Wintersemester 2005/2006
Gedächtnisprotokoll der mündlichen Prüfung

Ulrich Loup

24.03.2006

Prüfungsstoff:	Alegebra I, Analysis IV, Graphentheorie I
Prüfer:	Prof. Dr. Wilhelm Plesken
Protokollant:	Dipl. Math. Gehrt Hartjen
Dauer:	$\sim$ 35 min (mindestens 30)
Ergebnis:	Bestanden mit Note 1,0.

Notation: *P* steht für die Rede des Prüfers, *L* für die des Prüflings und Bemerkungen sind durch <u>*B*</u> gekennzeichnet. Die zentriert ausgerichteten Objekte sind in der Prüfung auf ein Blatt geschrieben worden.

<u>*B:*</u> Die Prüfung sollte zu zwei Dritteln aus Algebra und als zweit wichtigstem Fach aus Analysis IV (Funktionentheorie) bestehen.

P: Wählen Sie ein Thema, mit dem Sie anfangen möchten.

L: Galoistheorie.

<u>*B:*</u> Als Ermutigung kam: „Da haben Sie sich aber was vorgenommen.“

P: Wie sieht das bei endlichen Körpern aus?

L: Die Galoisgruppe ist zyklisch.

P: Nicht so schnell... Welche Form haben zunächst einmal die endlichen Körper?

L: Einmal als Restklassenring $\mathbb{Z}$ modulo eines...

P: Ja, aber allgemeiner. Was ist *die* Charakterisierung, die hier schlagend ist.

L: Ach so... die endlichen Körper haben alle Primpotenzordnung.

P: Ja genau! Nehmen Sie an, Sie hätten zwei Körper der Ordnung p^n, was kann man über die beiden sagen?

L: Die sind isomorph, der endliche Körper der Ordnung p^n ist nämlich eindeutig!

P: Ja richtig! Wie würden Sie das beweisen?

L: Jaaa... Zunächst einmal ist die Einheitengruppe des Körpers ja zyklisch.

P: OK, aber ... Moment, ich will Ihre Idee zuerst hören.

L: Naja, der Erzeuger der Einheitengruppe hat somit die Ordnung der Einheitengruppe, angenommen $p^n - 1$.

P: Ja, alles bis auf die Null. Und dann betrachten Sie das Minimalpolynom, richtig?

L: Ja genau, das Minimalpolynom erzeugt dann das Ideal, mit dem ich den Körper konstruiere.

P: OK, welche Form hat das Polynom denn dann?

L: Da das Element Ordnung $p^n - 1$ hat, ist die $(p^n - 1)$-te Potenz des Elements minus Eins gleich Null. Also ist das Minimalpolynom von der Form $x^{p^n-1} - 1$.

P: Richtig. Das Polynom ist natürlich im Grundkörper irreduzibel. Was ist dann jetzt der Körper der Ordnung p^n? Der ...

L: ... minimale Zerfällungskörper von $x^{p^n-1} - 1$.

P: Ja und dieser ist eindeutig, also haben wir den eindeutigen Körper dieser Ordnung konstruiert.... Was ist diese Erweiterung denn auch noch?

L: GALOISch.

P: Ja, und wie sieht die GALOISgruppe aus?

L: Die wird erzeugt von dem FROBENIUSautomorphismus.

P: Ja. Was macht der FROBENIUS?

L: Er potenziert.

P: Ja, welche Potenz?

L: Ja... wenn man den Körper $\mathbb{F}_{p^n}$ hat ist es p hoch ...

P: Sie gehen ja von einer Körpererweiterung $(\mathbb{F}_p/\mathbb{F}_{p^n})$ aus, dann geht x auf ...

L: x^{p^n}...

P: x^p. Was macht nämlich der Automorphismus?

L: Er permutiert die Wurzeln.

P: Ja. Wie viele Bahnen gibt es?

L: Eine.

P: Genau! Die Operation ist also…

L: Transitiv!

P: Ja. Also ist das die Galoisgruppe und insbesondere zyklisch, weil…

L: …nur von einem Element erzeugt.

