis zur Kontrolle bereit.
- Bitte schalten Sie Ihre Mobiltelefone aus!
- Die Präsenzübung besteht aus 3 Aufgaben mit Unteraufgaben. Zwischen den Aufgaben ist jeweils so viel Platz zur Verfügung gestellt, wie für die Bearbeitung der Aufgabe notwendig ist. Gegebenenfalls können Sie auch noch die Rückseiten der Blätter verwenden oder zusätzliches Papier erfragen.
- Die Bearbeitungszeit beträgt 1 Stunde.

Ich versichere, die Präsenzübung selbstständig bearbeitet zu haben, und dass mir bekannt ist, dass die Präsenzübung bei einem Täuschungsversuch mit 0 Punkten bewertet wird.

....
(Unterschrift)

Aufgabe	1	2	3	Gesamt
Punkte	20	20	20	60
erreicht				

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 1. (Maschinenmodelle und Programmiersprachen):

(a) Welche Menge bezeichnet Σ^k über dem Alphabet Σ? **(1 Punkt)**

Alle Wörter der Länge k über dem Alphabet Σ

(b) Was ist eine Sprache? **(1 Punkt)**

~~[illegible]~~ Sprache L: $L \subseteq \Sigma^* \quad \left(\Sigma^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Sigma^k\right)$

(c) Was ist eine Gödelnummerierung? **(1 Punkt)**

Injektive Abb. von Menge der TM in die Menge $\{0,1\}^*$ + Präfixfrei

(d) Warum kann die Länge einer Eingabe im Allgemeinen nicht in der Zustandsmenge einer Turingmaschine gespeichert werden? **(2 Punkte)**

~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ Zu gegebenem Q kann Eingabe w gefunden werden mit „$|w| > |Q|$", da Eingabe beliebig lang (aber ENDLICH) sein kann.

(e) Wie ist die Zustandsübergangsfunktion δ einer Turingmaschine definiert? Beschreiben Sie insbesondere Definitions- und Bildbereich. **(2 Punkte)**

$\delta : (Q \setminus \{\bar{q}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L, N\}$

Es gilt $\delta(q, a) = (q', a', d)$ wobei q der aktuelle Zustand ist, a der Bandinhalt an aktueller Kopfposition, q' der neue Zustand, a' ersetzt a, Kopf bewegt sich um „1" in Richtung d.

(f) Vervollständigen Sie die folgende Beschreibung des Verhaltens der angegebenen Turingmaschine M auf nichtleeren Eingaben. Welche Funktion wird von M berechnet?

(6 Punkte)

$$M = \{\{q_0, q_1, q_2, q_3, \bar{q}\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, B, q_0, \bar{q}, \delta\}$$

δ	0	1	B
q_0	$(q_0, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_1	$(q_1, 0, R)$	$(q_1, 1, R)$	(q_2, B, L)
q_2	$(q_2, 1, L)$	$(q_3, 0, L)$	$(\bar{q}, 0, N)$
q_3	$(q_3, 0, L)$	$(q_3, 1, L)$	$(\bar{q}, B, R)$

Die Turingmaschine M durchläuft zunächst im Anfangszustand q_0 die Eingabe von links nach rechts. Sobald eine Eins gelesen wird, wechselt M in den Zustand q_1 und läuft weiter bis zum Ende des Eingabewortes. Stehen nur Nullen auf dem Band, so gibt die Turingmaschine 0 aus. Ansonsten...

...

