Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 1 **(19 Punkte)**

a) Benennen Sie die übrigen 6 Komponenten einer nicht-deterministischen Turingmaschine (TM):

(3 Punkte)

- Q, die endliche Zustandsmenge
-
-
-
-
-
-

b) Was besagt die Church-Turing-These? **(1 Punkt)**

c) Definieren Sie, wann eine Sprache L rekursiv ist. **(1 Punkt)**

d) Definieren Sie, wann eine Sprache L rekursiv aufzählbar ist. **(1 Punkt)**

Vorname	Name	Matrikelnummer

e) Was ist die Mächtigkeit (Kardinalität) der

(1) Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{a\}$? **(1 Punkt)**

(2) Menge aller Turingmaschinen? Begründen Sie ihre Antwort. **(2 Punkte)**

f) Was besagt der Satz von Rice? **(2 Punkte)**

g) Welche der folgenden Sprachen sind rekursiv und/oder rekursiv aufzählbar? (u.U. sind mehrere Kreuze pro Zeile erforderlich) **(4 Punkte)**
(Richtige Antwort: 1 Punkt, falsche Antwort: -1 Punkt, insgesamt mind. 0 Punkte)

D	☐ rekursiv	☐ rekursiv aufzählbar	☐ weder noch
$\bar{D}$	☐ rekursiv	☐ rekursiv aufzählbar	☐ weder noch
KP-E	☐ rekursiv	☐ rekursiv aufzählbar	☐ weder noch
H_{all}	☐ rekursiv	☐ rekursiv aufzählbar	☐ weder noch

h) Zeigen oder widerlegen Sie: Die Sprache $L = \{\langle M \rangle \mid M$ akzeptiert alle Gödelnummern von Turingmaschinen, die auf allen Eingaben halten, und verwirft alle anderen$\}$ ist rekursiv. **(4 Punkte)**

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Geben Sie ein LOOP-Programm an, welches die Funktion $f(x_0, x_1) = {x_0}^{x_1}$ berechnet. Skizzieren Sie dabei zunächst Ihre Idee und schreiben Sie das Programm anschließend formal korrekt auf. Benutzen Sie dabei ausschließlich Operatoren, die in der Vorlesung vorgestellt wurden. Welche Laufzeit besitzt Ihr Programm?

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Sei $A_{\text{comp}} = \{\langle M_1 \rangle \, \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = \overline{L(M_2)}\}$

Zeigen Sie mithilfe der Reduktionstechnik, dass $H \leq A_{\text{comp}}$ gilt.

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 4 (11 Punkte)

Zeigen Sie mithilfe der Unterprogrammtechnik, dass die Menge $L_{x^y} = \{\langle M \rangle \# x \# y \mid M \text{ berechnet } x^y\}$ unentscheidbar ist.

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 5 **(8 Punkte)**

a) Sei PKP$'$ die Variante des PKPs, die als Eingabe zusätzlich eine Zahl $l \in \mathbb{N}$ erhält. Die Frage lautet nun: Gibt es eine Lösung der Länge $\leq l$.

(a) Geben Sie eine genaue formale Formulierung des PKPs und der Variante PKP$'$ an. **(2 Punkte)**

(b) Zeigen Sie, dass das PKP$'$ entscheidbar ist. **(6 Punkt)**

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 6 **(20 Punkte)**

(a) Definieren Sie die Klasse PSPACE. **(1 Punkt)**

(b) In welcher Beziehung stehen NP und PSPACE zueinander und *warum*? **(2 Punkte)**

(c) Definieren Sie die Klasse EXPTIME. **(1 Punkt)**

(d) In welcher Beziehung stehen EXPTIME und PSPACE zueinander und *warum*? **(2 Punkte)**

(e) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? **(5 Punkte)**
(Richtige Antwort: 1 Punkt, falsche Antwort: -1 Punkt, insgesamt mind. 0 Punkte)

Es ist bekannt, dass $P \subsetneq$ PSPACE	☐ richtig	☐ falsch
Es ist bekannt, dass $NP \subsetneq$ EXPTIME	☐ richtig	☐ falsch
Es ist bekannt, dass $P \subsetneq$ EXPTIME	☐ richtig	☐ falsch
Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, gilt $P \cap NPC = \emptyset$.	☐ richtig	☐ falsch
Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} = \mathsf{NP}$, gilt $P \cap NPC = \emptyset$.	☐ richtig	☐ falsch

Vorname	Name	Matrikelnummer

(f) Unter der Annahme, dass $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$, welche der folgenden Probleme sind in P?
(Richtige Antwort: 1 Punkt, falsche Antwort: -1 Punkt, insgesamt mind. 0 Punkte)

(5 Punkte)

Sortieren	☐ $\in$ P	☐ $\notin$ P
DNF-SAT	☐ $\in$ P	☐ $\notin$ P
KNF-SAT	☐ $\in$ P	☐ $\notin$ P
Clique	☐ $\in$ P	☐ $\notin$ P
KP-E, wobei die Gewichte gleich den Profiten sind.	☐ $\in$ P	☐ $\notin$ P

(g) Zeigen Sie, dass die Klasse NP unter den Operationen Vereinigung und Konkatenation abgeschlossen ist, d.h. dass für alle $L, L' \in \mathrm{NP}$ auch $L \cup L' \in \mathrm{NP}$ und $L \cdot L' \in \mathrm{NP}$ gilt.

(4 Punkte)

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Das Entscheidungsproblem DoubleSAT sei wie folgt definiert:

Eingabe: Eine KNF-Formel φ

Ausgabe: Ja, gdw. φ mindestens zwei erfüllende Belegungen besitzt.

Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion SAT $\leq_p$ DoubleSAT und beweisen Sie ihre Korrektheit.

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 8 **(15 Punkte)**

a) Definieren Sie das Problem Partition. **(2 Punkt)**

Eingabe:

Ausgabe:

b) Definieren Sie die Entscheidungsvariante des Bin-Packing-Problems (BPP-E). **(2 Punkt)**

Eingabe:

Ausgabe:

c) Beschreiben Sie eine polynomielle Reduktion Partition $\leq_p$ BPP-E und beweisen Sie deren Korrektheit. **(11 Punkte)**

Vorname	Name	Matrikelnummer

Aufgabe 9 **(15 Punkte)**

a) Geben Sie die im Beweis des Satzes von Cook und Levin verwendeten Variablentypen an und beschreiben Sie kurz deren Bedeutung. **(4 Punkte)**

b) Beschreiben Sie eine KNF-Formel, die den Umstand beschreibt, dass sich der Kopf der NTM zu jedem Zeitpunkt nur an genau einer Position befinden kann. **(5 Punkte)**

c) Beschreiben Sie eine Formel (nicht notwendigerweise in KNF), die den Umstand beschreibt, dass für jeden Zustand an der aktuellen Kopfposition der korrekte Transitionsübergang realisiert wird. **(6 Punkte)**