I. Beweis-Teil (20 Punkte)

1. Beweise per Induktion, dass $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} * \frac{1}{k}$ gilt für alle natürlichen Zahlen (6 Punkte)

2. $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{2-|\cos(x)|}{x+3}$ (2+3+4 = 9 Punkte)
   a) Beweise $f(x) > 0$
   b) Beweise $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$
   Zeige dazu: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $M > 0$, sodass $f(x) < \varepsilon$ für $x > M$
   c) Zeige dass f kein globales Minimum, aber ein globales Maximum hat. Dieses muss nicht explizit bestimmt werden.

3. Löse das Anfangswertproblem mit: $y' = e^y * \sin(x), y(\frac{\pi}{2}) = 0$ (unsicher ob der Anfangswert korrekt ist) (5 Punkte)

II. Rechenaufgaben (20 Punkte)

1. Berechne die folgenden Integrale (2 + 2 = 4 Punkte)
   a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(x))^3 * \cos(x)\, dx$ (2 Punkte)
   b) $\int_1^e x^2 * \ln(x)\, dx$ (2 Punkte)

2. Bestimme den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{3k^2+1} * x^k$ (nicht sicher ob das die richtige Reihe ist, hat aber zumindest denselben Konvergenzradius...) (2 Punkte)

3. (2 + 2 = 4 Punkte)
   a) genaue Folge vergessen, aber exakt dasselbe Schema wie b)
   b) Bestimme $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{\sqrt{n^6+n^5}-n^3}{3n^2-1}$

4. Sei $f(x) = \{ {\sin(x),\ x\le 0 \atop x^2+px+q,\ x>0}$
Dann bestimme p, q sodass f(x) auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist (2 Punkte)

5. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2 + 2 = 4 Punkte)
   a) Bestimme den Radius r und Winkel α für $z = r(\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))$
   b) berechne $Re(z^{123})$ und $Im(z^{123})$

6. $f(x, y) = \frac{?}{x^2+y^2}$, berechne den Gradienten $\nabla f(0, 0)$ (? war ein Polynom vierten Grades über x und y) (2 Punkte)

7. Berechne $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(3x)-1}{x^2}$ (2 Punkte)

III. Wahr/falsch Aussagen (10 Punkte)

a) $|f(x)| \le |x|$ für $x \in (-1, 1)$, ist f stetig in $x_0 = 0$? (3 Punkte)

b) Sei eine Potenzreihe $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k * x^k$ mit einer Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$, die konvergiert für $x \in (-r, r)$. Konvergiert P(x) auch für $x \in [-r, r]$? (3 Punkte)

c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-konvergente Folgen. Ist dann auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-konvergent? (2 Punkte)

d) Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ streng monoton, ist f dann auch unbeschränkt? (2 Punkte)