Welche Funktion?

$$f: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*: f(\mathrm{bin}(i)) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i = 0 \\ \mathrm{bin}(i-1) & \text{falls } i > 0 \end{cases}$$

(g) Geben Sie ein WHILE-Programm an, welches x_0 mod 2 berechnet. **(7 Punkte)**

$$x_2 := x_1 + 1; \quad \backslash\backslash\; x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$$

$$\begin{array}{l}
\text{WHILE } x_0 \neq 0 \text{ DO} \\
\quad x_0 := x_0 - 1; \\
\quad \left.\begin{array}{l} x_3 := x_1 + 0; \\ x_1 := x_2 + 0; \\ x_2 := x_3 + 0; \end{array}\right\} \text{swap}(x_1, x_2) \\
\text{END} \\
x_0 := x_1 + 0;
\end{array}$$

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 2. (Berechenbarkeit und Unterprogrammtechnik):

(a) Definieren Sie die Sprache H_{all} aus der Vorlesung. **(1 Punkt)**

$H_{\text{all}} = \{$ <M> | M hält auf allen Eingaben

(b) Das 10. Hilbertsche Problem besteht darin, einen Algorithmus zur Entscheidung einer bestimmten Sprache anzugeben. Welche Sprache soll dabei entschieden werden?

(1 Punkt)

$N = \{$ p | p ist ein Polynom mit mind. einer ganzzahligen Nullstelle }

(c) Geben Sie für jede der folgenden Sprachen an, ob sie bzw. ihr Komplement rekursiv oder rekursiv aufzählbar sind. Es ist hier keine Begründung gefordert! **(5 Punkte)**

(1) D nicht rek. / nicht rek. aufz.

Komplement: nicht rek. / rek. aufz.

(2) H_ϵ nicht rek. / rek. aufz.

Komplement: nicht rek. / nicht rek. aufz.

(3) $\bar{H}$ nicht rek. / nicht rek. aufz.

Komplement: nicht rek. / rek. aufz.

(4) $\{\langle M\rangle \mid M$ hält auf ϵ nach höchstens 753 Schritten$\}$ rek. / rek. aufz.

Komplement: rek. / rek. aufz.

(5) Die dem 10. Hilbertschen Problem zugrundeliegende Sprache nicht rek. / rek. aufz.

Komplement: nicht rek. / nicht rek. aufz.

(d) Gegeben sei die Sprache $G = \{w \mid w$ ist eine binär kodierte ungerade Zahl$\}$. Beantworten Sie folgende Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.

(1) Ist G rekursiv? **(3 Punkte)**

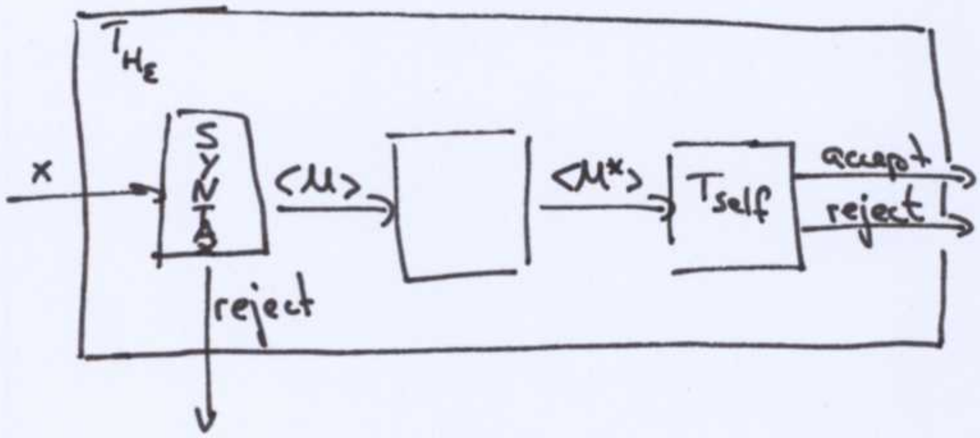
Ja! Laufe über das Wort w. Falls $w \notin \{0,1\}^* \rightarrow$ verwirf
Wenn letztes Bit = 1 -> akzeptiere, sonst verwirf.

(2) Sei $L_G = \{\langle M\rangle \mid M$ entscheidet $G\}$. Ist L_G rekursiv? **(2 Punkte)**

Nein! Es ist $\emptyset \neq L_G \neq \Sigma^*$, daher folgt mit Satz von Rice, dass L_G nicht rekursiv ist.

