Analysis für Informatiker − Wiederholungsklausur WS 18/19

Insgesamt sind 94 Punkte erreichbar, die Bestehensgrenze liegt bei 31 Punkten.

Aufgabe 1 - Vollständige Induktion (3,5+3,5 Punkte)

a) Zeige: $\forall\, n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

b) Zeige mittels vollständiger Induktion: $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{i}} > \sqrt{n}$

Hinweise: 1) Die Teilaufgabe a) muss nicht mittels vollständiger Induktion gelöst werden, dies ist auch nicht empfehlenswert.
2) Zur Bearbeitung der Teilaufgabe b) darf die Teilaufgabe a) genutzt werden, auch wenn diese nicht bearbeitet wurde.

Aufgabe 2 - Folgenkonvergenz (4+4 Punkte)

Überprüfe die folgenden beiden Folgen auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

a) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $a_n := \dfrac{3^n + 4^n}{3^n - 2 \cdot 4^n}$

b) $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definiert durch $b_n := \arctan\left(\dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right)$

Aufgabe 3 - Reihenkonvergenz (6+4 Punkte)

a) Zeige: Die folgende Reihe konvergiert für $|x| \geq \frac{1}{2}$ und konvergiert absolut für $|x| < \frac{1}{2}$.

$$\sum_{i=0}^{\infty} (n+1) 2^n \cdot x^n$$

b) Bestimme alle $x > 0$, sodass die folgende Reihe absolut konvergiert:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n$$

Aufgabe 4 - Stetigkeit und Differenzierbarkeit (4+5 Punkte)

a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimme alle a, b, sodass die folgende Funktion f stetig ist.
b) Bestimme alle a, b, sodass f differenzierbar ist.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} e^{ax} & x < 0 \\ x + b & x \geq 0 \end{cases}$$

Aufgabe 5 - Lokale Extrema (2+4+7 Punkte)

a) Zeige: Die folgende Funktion f ist wohldefiniert und differenzierbar.
b) Bestimme alle Nullstellen von f '.
c) Bei welchen $x \in (0, 2\pi)$ liegen lokale Extrema von f vor? Klassifiziere diese Extrema.
Hinweis: Es ist empfehlenswert, die Teilaufgabe c) ohne Nutzung der zweiten Ableitung von f zu bearbeiten.

$$f : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}, f(x) := \ln(2 + \sin(x)) - \sin(x)$$

Aufgabe 6 - Mittelwertsatz (5 Punkte)

Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar mit beschränkter Ableitung. Zeige: Es existiert ein $L \in \mathbb{R}$,

sodass:
$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \ \forall\, x, y \in [a, b]$

Aufgabe 7 - Integrale ((3+3)+8 Punkte)

a) Untersuche die folgenden beiden uneigentlichen Integrale auf Existenz:

(i) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$ (ii) $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^{\frac{5}{2}}}\, \mathrm{d}x$

b) Begründe, dass die folgende Funktion f eine Stammfunktion besitzt und berechne diese.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := x^3 \cdot e^{x^2}$

Aufgabe 8 - Implizite Funktionen (6 Punkte)

Betrachte die Funktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}, f\left((x, y)^{tr}\right) := \ln(x) + x + \ln(y) + y - 2$. Definiere $x_0 := 1$ und $y_0 := 1$.
Zeige: Es existieren eine Umgebung U von x_0, sowie eine Umgebung V von y_0, sowie eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \to V$, sodass
$\forall\, (x, y)^{tr} \in U \times V : \left(g\left((x, y)^{tr}\right) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)\right)$.
Berechne weiterhin g'(1).

Aufgabe 9 - Differentialgleichungen (4+3 Punkte)

Löse die folgenden beiden Differentialgleichungen:
a) $y' = e^{x+y}, y(1) = 0$
b) $y' = y + e^x, y(0) = 1$

Aufgabe 10 - Stetige Funktion (3+4 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit der Eigenschaft $f(x) = f(2x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
a) Zeige: Es gilt $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
b) Folgere: f ist konstant.

Aufgabe 11 - Grenzwerte (6+2 Punkte)

a) Zeige: $\forall x \in \mathbb{R}: \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1, (n \in \mathbb{N})$.

b) Es darf nun ohne Beweis verwendet werden, dass der Grenzwert $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, (n \in \mathbb{N})\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ existiert.

