

# Berechenbarkeit und Komplexität: NP-Vollständigkeit einiger Zahlprobleme

Prof. Dr. Berthold Vöcking  
Lehrstuhl Informatik 1  
Algorithmen und Komplexität

24. Januar 2008

## Problem (SUBSET-SUM)

*Eingabe:*  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$ ,  $b \in \mathbb{N}$

*Frage:* Gibt es  $K \subseteq \{1, \dots, N\}$  mit  $\sum_{i \in K} a_i = b$ ?

Das SUBSET-SUM-Problem ist offensichtlich in NP enthalten, weil

...

## Satz

*SUBSET-SUM ist NP-vollständig.*

## Beweis:

Um die NP-Härte des Problems nachzuweisen, beschreiben wir eine Polynomialzeitreduktion von 3SAT.

Gegeben sei eine Formel  $\phi$  in 3KNF. Diese Formel bestehe aus  $M$  Klauseln  $c_1, \dots, c_M$  über  $N$  Variablen  $x_1, \dots, x_N$ .

Für  $i \in \{1, \dots, N\}$  sei

$$S(i) = \{j \in \{1, \dots, M\} \mid \text{Klausel } c_j \text{ enthält Literal } x_i\},$$

$$S'(i) = \{j \in \{1, \dots, M\} \mid \text{Klausel } c_j \text{ enthält Literal } \bar{x}_i\}.$$

# Reduktion $3SAT \leq_p SUBSET-SUM$

Aus der Formel  $\phi$  in 3KNF erzeugen wir eine SUBSET-SUM-Eingabe:

- Wir beschreiben die Eingabe von SUBSET-SUM in Form von Dezimalzahlen, die aus  $N + M$  Ziffern bestehen.
- Die  $k$ -te Ziffer einer Zahl  $a$  bezeichnen wir dabei mit  $a(k)$ .
- Für jede boolesche Variable  $x_i$ ,  $i \in \{1, \dots, N\}$ , enthält die SUBSET-SUM-Eingabe zwei Zahlen  $a_i$  und  $a'_i$ , wobei

$$\begin{aligned} a_i(i) &= 1 \quad \text{und} \quad \forall j \in S(i) : a_i(N+j) = 1 \quad , \\ a'_i(i) &= 1 \quad \text{und} \quad \forall j \in S'(i) : a'_i(N+j) = 1 \quad . \end{aligned}$$

- Alle anderen Ziffern setzen wir auf den Wert 0.

**Beispiel:** Wie lauten die Zahlen für die Formel

$$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3 \vee \bar{x}_4)?$$

Aus der Formel  $\phi$  in 3KNF erzeugen wir eine SUBSET-SUM-Eingabe:

- Zusätzlich erzeugen wir zwei sogenannte *Füllzahlen*  $h_j$  und  $h'_j$  für jede Klausel  $j$ , die nur an Ziffernposition  $N + j$  eine 1 haben, alle anderen Ziffern sind 0.
- Außerdem definieren wir den Summenwert  $b$  folgendermaßen:  
Wir setzen  $b(k) = 1$  für  $1 \leq k \leq N$  und  $b(k) = 3$  für  $N + 1 \leq k \leq N + M$ .

# Reduktion $3SAT \leq_p \text{SUBSET-SUM}$ : *Illustration*

	1	2	3	...	$N$	$N+1$	$N+2$	...	$N+M$
$a_1$	1	0	0	...	0	1	0	...	...
$a'_1$	1	0	0	...	0	0	0	...	...
$a_2$	0	1	0	...	0	0	1	...	...
$a'_2$	0	1	0	...	0	1	0	...	...
$a_3$	0	0	1	...	0	1	1	...	...
$a'_3$	0	0	1	...	0	0	0	...	...
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_N$	0	0	0	...	1	0	0	...	...
$a'_N$	0	0	0	...	1	0	1	...	...
$h_1$	0	0	0	...	0	1	0	...	0
$h'_1$	0	0	0	...	0	1	0	...	0
$h_2$	0	0	0	...	0	0	1	...	0
$h'_2$	0	0	0	...	0	0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$h_M$	0	0	0	...	0	0	0	...	1
$h'_M$	0	0	0	...	0	0	0	...	1
$b$	1	1	1	...	1	3	3	...	3

## *Beobachtung 1:*

Die Eingabezahlen zu SUBSET-SUM können in polynomieller Zeit erzeugt werden (obwohl die Zahlenwerte exponentiell groß sind).

## *Beobachtung 2:*

Bei der Addition einer beliebigen Teilmenge der Zahlen  $a_i, a'_i, h_i, h'_i$  gibt es keinen Additionsübertrag von Ziffer zu Ziffer, weil ...

**zu zeigen:**  $\phi$  erfüllbar  $\Rightarrow \exists$  Teilsumme mit Wert  $b$

Angenommen es gibt eine erfüllende Belegung  $x^*$  für  $\phi$ .

- Dann nehmen wir diejenigen Zahlen  $a_i$  in unsere Teilmenge  $K$  auf, für die gilt  $x_i^* = 1$ , ansonsten nehmen wir  $a'_i$  auf.
- Sei  $A$  die Summe der ausgewählten Zahlen  $a_i$  und  $a'_i$ .
- Da für jedes  $i \in \{1, \dots, N\}$  entweder  $a_i$  oder  $a'_i$  aufgenommen wird, gilt  $A(i) = 1$ .
- Zudem gilt  $A(N+j) \in \{1, 2, 3\}$  für  $1 \leq j \leq M$ , weil ...
- Falls  $A(N+j) < 3$  so können wir eine oder beide der Füllzahlen  $h_j$  und  $h'_j$  verwenden um exakt den geforderten Wert 3 an Ziffernposition  $N+j$  der Summe zu erhalten.

