Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens

Aachen, den 28. Januar 2011

Probeklausur zur Analysis für Informatiker

Musterlösung

Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass
$$\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1}$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (4 Punkte)

Beweis durch vollständige Induktion nach n.

(IA) Es gilt
$$\sum_{k=1}^{2\cdot 1+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 1+1},$$
also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und gelte die Behauptung für dieses n.

(IS) Es gilt
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2(n+1)+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &\underset{\text{(IV)}}{\geqslant} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &\underset{2n+2\geqslant 2n+1>0}{\geqslant} \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(n+1)+1}\end{aligned}$$

was die Behauptung mit $n+1$ anstelle von n ist, so dass mit dem Induktionsprinzip die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt.

Aufgabe 2

Sei
$$M = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_0 \right\}.$$
Bestimmen Sie $\sup M$ und $\max M$, oder zeigen Sie gegebenenfalls, dass M kein Supremum beziehungsweise Maximum hat.

Hinweis: Geometrische Summenformel (3 Punkte)

Zeige $\sup M = 2$. Dazu zeige zunächst, dass 2 eine obere Schranke von M ist. Für jedes $x \in M$ existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit

$$x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \qquad \text{(geometrische Summenformel)}$$

womit $x < 2$ folgt, da $(\frac{1}{2})^n > 0$ gilt. Damit ist bereits nachgewiesen, dass 2 eine obere Schranke von M ist. Zeige weiter, dass 2 die kleinste obere Schranke von M ist. Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $\varepsilon > 0$. Da $|\frac{1}{2}| < 1$ ist, gilt nach Vorlesung $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n = 0$, also existiert insbesondere ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|(\frac{1}{2})^n| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N$, insbesondere also $(\frac{1}{2})^N < \varepsilon$. Setzt man $x = 2 - (\frac{1}{2})^N$, so hat man $x \in M$ nach Definition von M, und es gilt

$$x = 2 - \frac{1}{2^N} > 2 - \varepsilon$$

Gemäß Vorlesung folgt nun $\sup M = 2$.

Wie bereits gesehen gilt $x < 2$ für alle $x \in M$, also ist $\sup M \notin M$, womit M kein Maximum hat.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\tan x}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

in allen Punkten aus $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ auf Stetigkeit. (3 Punkte)

Sei $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$. Da die Intervalle $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ und $(0, \frac{\pi}{2})$ offen sind, ist auch $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} = (-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2})$ offen. Auf der offenen Menge $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$ ist dann $f|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\setminus\{0\}}$ als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig ($x \mapsto \frac{\tan x}{x}$), und somit ist auch f nach Vorlesung in x stetig.

Untersuche nun f in 0 auf Stetigkeit. Es gilt aufgrund der Stetigkeit der auftretenden Funktionen nach L'Hospital:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1+\tan^2 x}{1} \underset{\text{GWS, tan stetig in 0}}{=} 1 + \tan^2(0) = 1 \neq 0 = f(0)$$

also folgt, dass f in 0 nicht stetig ist.

Aufgabe 4

a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \frac{3^n + 6^{n+1}}{(-5)^n + 6^{n-1}} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. (3 Punkte)

b) Untersuchen Sie die durch $a_1 = 0$ und $a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}a_n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(5 Punkte)

---

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{3^n + 6^{n+1}}{(-5)^n + 6^{n-1}} = \frac{6^n((\frac{3}{6})^n + 6)}{6^n((-\frac{5}{6})^n + \frac{1}{6})} = \frac{(\frac{3}{6})^n + 6}{(-\frac{5}{6})^n + \frac{1}{6}},$$

also folgt wegen $|\frac{3}{6}| < 1$ und $|-\frac{5}{6}| < 1$ mit den Grenzwertsätzen die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(\frac{3}{6})^n + 6}{(-\frac{5}{6})^n + \frac{1}{6}} = \frac{0+6}{0+\frac{1}{6}} = 36.$$

b) Beachte zunächst: $a_1 = 0 \geqslant 0$, und da $\sqrt{1 + \frac{3}{4}x^2} \geqslant \sqrt{1+0} = 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist, gilt nach Definition der a_n auch $a_n \geqslant 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(1) Nehme zunächst an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt nach obigem bereits $a \geqslant 0$. Da $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{4}a_n^2} \underset{\text{GWS, } \sqrt{\cdot} \text{ stetig}}{=} \sqrt{1 + \frac{3}{4}a^2}.$$

Weiter hat man

$$a = \sqrt{1 + \frac{3}{4}a^2} \quad \underset{a\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad a^2 = 1 + \frac{3}{4}a^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}a^2 = 1 \quad \underset{a\geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad a = 2$$

Damit kann nur 2 der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sein.