Folglich ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ wohldefiniert. Zeige mithilfe von Teilaufgabe a):
$f(x) \cdot f(-x) = 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Für Teilaufgabe a) können das Sandwich-Lemma und die Bernoulli-Ungleichung hilfreich sein.

Mögliche Lösungen

Die Lösungen sind natürlich nicht als Musterlösungen zu verstehen...

Aufgabe 1

a) Es gilt

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \sqrt{n+1} < \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \Leftrightarrow n+1 < \sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \Leftrightarrow n < \sqrt{n}\sqrt{n+1} \Leftrightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1},$$

wobei in der letzten Äquivalenz genutzt wurde, dass $\sqrt{n} > 0\ \forall\, n \in \mathbb{N}$. Wegen der Monotonie der Wurzelfunktion ist die letzte
Aussage dabei wahr $\forall\, n \in \mathbb{N}$ und die zu zeigende Behauptung folgt.

Alternative Lösung: Quadriere beide Terme und forme geeignet um.

b) (IA) Sei n=2. Dann gilt $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$ gemäß Aufgabenteil a).

(IV) Es gelte die zu zeigende Aussage für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Es gilt $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \sqrt{n} > \sqrt{n+1}$, wobei in der ersten Abschätzung die IV und
in der zweiten Abschätzung das Resultat aus Aufgabenteil a) genutzt wurde. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt
die zu zeigende Aussage.

Aufgabe 2

a) Zunächst gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2}$. Wegen $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$ ist dabei $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge (Resultat aus der VL).

Eine Anwendung der Grenzwertsätze liefert daher $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n + 1\right) = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n - 2\right) = -2 \neq 0.$

Folglich können die Grenzwertsätze erneut angewendet werden und es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$. Insbesondere ist die Folge konvergent.

b) Zunächst gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : \frac{1+n^2}{1-n^2} = \frac{\left(\frac{1}{n^2}\right) + 1}{\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1}$, mithilfe der Grenzwertsätze ergibt sich also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{1-n^2} = -1.$$

Mit der Stetigkeit des arctan ergibt sich schließlich: $\lim_{n\to\infty} b_n = \arctan\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1+n^2}{1-n^2}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

Insbesondere ist die Folge konvergent.

Aufgabe 3

a) Zunächst ist die Reihe für x=0 offensichtlich absolut konvergent. Sei nun $0 < |x| < \frac{1}{2}$, so gilt

$(n+1)2^n \cdot x^n \neq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$,
folglich ist das Quotientenkriterium anwendbar. Dabei ergibt sich mithilfe der Grenzwertsätze:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)2^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+1)2^n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)}|2x| = |2x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)}{(n+1)} = |2x|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)} = |2x| < 1.$$

Somit folgt absolute Konvergenz für $0 \leq |x| < \frac{1}{2}$, sei nun also $|x| \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt allerdings:
$|(n+1)2^n \cdot x^n| = (n+1)|(2x)^n| \geq n+1 \geq 1 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist $\left((n+1)2^n \cdot x^n\right) n \in \mathbb{N}_0$ keine Nullfolge, dies ist jedoch ein notwendiges Kriterium für Reihenkonvergenz. Somit folgt die Divergenz der Reihe.

Alternative Lösung: Mithilfe des Quotientenkriteriums kann auch direkt die Divergenz der Reihe für $|x| > \frac{1}{2}$ geforgert werden, der Fall $x = \frac{1}{2}$ muss dann aber noch immer getrennt betrachtet werden.

b) Wegen $x > 1$ gilt $\frac{1}{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n \neq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$, folglich ist das Quotientenkriterium anwendbar. Dabei ergibt sich mithilfe der Grenzwertsätze:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)2^{n+1}\cdot x^{n+1}}{(n+2)2^n\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)}2x = 2x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{(n+2)} = 2x\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 2x < 1 \text{ für}$$

$0 < x < \frac{1}{2}$.

In diesem Fall liefert das Quotientenkriterium also absolute Konvergenz. Sei nun $x \geq \frac{1}{2}$. Dann gilt:

$\left|\frac{1}{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n\right| = \frac{1}{n+1} \cdot 2^n \cdot x^n \geq \frac{1}{n+1} \geq 0 \;\forall\, n \in \mathbb{N}_0$. Da $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ gemäß VL divergent ist (harmonische Reihe),
folgt nach Minorantenkriterium auch die Divergenz der zu untersuchenden Reihe.

