Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen
Prof. Dr. W. Thomas
Dipl. Math. S. Wöhrle

22.3.2005

Berechenbarkeit und Komplexität
WS 2004/05

Vordiplomsklausur

Aufgabe 1 *6 Punkte*

Geben Sie detailliert und mit Erläuterung eine deterministische Turingmaschine an, welche die Funktion $f : \Sigma_{bool}^* - \to \Sigma_{bool}^*$ mit

$$f(w) := \begin{cases} w & \text{falls } |w| > 2 \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet. Geben Sie die Konfigurationsfolgen für die Eingabewörter 00 und 010 an.

Aufgabe 2 *3+3 Punkte*

Sei P das folgende goto$_3$-Programm.

```
1: if X3 = 0 then goto 2 else goto 5
2: if X2 = 0 then goto 6 else goto 3
3: X1 := X1 + 1
4: X2 := X2 - 1
5: if X3 = 0 then goto 1 else goto 1
6: stop
```

(X1+1, X2-1, X3)

(a) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f_P^{(1)}(7)$, $f_P^{(2)}(3,4)$ und $f_P^{(3)}(5,3,2)$.

(b) Geben Sie die Funktionen $f_P^{(1)}$, $f_P^{(2)}$ und $f_P^{(3)}$ an.

Aufgabe 3 *6 Punkte*

Sei $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ injektiv und berechenbar. Zeigen Sie, dass die Funktion $f^{-1} : \Sigma^* - \to \Sigma^*$ ebenfalls berechenbar ist. Dabei ist $f^{-1}(w) =$ dasjenige v mit $f(v) = w$, falls so ein v existiert, und $f^{-1}(w) = \perp$ sonst.

Hinweis: Sie dürfen auf die kanonische Reihenfolge der Wörter über Σ zurückgreifen.

Aufgabe 4 *6 Punkte*

Geben Sie loop-Programme an, die die Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definiert durch $f(n) := n^2 \cdot n!$ und $g(n) := 2^{n!}$, berechnen.

Hinweis: Sie dürfen in Ihren Programmen neben den elementaren Zuweisungen $Xi := Xi + 1$ bzw. $Xi := Xi - 1$ auch Zuweisungen der Form $Xi := 0$, $Xi := Xj$ und $Xi := Xj * Xk$ mit $* \in \{+, -, \cdot, \text{div}, \text{mod}\}$ benutzen.

Aufgabe 5 *2+4 Punkte*

(a) Seien $P = (Inst_P, Pos_P)$ und $Q = (Inst_Q, Pos_Q)$ Entscheidungsprobleme. Geben Sie die Definition von $P \leq Q$ an.

(b) Das Problem HP_{00} ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe:	Eine Turingmaschine M.
Frage:	Terminiert M angesetzt auf 00 mit Ausgabe 1?

Zeigen Sie $HP \leq HP_{00}$ und $HP_{00} \leq HP$.

Erinnerung: Das Halteproblem *HP* für Turingmaschinen ist das Problem: Gegeben eine Turingmaschine M, hält M angesetzt auf das leere Band?

Aufgabe 6 *6 Punkte*

Sei $h : \Sigma \to \Gamma^+$ eine Funktion, die jedem Symbol aus Σ ein nicht leeres Wort über Γ zuordnet. Sei $h^* : \Sigma^* \to \Gamma^*$ die Fortsetzung von h auf Σ^* definiert durch $h^*(a_1 \ldots a_n) := h(a_1) \ldots h(a_n)$. Sei $L \subseteq \Sigma^*$ eine Sprache in NP. Zeigen Sie, dass auch die Sprache $K := \{h^*(w) \mid w \in L\}$ in NP ist.

Aufgabe 7 *6 Punkte*

Sei $M = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, q_s, \delta)$ eine deterministische Turingmaschine, die auf jeder Eingabe terminiert und die auf Eingaben der Länge n höchstens $c \cdot n$ viele Felder des Bandes benutzt (für eine Konstante c). Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Laufzeit von M beschränkt ist durch k^n (für eine Konstante k).

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Anzahl der möglichen Konfigurationen von M abhängig von der Eingabelänge n.