(2) Zeige Beschränktheit der Folge nach oben hier durch Nachweis von $a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(IA) Man hat $a_1 = 0 \leqslant 2$, also gilt die Behauptung für $n = 1$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$, und gelte $a_n \leqslant 2$.

(IS) Es gilt, da sowohl $x \mapsto x^2$ als auch $x \mapsto \sqrt{x}$ auf $[0, \infty)$ monoton wachsend sind:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{3}{4}a_n^2} \underset{\text{(IV), Monotonie}}{\leqslant} \sqrt{1 + \frac{3}{4} \cdot 2^2} = \sqrt{4} = 2$$

was die Behauptung für $n+1$ anstelle von n ist. Mit dem Induktionsprinzip folgt nun $a_n \leqslant 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Zeige, dass die Folge monoton wachsend ist durch Nachweis von $a_{n+1} \geqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Monotonie der Wurzelfunktion

$$\begin{aligned} a_{n+1} \geqslant a_n \quad &\underset{a_n \geqslant 0}{\Leftrightarrow} \quad \sqrt{1+\frac{3}{4}a_n^2} \geqslant a_n = \sqrt{a_n^2} \quad \underset{\text{Monotonie}}{\Leftrightarrow} \quad 1+\frac{3}{4}a_n^2 \geqslant a_n^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \geqslant \frac{1}{4}a_n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geqslant a_n^2, \end{aligned}$$

und Letzteres ist eine wahre Aussage, da $0 \leqslant a_n \leqslant 2$ nach (2) gilt.

(4) Als beschränkte (2) und monotone (3) Folge ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Vorlesung konvergent. Nach (1) gilt somit für den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} + (-4)^k}{5^k}.$$

(3 Punkte)

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin(\frac{1}{k})}{k}$$

auf Konvergenz. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k}{k+1}\right)^k x^k.$$

(3 Punkte)

---

a) Man hat, da $|\frac{3}{5}| < 1$ und $|-\frac{4}{5}| < 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1} + (-4)^k}{5^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k-1}}{5^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-4)^k}{5^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^k \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} - \frac{4}{5} \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^k - \frac{4}{5} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right)^k \underset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{5}} - \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{1+\frac{4}{5}} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{2} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

b) Definiere

$$a_k = \frac{\sin(\frac{1}{k})}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt einerseits $0 < k \leqslant k+1$, und andererseits hat man $\sin(\frac{1}{k}) \geqslant \sin(\frac{1}{k+1}) \geqslant 0$, denn es gilt $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{k+1}$ sowie $\frac{1}{n} \in (0, \frac{\pi}{2})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und der Sinus ist monoton wachsend auf $[0, \frac{\pi}{2})$. Somit folgt

$$a_k = \frac{\sin(\frac{1}{k})}{k} \geqslant \frac{\sin(\frac{1}{k+1})}{k+1} = a_{k+1} \geqslant 0,$$

also ist $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend. Darüberhinaus gilt

$$0 = \frac{\sin(0)}{k} \leqslant \frac{\sin(\frac{1}{k})}{k} \leqslant \frac{\sin(\frac{1}{1})}{k} = \frac{\sin(1)}{k}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (wieder aufgrund der Monotonie des Sinus), und mit den Grenzwertsätzen gilt $\lim_{k\to\infty} \frac{\sin(1)}{k} = 0 = \lim_{k\to\infty} 0$, also erhält man mit dem Sandwich-Lemma, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt nun, dass die zu untersuchende Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}a_k$ konvergent ist.

c) Sei $a_k = (\frac{2k}{k+1})^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{2k}{k+1} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{k}} \underset{\text{GWS}}{=} \frac{2}{1+0} = 2$$

woraus man mit dem Wurzelkriterium erhält, dass der Konvergenzradius der zu untersuchenden Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2k}{k+1})^k x^k$ gleich $\frac{1}{2}$ ist.