Alternative Lösung: Mithilfe des Quotientenkriteriums kann auch direkt die Divergenz der Reihe für $|x| > \frac{1}{2}$ geforgert werden, der Fall $x = \frac{1}{2}$ muss dann aber noch immer getrennt betrachtet werden.

Aufgabe 4

a) Sei zunächst $x \neq 0$. Als Komposition stetiger Funktionen (Exponentialfunktion für $x < 0$, Polynom für $x \geq 0$) ist f dann stetig.
Zu untersuchen ist daher nur die Stetigkeit in $x = 0$, dabei gilt (f stetig in 0) $\Leftrightarrow \left(\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} f(x)\right)$. Dabei gilt zunächst wegen der Stetigkeit
der Exponentialfunktion: $\lim_{x\uparrow 0} f(x) = \lim_{x\uparrow 0} e^{ax} = e^{\lim_{x\uparrow 0} ax} = e^0 = 1$. Mit der Stetigkeit von Polynomen folgt weiterhin
$\lim_{x\downarrow 0} f(x) = \lim_{x\downarrow 0} x + b =$
$\left(\lim_{x\downarrow 0} x\right) + b = b$. Wegen der obigen Äquivalenz ist also f stetig genau dann, wenn $b = 1, a \in \mathbb{R}$ beliebig.
b) Da Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert, ist f nach Teilaufgabe a) nicht differenzierbar für $b \neq 1$. Sei also nun $b = 1$.
Sei nun $x \neq 0$. Dann ist f differenzierbar als Komposition differenzierbarer Funktionen. (Exponentialfunktion für $x < 0$, Polynom für $x \geq 0$)

Zu betrachten bleibt also der Fall $x = 0$. Dabei gilt (f differenzierbar in 0) $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$ existiert

$\Leftrightarrow \left(\lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right)$.

Dabei gilt $\lim_{x\downarrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\downarrow 0}\frac{(x+1)-1}{x} = 1$. Weiterhin gilt wegen der Differenzierbarkeit der Exponentialfunktion:

$\lim_{x\uparrow 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{e^{ax}-1}{x} = \left(\frac{d}{dx}e^{ax}\right)(0) = a\cdot e^{a\cdot 0} = a$. Mit der obigen Äquivalenz ist f also genau dann differenzierbar wenn $a = b = 1$.

Aufgabe 5

a) Wegen $\sin(x) \in [-1, 1]\ \forall x \in \mathbb{R}$ gilt $(\sin(x)+2) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, somit ist $\ln(\sin(x)+2)$ und damit auch f auf ganz $\mathbb{R}$, also auch auf $(0, 2\pi)$
wohldefiniert. Als Komposition und Summe differenzierbarer Funktionen (Sinus, ln, Polynom) ist dabei auch f differenzierbar.

b) Unter Anwendung der Kettenregel ergibt sich: $f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2} - \cos(x)$. Folglich gilt: f

$'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2} = \cos(x)$

$\Leftrightarrow ((\sin(x)+2) = 1) \vee (\cos(x) = 0) \Leftrightarrow \left(x \in \left\{\frac{3}{2}\pi\right\}\right) \vee \left(x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$.

c) Als mögliche lokale Extremstellen von f kommen nur die in b) bestimmten Nullstellen von f' in Betracht. Untersuche das Monotonieverhalten von f. Sei $x \in (0,2\pi) \setminus \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$. Es gilt:

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{\cos(x)}{\sin(x+2)} > \cos(x)$. (*) Da $x \notin \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$ folgt $\sin(x+2) > 1$ und somit

$(*) \Leftrightarrow \cos(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$. Wegen $\frac{\cos(x)}{\sin(x+2)} = \cos(x) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right\}$ folgt also schließlich mit der Stetigkeit von f:

f streng monoton wachsend im Intervall $\left(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$ und f streng monoton fallend in den Intervallen $\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$ und $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$.

Sei nun also $x_1 = \frac{\pi}{2}, \delta = \frac{\pi}{2}$, so gilt für alle $x \in U_\delta(x_1) \cap (x_1, \infty)$: $f'(x) > 0$ und für alle $x \in U_\delta(x_1) \cap (-\infty, x_1)$: $f'(x) < 0$. Analog für $x_2 = \frac{3}{2}\pi, \delta = \frac{\pi}{2}$: Für alle $x \in U_\delta(x_2) \cap (x_2, \infty)$: $f'(x) < 0$ und für alle $x \in U_\delta(x_2) \cap (-\infty, x_2)$: $f'(x) > 0$. Somit besitzt f ein lokales Minimum in x_1 und ein lokales Maximum in x_2.