Also gibt es eine Teilsumme mit Wert  $b$ .



# Reduktion $3SAT \leq_p SUBSET-SUM$ : Korrektheit

**zu zeigen:**  $\exists$  Teilsumme mit Wert  $b \Rightarrow \phi$  erfüllbar

Angenommen es gibt eine Teilsumme mit Wert  $b$ .

Dann enthält  $K$  für jedes  $i \in \{1, \dots, N\}$  entweder die Zahl  $a_i$  oder die Zahl  $a'_i$ , denn sonst ...

Setze  $x_i^* = 1$ , falls  $a_i \in K$ , und  $x_i^* = 0$ , falls  $a'_i \in K$ .

**zu zeigen:**  $x^*$  ist eine erfüllende Belegung für  $\phi$

- Sei  $A$  die Summe der Zahlen  $a_i$  und  $a'_i$  aus  $K$ .
- Es gilt  $A(N + j) \geq 1$  für  $1 \leq j \leq M$ , weil ...
- Dadurch ist sichergestellt, dass  $x^*$  für jede Klausel mindestens ein Literal mit Wert 1 enthält, so dass  $\phi$  erfüllt ist.

Damit ist die Korrektheit der Reduktion nachgewiesen. □

## Problem (PARTITION)

*Eingabe:*  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$

*Frage:* Gibt es  $K \subseteq \{1, \dots, N\}$  mit  $\sum_{i \in K} a_i = \sum_{i \in \{1, \dots, N\} \setminus K} a_i$ ?

PARTITION ist ein Spezialfall von SUBSET-SUM, da die gestellte Frage äquivalent zur Frage ist, ob es eine Teilmenge  $K$  mit Summenwert  $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N a_i$  gibt.

## Satz

*PARTITION ist NP-vollständig.*

## Beweis:

PARTITION ist offensichtlich  $\in$  NP, weil es ein Spezialfall von SUBSET-SUM ist.

Um zu zeigen, dass PARTITION NP-hart ist, zeigen wir  
 $\text{SUBSET-SUM} \leq_p \text{PARTITION}$ .

# Reduktion von SUBSET-SUM auf PARTITION

Die Eingabe von SUBSET-SUM sei  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{N}$  und  $b \in \mathbb{N}$ .

Es sei  $A = \sum_{i=1}^N a_i$ .

Wir bilden diese Eingabe für SUBSET-SUM auf eine Eingabe für PARTITION ab, die aus den  $N + 2$  Zahlen  $a'_1, \dots, a'_{N+2}$  bestehe.

Dazu setzen wir

- $a'_i = a_i$  für  $1 \leq i \leq N$ ,
- $a'_{N+1} = 2A - b$ , und
- $a'_{N+2} = A + b$ .

In der Summe ergeben diese  $N + 2$  Zahlen den Wert  $4A$ .

PARTITION fragt also danach, ob es eine Teilmenge der Zahlen  $a'_1, \dots, a'_{N+2}$  mit Summenwert  $2A$  gibt.

# Reduktion von SUBSET-SUM auf PARTITION

Die Reduktion ist in polynomieller Zeit berechenbar.

**zeige:**  $\exists$  Lösung für PARTITION  $\Rightarrow \exists$  Lösung für SUBSET-SUM

- Wenn es eine geeignete Aufteilung der Eingabezahlen für PARTITION gibt, so können  $a'_{N+1}$  und  $a'_{N+2}$  dabei nicht in derselben Teilmenge sein, denn  $a'_{N+1} + a'_{N+2} = 3A$ .
- Deshalb ergibt sich auch eine Lösung für SUBSET-SUM, denn diejenigen Zahlen aus  $a'_1, \dots, a'_N$ , die sich in derselben Teilmenge wie  $a'_{N+1}$  befinden, summieren sich auf zu  $2A - a'_{N+1} = b$ .

# Reduktion von SUBSET-SUM auf PARTITION

**zeige:**  $\exists$  Lösung für SUBSET-SUM  $\Rightarrow \exists$  Lösung für PARTITION

- Wenn es eine Teilmenge der Zahlen  $a_1, \dots, a_N$  mit Summenwert  $b$  gibt, so gibt es auch eine Teilmenge der Zahlen  $a'_1, \dots, a'_N$  mit diesem Summenwert.
- Wir können die Zahl  $a'_{N+1} = 2A - b$  zu dieser Teilmenge hinzufügen, und erhalten dadurch eine Teilmenge mit Summenwert  $2A$ .



Problem (Entscheidungsvariante des Rucksackproblems – KP-E)

**Eingabe:**  $B, P \in \mathbb{N}$ ,  $w_1, \dots, w_N \in \{1, \dots, B\}$ ,  $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{N}$

**Frage:** Gibt es  $K \subseteq \{1, \dots, N\}$  mit  $\sum_{i \in K} w_i \leq B$  und  $\sum_{i \in K} p_i \geq P$

Korollar

*KP-E ist NP-vollständig.*

Beweis durch einfache Reduktion von SUBSET-SUM (Wie?)

## Problem (Entscheidungsvariante von Bin Packing – BPP-E)

**Eingabe:**  $B, k \in \mathbb{N}$ ,  $w_1, \dots, w_N \in \{1, \dots, B\}$

**zulässige Lösungen:** *Gibt es eine Fkt  $f : \{1, \dots, N\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ ,*

$$\text{so dass } \forall i \in \{1, \dots, k\} : \sum_{j \in f^{-1}(i)} w_j \leq B$$

## Korollar

*BPP-E ist NP-vollständig.*

Beweis durch einfache Reduktion von PARTITION (Wie?)