P: …nur von einem Element erzeugt. OK, dann werden wir jetzt etwas konkreter. Wie sieht es denn mit dem Polynom

$$x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$$

aus. Ich sage ihnen, dass das irreduzibel ist. Wie konstruieren Sie den Körper $\mathbb{F}_8$?

L: Ich nehme…

P: Schreiben Sie es auf!

L: OK, der Körper sieht dann so aus:

$$F_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$$

P: Richtig. Jetzt sollen Sie die Anzahl *aller* irreduziblen Polynome vom Grad 3 über $\mathbb{F}_2$ bestimmen. Wie gehen Sie das an?

L: Hmmm… Also das Polynom hier ist ja schonmal normiert und …

P: Ja. Aber denken Sie mal an die Galoisgruppe, die wird ja vom Frobenius erzeugt. Wie sieht der aus?

L: Das ist das Potenzieren mit 3… Moment. Mit 8?

P: Nein. Das Quadrieren.

L: Achso.

P: Geben Sie eine Nullstelle in $F_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$ von $x^3 + x + 1$ an.

L: Das ist die Restklasse von x:

$$\overline{x}$$

P: Ja. Wie sieht dann die Bahn unter dem Frobenius aus?

L: Hmmm… ja. Achso, x^4 durch $x^3 + x + 1$ ist…

P: Das ist der Rest des Polynoms nur mit x multipliziert.

L: Aha! Dann ist die Bahn also:

$$\overline{x}, \overline{x^2}, \overline{x^2} + \overline{x}$$

P: Richtig, das sind also dann die Nullstellen von $x^3 + x + 1$. Wie kriegen Sie denn jetzt die anderen Polynome?

L: Keine Ahnung.

P: Was haben Sie denn noch für Elemente in $F_2[x]/\langle x^3 + x + 1\rangle$ und wie sehen die Frobenius-Bahnen aus?

L: Ja die 1…ach die bleibt ja…

P: …die bleibt fest!

L: Ich verstehe noch nicht ganz…

P: Nehmen Sie doch zum Beispiel mal:

$$\overline{x} + \overline{1}$$

L: Dann erhält man:

$$\overline{x} + \overline{1}, \overline{x^2} + \overline{1},$$

Hmmm…Restklasse von $\overline{x^4} + \overline{1}$.

P:

$$x^2 + x + 1$$

Und? Sind das jetzt alle?

L: Hmm…ja!

P: Wir haben also noch das Polynom zu dieser Bahn. Wie viele irreduzible Polynome erhalten wir also?

L: Zwei.

P: Ja.

B: Tolles Ergebnis: Man überblickt also nur durch die Kenntnis der Bahnen unter der Galoisgruppe im Erweiterungskörper alle möglichen irreduziblen Polynome des Grundkörpers!

P: So, dann gehen wir jetzt einmal zur Funktionentheorie über. Was charakterisiert die analytischen oder holomorphen Funktionen?

L: Das sind die komplex differenzierbaren Funktionen…und zwar in einer Umgebung.

P: In einer *Umgebung*, das ist wichtig. Nennen Sie mir einmal Beispiele für holomorphe Funktionen.

L: Alle Polynome, das sind *die* holomorphen Funktionen, ... Potenzreihen.

P: Ja, Potenzreihen! Man kann ja jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln. Was hat die Reihe dann für eine Eigenschaft.

L: Ja sie konvergiert auf ...

P: Das ist klar, und? Auf welcher Menge konvergiert sie, ein Rechteck, Quadrat oder was?

L: Auf einem Kreis um den Entwicklungspunkt.

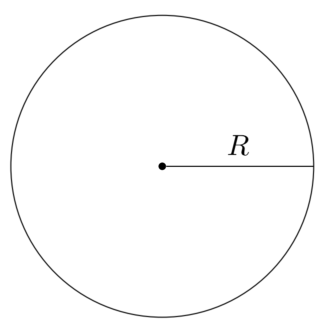
P: Ja und mit...

L: Radius...

P: Dem *Konvergenzradius*!

L: Ja!

P: So sieht die Situation dann also aus:



Es kann aber doch sein, dass die Funktion außerhalb des Kreises auch holomorph ist.