Alternative Lösung: f ist stetig. Daher kann man geeignete Punkte $x_3, x_4, x_5 \in (0, 2\pi)$ mit $x_3 < \frac{\pi}{2} < x_4 < \frac{3\pi}{2} < x_5$ betrachten sodass $f(x_3) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) > f(x_4) > f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) > f(x_5)$ und daraus die zu zeigende Aussage folgern.

Aufgabe 6

Nach Vorraussetzung ist f stetig auf $[a, b]$ und differnzierbar auf (a, b). Somit ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwendbar und zu $x, y \in [a, b], x < y$ existiert ein $\zeta \in (x, y)$, sodass

$$f'(\zeta)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Folglich gilt auch $\left|f'(\zeta)\right|=\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \Leftrightarrow \left|f(x)-f(y)\right|=\left|f'(\zeta)\right|\cdot|x-y|$

Da nach Vorraussetzung f' beschränkt ist, existiert ein $L\in\mathbb{R}$, sodass $\left|f'(x)\right|\le L\ \forall\, x\in(a,b)$. Damit ist insbesondere auch $\left|f'(\zeta)\right|\le L$ und es folgt $\left|f(x)-f(y)\right|=L|x-y|\ \forall\, x,y\in[a,b]$.

Aufgabe 7

a) Die Fuktionen $f,g,h:(1,\infty)\to\mathbb{R}, f(x):=\frac{1}{x^2}, g(x):=\frac{1}{x^2+1}, h(x):=\frac{1}{x^{\frac{5}{2}}+1}$ sind alle stetig. Betrachte zunächst das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$. Es gilt $\lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^b=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1<\infty$.

Somit existiert dieses uneigentliche Integral. Weiterhin gilt

$\forall\, x>1: 0\le \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}+1}\le\frac{1}{x^2+1}\le\frac{1}{x^2}$. Somit existieren die Integrale $\int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}\,dx$ und $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}+1}\,dx$ jeweils nach Vergleichskriterium.

Alternative Lösung: Aus der Vorlesung ist bekannt, dass arctan eine Stammfunktion vom Integranden in (i) ist. Wegen $\lim_{b\to\infty}\arctan(b)=\frac{\pi}{2}$ kann damit das erste Integral auch berechnet werden.

b) Die Funktion f ist stetig als Komposition und Produkt stetiger Funktionen (Polynom, Exponentialfunktion) und besitzt somit eine Stammfunktion.

Definiere die Funktionen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x):=x^2$ stetig differenzierbar mit $g'(x)=2x$ und $g(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{R}$, sowie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, h(x):=xe^x$ stetig. Mit der Substitutionsregel gilt für $u:=x^2$: $\int x^3e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int(2x)x^2e^{x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int ue^u\,du$. Definiere nun $i,j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, i(x):=x, j(x):=e^x$ jeweils stetig differenzierbar mit $i'(x)=1, j'(x)=e^x$. Mittels partieller Integration folgt nun: $\frac{1}{2}\int ue^u\,du=\frac{1}{2}\left(ue^u-\int e^u\,du\right)=\frac{1}{2}\left((u-1)e^u\right)=\frac{1}{2}\left((x^2-1)e^{x^2}\right)$, wobei im letzten Schritt die Rücksubstitution durchgeführt wurde. Als eine Stammfunktion ergibt sich also $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x):=\frac{1}{2}\left((x^2-1)e^{x^2}\right)$.

Alternative Lösung: Es genügt auch, nur partielle Integration mit $g(x):=\frac{1}{2}x^2$ und $h(x):=e^{x^2}$, jeweils stetig differenzierbar, zu verwenden. Dann gilt nämlich: $\int f(x)\,dx=\int g(x)h'(x)\,dx$.

Aufgabe 8

Zu prüfen sind die Vorraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen. Zunächst ist f stetig differenzierbar als Summe stetig differenzierbarer Funktionen (ln, Polynome) und für die Funktionalmatrix gilt $Df=\left(1+\frac{1}{x}, 1+\frac{1}{y}\right)$. Weiterhin gilt $f\left((1,1)^{tr}\right)=0+1+0+1-2=0$ und $D_yf\left((1,1)^{tr}\right)=1+\frac{1}{1}=2\neq 0$.