Aufgabe 6

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x},$$

oder zeigen Sie, dass dieser Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ nicht existiert. (2 Punkte)

Es gilt mit L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\sin x} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} \underset{\substack{\text{GWS,}\\ \cos \text{ stetig}}}{=} \frac{\frac{1}{1+0^2}}{\cos 0} = \frac{1}{1} = 1.$$

Aufgabe 7

a) Untersuchen Sie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \neq 0, \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit im Punkt $x = 0$. (3 Punkte)

b) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ stetig in 0. Zeigen Sie, dass dann $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xf(x)$ in 0 differenzierbar ist mit Ableitung $g'(0) = f(0)$. (2 Punkte)

---

a) Es gilt

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\frac{\sin(h)}{h} - 1}{h} = \frac{\sin(h) - h}{h^2}$$

für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, also hat man aufgrund der Stetigkeit der auftretenden Funktionen mit L'Hospital:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \underset{h\neq 0}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h) - h}{h^2} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\cos(h) - 1}{2h} \underset{\text{„}\frac{0}{0}\text{“}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{-\sin(h)}{2}$$
$$\underset{\text{GWS, sin stetig}}{=} \frac{-\sin 0}{2} = 0.$$

Dies zeigt, dass f in 0 differenzierbar ist (und dort den Ableitungswert 0 hat). Damit ist f nach Vorlesung auch stetig in 0.

Idee einer Alternativlösung: $\frac{\sin x}{x}$ besitzt Potenzreihendarstellung, diese konvergiert auf ganz $\mathbb{R}$ und stimmt auch in 0 mit f überein, Potenzreihen sind auf ihrem Konvergenzintervall stetig differenzierbar. (Muss dann natürlich alles entsprechend gezeigt werden.)

b) Für alle $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \frac{hf(h) - 0}{h} = f(h).$$

Da f stetig in 0 ist, folgt somit direkt

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \underset{h\neq 0}{=} \lim_{h\to 0} f(h) = f(0).$$

Dies zeigt nach Definition, dass g in 0 differenzierbar ist mit Ableitung $g'(0) = f(0)$.

Aufgabe 8

Berechnen Sie das Integral

$$\int \cos(x) \log(\sin(x)) \, \mathrm{d}x.$$

auf $(0, \pi)$. (3 Punkte)

Beachte zunächst, dass der Integrand wegen $\sin x > 0$ für alle $x \in (0, \pi)$ stets wohldefiniert ist. Es gilt dann

$$\int \cos(x) \log(\sin(x)) \, \mathrm{d}x \underset{\substack{y=\sin x \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\cos x}}{\overset{\text{Subst.}}{=}} \int \log y \, \mathrm{d}y = \int 1 \cdot \log y \, \mathrm{d}y \underset{\substack{f(y)=y \\ f'(y)=1 \\ g(y)=\log y}}{\overset{\text{part. Int.}}{=}} y \log y - \int y \cdot \frac{1}{y} \, \mathrm{d}y$$

$$= \quad y \log y - y \underset{\text{Resubst.}}{=} \sin(x) \log(\sin(x)) - \sin(x).$$

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$p(x) = \frac{x+3}{x^3+x^2-x-1}.$$

(5 Punkte)

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

(Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich.) (3 Punkte)

---

a) Zerlege den Nenner x^3+x^2-x-1 in für die Partialbruchzerlegung geeignete Produkte. Durch Ausprobieren sieht man, dass 1 eine Nullstelle ist.

$$
\begin{array}{l}
(\ x^3 + x^2 \ - x \ - 1\ ) : (x-1) = x^2+2x+1 \\
\underline{x^3 - x^2} \\
\quad 2x^2 - x \\
\quad \underline{2x^2 - 2x} \\
\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\quad \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Daher gilt $x^3+x^2-x-1 = (x-1)(x^2+2x+1) = (x-1)(x+1)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Da der Zählergrad kleiner als der Nennergrad ist, existieren $A, B, C \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{x+3}{x^3+x^2-x-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner erhält man daraus

$$
\begin{aligned}
x+3 &= A(x+1)^2 + B(x-1)(x+1) + C(x-1) \\
&= A(x^2+2x+1) + B(x^2-1) + C(x-1) \\
&= (A+B)x^2 + (2A+C)x + (A-B-C)
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit Koeffizientenvergleich kommt man auf das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
A + B \qquad &= 0 \\
2A \qquad + C &= 1 \\
A - B - C &= 3.
\end{aligned}
$$