(Name / Matrikelnummer)

(e) Zeigen Sie durch Unterprogrammtechnik, dass die Sprache $L_{\text{self}} = \{\langle M\rangle | M \text{ hält auf } \langle M\rangle\}$ nicht rekursiv ist.
(8 Punkte)



T_{H_ε} arbeitet wie folgt:

1) Für Eingabe x, prüfe ob $x = \langle M\rangle$ für eine TM M. Wenn nicht → verwirf.
2) Aus $\langle M\rangle$, berechne $\langle M^*\rangle$ wobei M^* die TM ist die:
   - Eingabe löscht
   - M simuliert
3) Führe T_{self} auf $\langle M^*\rangle$ aus und übernehme das Akzeptanzverhalten.

Korrektheit: Sei $x = \langle M\rangle \in H_\varepsilon \Leftrightarrow M$ hält auf leerem Band
$\Leftrightarrow M^*$ hält auf allen Eingaben
$\Leftrightarrow M^*$ hält auf $\langle M^*\rangle \Leftrightarrow \langle M^*\rangle \in L_{self}$
$\Leftrightarrow T_{self}$ akzeptiert $\langle M^*\rangle \Leftrightarrow T_{H_\varepsilon}$ akzeptiert x

(Name / Matrikelnummer)

Aufgabe 3. (Rekursive Aufzählbarkeit und Reduktion):

(a) Seien L_1 und L_2 zwei Sprachen. Definieren Sie $L_1 \leq L_2$. **(2 Punkte)**

Es ex. berechenbare Fkt. f mit

$w \in L_1 \Leftrightarrow f(w) \in L_2$

(b) Zeigen Sie: Wenn L und $\bar{L}$ rekursiv aufzählbar sind, dann ist L rekursiv. **(5 Punkte)**

Seien M_L und $M_{\bar{L}}$ die TM, die L und $\bar{L}$ erkennen.

TM M: Simuliere $M_L, M_{\bar{L}}$ simultan. Akzeptiere bzw. verwirf, wenn M_L bzw. $M_{\bar{L}}$ akzeptieren.

$w \in L \Rightarrow M_L$ akzeptiert $w \Rightarrow M$ akz. w | $w \notin L \Rightarrow M_{\bar{L}}$ akt. $w \Rightarrow M$ verw. w

(c) Zeigen Sie durch Reduktion $L_{\text{self}} \leq H$, dass L_{self} rekursiv aufzählbar ist. **(5 Punkte)**

1.) Falls $w \neq \langle M \rangle$
Setze $f(w) = \varepsilon$

2.) $f(w) = ww$

Beweis: f ist berechenbar.

$w \in L_{self} \Leftrightarrow w = \langle M \rangle$, M hält auf $\langle M \rangle$

$\Leftrightarrow \langle M \rangle \langle M \rangle \in H$

(Name / Matrikelnummer)

(d) Zeigen Sie durch Reduktion $D \leq L_{\text{empty}}$, dass L_{empty} nicht rekursiv aufzählbar ist. Dabei sei L_{empty} die Sprache

$$L_{\text{empty}} = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

wobei $L(M)$ die von M erkannte Sprache bezeichnet. **(8 Punkte)**

Sei $w = w_i$ und sei M' die TM, die
- das Eingabeband löscht
- w_i auf das Band schreibt
- M_i simuliert

Setze $f(w) = \langle M' \rangle$

$w \in D \Leftrightarrow w = w_i$, M_i akz. w_i nicht $\Leftrightarrow M'$ kein einziges Wort akzeptiert $\Leftrightarrow L(M') = \emptyset$, also $\langle M \rangle \in L_{\text{empty}}$

Da D nicht rek. aufz. ist, ist L_{empty} auch nicht rek. aufz.