Folglich ist $D_yf\left((1,1)^{tr}\right)$ invertierbar und alle Vorraussetzungen für den Satz über implizite Funktionen sind erfüllt. Folglich gilt die zu zeigende Aussage und es bleibt nur noch $g'(1)$ zu berechnen. Dabei gilt

$g'(1)=-\left((D_yf)\left((1,1)^{tr}\right)\right)^{-1}\left((D_xf)\left((1,1)^{tr}\right)\right)=$

$-\frac{1}{2}\cdot 2=-1.$

Aufgabe 9

a) Es sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := g(x) := e^x$ stetig. Somit liegt hier eine separierbare Differentialgleichung vor. Wegen $g(0) = 1 \neq 0$ ist die Differentialgleichung eindeutig lösbar. Definiere zunächst $F(x) := \int_1^x e^t \, \mathrm{d}t = e^x - e$, sowie $H(y) := \int_0^y \frac{1}{e^s} \, \mathrm{d}s = [-e^{-s}]_0^y = 1 - e^{-y}$. Bestimme nun $H^{-1}(x)$: Es gilt $1 - e^{-y} = x \Leftrightarrow -e^{-y} = x - 1 \Leftrightarrow e^{-y} = 1 - x \Leftrightarrow -y = \ln(1-x) \Leftrightarrow y = -\ln(1-x) = H^{-1}(x)$. Die eindeutige Lösung ist nun gegeben durch $\psi(x) = H^{-1}(F(x)) = -\ln(1 - e^x)$.

b) Es sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := e^x, g(x) := 1$ stetig, somit liegt hier eine lineare inhomogene Differentialgleichung vor, welche eine eindeutige Lösung besitzt. Definiere zunächst $\varphi(x) := \exp\left(\int_0^x 1 \, \mathrm{d}x\right) = e^x$, sowie $u(x) := 1 + \int_0^x \frac{e^t}{e^t} \, \mathrm{d}t = 1 + \int_0^x 1 \, \mathrm{d}t = 1 + x$. Somit ergibt sich als eindeutige Lösung $\psi(x) := \varphi(x) \cdot u(x) = e^x(1 + x)$.

Aufgabe 10

a) Zeige die Aussage mittels vollständiger Induktion. (IA) Sei $n = 1, x \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt nach Vorraussetzung $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x)$.

(IV) Es gelte die Aussage für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$.

(IS) Es gilt $f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{2x}{2^{n+1}}\right) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x)$, wobei in der ersten Umformung die gegebene Eigenschaft von f und in der zweiten Umformung die Induktionsvorraussetzung genutzt wurde. Somit gilt die Aussage $\forall\, n \in \mathbb{N}$ nach dem Prinzip der vollständigen Induktion.

b) Sei $x \in \mathbb{R}$ beliebig. Definiere die Nullfolge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} := \left(\frac{x}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Nach Teilaufgabe a) gilt $\forall\, n \in \mathbb{N} : f(a_n) = f(x)$, also insbesondere auch $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = \lim_{n \to \infty} f(x) = f(x)$. Gleichzeitig gilt aber wegen f stetig, also insbesondere f stetig in 0 und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nullfolge: $f(0) = \lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x)$. Somit folgt $f(0) = f(x)\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ und somit die Aussage.

Aufgabe 11

a) Sei $n > |x^2|$. Dann gilt wegen $0 < \frac{x^2}{n^2} < 1$, dass $1 \geq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n$. Wegen $\frac{x^2}{n^2} > 0 > -1$ ist die Bernoulli-Ungleichung anwendbar und es folgt $\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$. Dabei gilt offenbar $\lim_{n \to \infty} 1 = 1$, sowie mithilfe der Grenzwertsätze $\lim_{n \to \infty} 1 - \frac{x^2}{n} = 1 - x^2 \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 1$. Wegen der Ungleichung $1 \geq \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \geq 1 - \frac{x^2}{n}$ für alle $n > |x^2|$. Somit folgt die zu zeigende Aussage aus dem Sandwich-Lemma.

b) Da nach Annahme die Limiten $\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ und $\lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ beide existieren, sind die Grenzwertsätze anwendbar und es folgt $\forall\, x \in \mathbb{R}$:
$f(x) \cdot f(-x) = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(\left(1 - \frac{x}{n}\right)\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)^n = \lim_{n \to \infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n = 1$ gemäß Teilaufgabe a).