L: Ja klar, aber sie hat auf dem Rand des Kreises eine Singularität.

P: Sie kann aber holomorph fortgesetzt werden. Gut. Welche Sätze kennen Sie noch.

L: Naja, da waren so einige interessante Sätze.

P: Was ist denn zum Beispiel eine ganze Funktion?

L: Die ist auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph.

P: Genau. Was ist, wenn die Funktionswerte beschränkt sind?

L: Dann ist die Funktion schon konstant!

P: Genau! Was kann man damit beweisen?

L: Den Fundamentalsatz der Algebra.

L: Ja gut! Wir können also den Fundamentalsatz mittels der Funktionentheorie beweisen, aber auch mittels Galoistheorie. Wissen Sie wie wir das in der Algebra machen?

L: Naja, wir benutzen die komplexe Konjugation...

P: Ich meine den Beweis, in dem wir zeigen, dass ...

L: Achso, den Satz von Gauss.

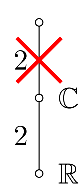
B: Jetzt waren noch etwa 2 Minuten übrig.

P: Wir können jetzt Graphentheorie machen oder den Beweis für den Fundamentalsatz in der Algebra durchgehen.

L: Von mir aus können wir gerne den Beweis machen.

P: OK.

B: Die Hauptideen waren: Der minimale Zerfällungskörper eines Polynoms aus $\mathbb{R}[x]$ ist entweder $\mathbb{R}$ im Falle, dass es ungeraden Grad hat (mit dem Zwischenwertsatz aus der Analysis) oder eine quadratische Erweiterung isomorph zu $\mathbb{C}$ mit Galoisgruppe der Ordnung 2.
Das wurde im Gespräch „zusammen erarbeitet“ beziehungsweise von Herrn Plesken erklärt.



P: Jetzt noch etwas zur Graphentheorie: Sie möchten alle Graphen mit n Ecken zählen. Wie machen Sie das?

L: Schlichte Graphen?

P: Ja.

L: Naja, man könnte vom vollständigen Graphen ausgehen.

P: Hmmm... Was ist zum Beispiel ein Graphenhomomorphismus. Was ist die Eigenschaft?

L: Der bildet adjazente Ecken auf adjazente Ecken ab.

P: Ja. Wie würden wir einen Graphen im Kontext unseres Abzählproblems denn am besten auffassen?

L: Als Relation, als Teilmenge der Produktmenge.

P: Ja, allerdings wäre es besser 2-Teilmengen der Eckenmenge, sagen wir $\underline{n}$, zu nehmen also Elemente von

$$\mathrm{Pot}_2(\underline{n}),$$

weil wir ja ungerichtete Kanten haben. Dann können wir den Graphen auch als Abbildung

$$\{0,1\} \to \mathrm{Pot}_2(\underline{n})$$

sehen... die charakteristische Funktion.

L: OK.

P: Welche Gruppe operiert darauf?

L: Hmmm...

P: Stellen Sie sich zum Beispiel den Graphen mit 4 Ecken vor.

L: Die D_8?

P: Zu wenig.

L: Dann ganz S_4, es kann ja alles passieren.

P: Ja. Was sind die Bahnen unter der S_n-Operation? Wie hilft uns das für unser Abzählproblem?

L: Wir können das Lemma von Burnside benutzen.

P: Ja. Welche Fixpunkte hat die Operation.

L: Hmmm...

P: Nehmen Sie zum Beispiel

$$(1,2,3,4)$$

aus der S_4. Was sind die Fixpunkte?

L: Alle Funktionen, die unter der Operation fest bleiben.

P: Das ist der Fall, wenn die Funktion konstant ist, also wie viele Fixpunkte?

L: Hmmm. . .

P: 2 hoch?

L: 1?

P: Ja. Wie viele Konjugiertenklassen haben wir?

L: Ähhmm. . . eine?

P: Nein, 4. Die Zykel können nämlich so

$$(1,2)(3,4)$$

oder so

$$(1,2,3)(4)$$

oder so

$$(1)(2)(3)(4)$$

aussehen. Gut, das reicht. Wir beraten uns jetzt.