31.3.2006 - Tobias Vößing

Protokoll - Anwendungsfach Mathematik

Numerische Analysis 1 und 3, Algebra 1

Die Prüfung ging über 30 Minuten, die Zeit wurde für jedes Fach nach Absprache mit den Prüfern exakt gedrittelt (jew. 10 Minuten). Prüfer waren Prof. Noelle für Numerik und Prof. Plesken für Algebra. Ich gebe den Ablauf aus dem Gedächtnis mit dadurch verbundenen Ungenauigkeiten wieder. Bei Fragen: `Tobias.Voessing@rwth-aachen.de`.
Der kleine Fisch bin ich ($\propto$), der Punkt ($\odot$) ist der jew. Prof.

Numerische Analysis 1

$\odot$ Wir hatten ganz am Anfang die Begriffe Kondition und Stabilität.

$\propto$ Kondition ist die unvermeidbare Fehlerverstärkung des Problems. Stabilität ist die Fehlerverstärkung des Algorithmus (z.B. Rundungsfehler, Auslöschungen).

$\odot$ Wann ist ein Algorithmus stabil?

$\propto$ Wenn die Fehlerverstärkung im Bereich der Kondition liegt.

$\odot$ Nehmen wir mal die Faktorisierung einer Matrix in QR. Da gibt es eine Methode, die man intuitiv dafür verwenden würde.

$\propto$ Gram-Schmidt. Das Problem ist die Instabilität des Verfahrens durch Auslöschung, wenn man zwei fast linear abhängige Vektoren orthogonalisieren will. (Ich habe ein Bild dazu gemalt.)

$\odot$ Was nimmt man stattdessen?

$\propto$ Givens Rotationen oder Householder Spiegelungen. Givens dreht den Vektor, Householder spiegelt ihn in Richtung der Achsen.

$\odot$ Was ist das Besondere daran?

$\propto$ Die Multiplikation mit einer orthogonalen Matrix Q ändert nichts an den Längen der Vektoren ($\|Qv\| = \|v\|$). Die Norm sowie die Kondition von Q sind 1. Eine bessere Kondition als 1 ist nicht zu erreichen.

$\odot$ Nennen Sie mir Anwendungsbeispiele für die QR-Zerlegung.

$\propto$ Lösung eines lin. Gleichungssystems ($Rx = Q^T b$). Lösen des linearen Ausgleichsproblems ($\|Ax-b\| = \|QAx-Qb\| = \|Rx-Qb\| \to \min$). QR-Verfahren bzw. Unterraumiteration.

$\odot$ Was ist die Idee des QR-Verfahrens?

$\propto$ Hier habe ich die Stichpunkte *Schur-Faktorisierung* ($Q^T AQ = R$) und *Unterraumiteration* ($< q_1^k, \dots, q_j^k > \to < v^1, \dots, v^j >$) gebracht. Dann habe ich kurz skizziert, warum die Matrix $Q_k^T AQ_k$ gegen R konvergiert. Den Grund für die Konvergenz der Teilräume wollte Prof. Noelle noch genauer wissen.

Numerische Analysis 3

⊙ Stichwort Mehrschrittverfahren. Erzählen Sie was dazu!

∝ Wir haben in der Vorlesung die Klasse der linearen Mehrschrittverfahren behandelt. (Allgemeine Formel für k-Schrittverfahren aufgeschrieben und explizit/implizit erklärt.)

⊙ Wann konvergiert ein LMSV?

∝ Wenn das Verfahren konsistent und stabil (= nullstabil) ist.

⊙ Wann ist es denn stabil?

∝ Hier konnte ich mich ausgiebig über Nullstabilität auslassen. Ich habe mit homogenen linearen Differenzengleichungen angefangen, dann das char. Polynom der Testgleichung $y' = 0$ hergeleitet und beschrieben, warum das Wurzelkriterium notwendig für die Beschränktheit der Lösung ist. Prof. Noelle wollte dann noch allgemeiner wissen, wie bzw. warum die parasitären Lösungen zu Instabilitäten führen.

⊙ Erzählen Sie mir was über steife Systeme und deren Lösung durch Einschrittverfahren.

∝ Hier folgte eine Ausführung über steife Systeme: Dalquist'sche Testgleichung $y' = \lambda y,\ \operatorname{Re}\lambda < 1$, $y(0) = 1$ hat kontinuierliche Lösung $y(t) = \exp(\lambda t)$ und es ergibt sich Rekursion $y(t_{j+1}) = \exp(h\lambda)y(t_j)$. Rekursion hat man auch bei ESV $y^{j+1} = g(h\lambda)y^j$ (hab ich für expl. Euler noch hergeleitet). Jetzt hab ich erklärt warum $|g(x)| \leq 1$ gelten muss, für explizite Verfahren das Stabilitätsintervall stark eingeschränkt ist (g ist abbrechendes Taylorpolynom und oszilliert) und warum implizite Verfahren geeignet sind ($g(x)$ ist gebrochen rationale Funktion).

Algebra 1

Dieser Teil der Prüfung war der unangenehmere, da ich auf Algebra nicht so gut vorbereitet war. Ich fasse nur kurz die Fragen zusammen, sofern ich mich erinnern kann.

⊙ Was sind zyklische Gruppen. Nennen Sie Beispiele. (Gruppen, die von einem Element erzeugt werden. $\mathbb{Z}$ ist unendliche zyklische Gruppe, Untergruppen der symmetrischen Gruppe mit einer bij. Abb. als Erzeuger. Das Paradebeispiel wären Galoisgruppen gewesen, kam aber später noch.)

⊙ Wenn Sie $\mathbb{Z}$ ansprechen, wie bekommt man aus $\mathbb{Z}$ alle endlichen zyklischen Gruppen? ($\mathbb{Z}/N$, N Normalteiler.)

⊙ Endliche Körper, welche gibt es, wieviele gibt es? (Zu jedem p gibt es Körper der Ordnung p^n. Alle endl. Körper derselben Ordnung sind isomorph.)

⊙ Wie konstruiert man solche Körper? ($\mathbb{Z}_p[x]/(p(x))$, $(p(x))$ maximales Ideal, irreduzibles Polynom, ...)

Der letzte Abschnitt liegt nur noch sehr unstrukturiert in meinem Kopf vor. Stichworte waren hier Erweiterungskörper, Wurzelkörper, minimaler Zerfällungskörper, Galoisgruppe, Untergruppen der Galoisgruppe, Fixkörper, Charakteristiken, Bijektion zwischen Untergruppen der Galoisgruppe und Zwischenkörper (Hauptsatz der Galoistheorie). Zuletzt wurde ich gefragt, wofür man endliche Körper in der Informatik verwendet (diskretes Logarithmusproblem, Kryptographie, Codierungstheorie, ...).

Fazit: 30 Minuten sind ruck zuck vorbei. Wenn man einen Überblick über den Stoff hat kommt man gut durch. Für Beweise ist nur selten Zeit und werden auch nicht oft verlangt. Sowohl Prof. Noelle als auch Prof. Plesken sind faire Prüfer.