Mit dem Gauß-Algorithmus hat man nun

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & -2 & -1 & 3\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix},$$

also ist $A = 1$ und $B = -1$ sowie $C = -1$. Insgesamt folgt damit

$$\frac{x+3}{x^3+x^2-x-1} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{0} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \underset{x-1\neq 0\ \forall\ x\in[-2,0]}{=} & \log|x-1|\Big|_{x=-2}^{0} + \int_{-2}^{0} \frac{1}{(x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x \\
\overset{\text{Subst.}}{\underset{\substack{y=x+1\\ x=y-1\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1}}{=}} & \log(|-1|) - \log(|-3|) + \int_{-1}^{1} \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y \\
= & -\log 3 + \arctan y\Big|_{y=-1}^{1} \\
= & -\log 3 + (\arctan 1 - \arctan(-1)) \\
= & -\log 3 + \left(\tfrac{\pi}{4} - \left(-\tfrac{\pi}{4}\right)\right) = -\log 3 + \tfrac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty \frac{x^{-2}}{2+\sin x}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert. (3 Punkte)

Wegen $\sin x \in [-1,1]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $2+\sin x \geqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit folgt

$$\left|\frac{x^{-2}}{2+\sin x}\right| = \frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2+\sin x} \leqslant \frac{1}{x^2}\cdot 1 = \frac{1}{x^2}$$

für alle $x \in [1,\infty)$. Da zudem der Integrand als stetige Funktion auf allen Intervallen der Form $[1,b]$ für $b \in (1,\infty)$ eigentlich integrierbar ist, folgt nun mit dem Vergleichskriterium aufgrund der absoluten Konvergenz von $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ auch die absolute Konvergenz und damit die Konvergenz des zu betrachtenden Integrals. ($\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ konvergiert nach Vorlesung, da für den Exponenten $-2 < -1$ gilt.)

Aufgabe 11

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Aussage.

a) Sind $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ sowie $f : [a, b] \to (0, \infty)$ stetig, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$, so dass $f(x) \geqslant \alpha$ für alle $x \in [a, b]$ gilt. (2 Punkte)

b) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in (0, 1)$, so ist $f|_{[0,1]}$ injektiv. (2 Punkte)

c) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente Folgen, so ist auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent. (2 Punkte)

---

a) Das abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist kompakt. Da f stetig auf dem Kompaktum $[a, b]$ ist, gibt es nach dem Maximum-Minimum Satz von Weierstraß ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) \leqslant f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Durch die Voraussetzung an den Zielbereich von f gilt zudem $f(x_0) > 0$. Mit $\alpha = f(x_0)$ ist die Behauptung also erfüllt.

b) Annahme: $f|_{[0,1]}$ ist nicht injektiv. Dann gibt es also $x_0, x_1 \in [0, 1]$ mit $x_0 < x_1$ und $f(x_0) = f(x_1)$. Nach Voraussetzung ist f differenzierbar auf $[x_0, x_1]$, und damit auch stetig. Da $f(x_0) = f(x_1)$ gilt, existiert nach dem Satz von Rolle ein $x \in (x_0, x_1) \subset (0, 1)$ mit $f'(x) = 0$, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Somit war die Annahme falsch, also muss $f|_{[0,1]}$ injektiv sein.

c) Definiere $a_n = n$ und $b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt (Archimedisches Prinzip), und somit nach Vorlesung divergent. Jedoch gilt $a_n + b_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als konstante Folge konvergent (mit Grenzwert 0). Somit ist die Behauptung falsch.

Aufgabe 12

Geben Sie die folgenden Definitionen beziehungsweise Sätze im Sinne der Vorlesung wieder. Formulieren Sie eine vollständige Aussage (wie „Ein $a \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt einer reellen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn ... gilt“), und achten Sie darauf, dass Sie auch die Voraussetzungen korrekt angeben.

a) Definition eines Häufungspunktes einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ (2 Punkte)

b) Definition von gleichmäßiger Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in D (2 Punkte)

c) Weierstraßsches Majorantenkriterium zur gleichmäßigen Konvergenz einer Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ in $D \subset \mathbb{R}$ (2 Punkte)

---

a) Sei $M \subset \mathbb{R}$. Der Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt Häufungspunkt von M, wenn für alle $\varepsilon > 0$ stets $(B_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \cap M = ((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap M \neq \emptyset$ gilt.

b) Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. f heißt gleichmäßig stetig in D, wenn für alle $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $|x_1 - x_2| < \delta$ stets $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ gilt.

c) Seien $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und f_n auf D definierte Funktionen für alle $n \in \mathbb{N}$. Existieren $M_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $|f_n(x)| \leqslant M_n$ für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ konvergiert (also $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$ gilt), dann konvergieren die Funktionenreihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ gleichmäßig in D.