1. Klausur Analysis für Informatiker, WS 2016/17

bei Prof. Walcher & Maike Sube

16.02.2017

1. Vollständige Induktion
2. Zeigen oder widerlegen Sie: Es existiert eine injektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$. Es existiert eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{Q}$.
3. a) Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. ihren Grenzwert:

$$a_n = [\text{rationale Funktion}], n \in \mathbb{N}$$
$$b_n = \frac{cos(n)}{\sqrt(n)}, n \in \mathbb{N}$$

   b) i. Zeigen Sie mit dem Mittelwertsatz, dass $\sin x < x$ für $x \in (0, \pi)$.

      ii. Zeigen Sie, dass

$$a_0 = 1,\ a_{n+1} = sin a_n$$

      konvergiert.

4. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und approximieren Sie ggf. den Reihenwert auf einen Fehler von 10^{-1}.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}}$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^3}$$

5. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp x + x^3 - 2$$

   genau eine Nullstelle hat, und diese eindeutig bestimmt ist.

6. Bestimmen Sie $c \in \mathbb{R}$ so, dass

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{falls } x \neq 0 \\ c, & \text{sonst} \end{cases}$$

7. Bestimmen Sie Maximum und Minimum von

$$f\colon [-\pi, \pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \exp(x)(\sin(x) + \cos(x))$$

8. Bestimmen Sie

$$\int_0^e x^m \ln x \, dx$$

9. Bestimmen Sie

$$\int \frac{\sin(\arctan(x))}{1 + x^2}$$

10. Lösen Sie das Anfangswertproblem für

$$y' = -y + \exp(x^2),\ y(0) = 0$$

11. Gegeben war eine Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \sin(x_2) \\ \sqrt{1 + (x_1 x_2)^2} \end{pmatrix}$$

   a) Untersuchen Sie f auf Stetigkeit
   b) Untersuchen Sie f auf partielle Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die partiellen Ableitungen
   c) Ist f total differenzierbar?