RHEIN.-WESTF. TECHN. HOCHSCHULE AACHEN
IGPM
Prof. Dr. Henning Esser

Aachen, den 08.02.2008

Trainingsklausur zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x}{x-1}\left(nx^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right), \text{ wobei } x \neq 1.$$

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Form $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, der folgenden Gleichung:

$$z^3 = \frac{32-24i}{3+4i}.$$

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+4x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\uparrow 0}(1-2^x)^{\sin(x)}.$$

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \geq -1$ gilt

$$\frac{|s|}{(n+1)^{s+1}} \leq \left|\frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s}\right| \leq \frac{|s|}{n^{s+1}}$$

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Bestimmen Sie:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}dx$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Wahrheitswert, wahr oder falsch, der folgenden Aussagen und notieren Sie Ihre Antwort auf dem **Deckblatt** der Klausur. Eine Begründung ist jeweils nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen (solange die Gesamtsumme für diese Aufgabe nicht negativ wird).

(1) Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen nach oben beschränkt.

(2) Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist stets beschränkt.

(3) Eine Menge reeller Zahlen ist abgeschlossen genau dann, wenn sie nicht offen ist.

(4) Ist f eine auf (a, b) stetige Funktion, dann ist f auf (a, b) beschränkt.

(5) Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann besitzt f auf K ein Maximum.

Kl/A1

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Beweisen Sie mit Hilfe vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$:

$$A(n): \quad \sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{x}{x-1}\left(nx^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right), \text{ wobei } x \neq 1.$$

Lösung:

I.A. Für $n=1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{1} kx^k = x \qquad \frac{x}{x-1}\left(x - \frac{x-1}{x-1}\right) = x \Rightarrow A(1) \text{ wahr}$$

I.S. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ wahr.

Zu zeigen: $A(n+1)$ auch wahr.

$$\sum_{k=1}^{n+1} kx^k = \sum_{k=1}^{n} kx^k + (n+1)x^{n+1}$$

$$\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{x}{x-1}\left(nx^n - \frac{x^n-1}{x-1}\right) + (n+1)x^{n+1}$$

$$= \frac{x}{x-1}\left(nx^n - \frac{x^n-1}{x-1} + \underbrace{(n+1)x^n}_{(nx^n+x^n)}(x-1)\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\left(\cancel{nx^n} - \frac{x^n-1}{x-1} + nx^{n+1} - \cancel{nx^n} + x^{n+1} - x^n\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\left((n+1)x^{n+1} - \frac{x^n-1}{x-1} - x^n\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\left((n+1)x^{n+1} - \frac{x^n-1+x^{n+1}-x^n}{x-1}\right)$$

$$= \frac{x}{x-1}\left((n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right)$$

$\Rightarrow A(n+1)$ wahr

Mit vollständiger Induktion ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Kl/A2

Aufgabe 2 (15 Punkte)

Berechnen Sie alle komplexen Lösungen z der Form $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, der folgenden Gleichung:

$$z^3 = \frac{32 - 24i}{3 + 4i}.$$

Lösung: Es gilt $\frac{32-24i}{3+4i} = \frac{8(4-3i)}{3+4i} \cdot \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{8}{25}(-25i)$

$$= -8i = 8\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

Mit $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ gilt $\quad z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

Somit gilt: $\quad r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$

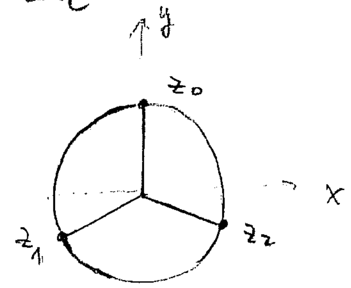
$$\cos\frac{3\pi}{2} = \cos 3\theta \Rightarrow \theta_k = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{3} \qquad k = 0, 1, 2$$

Die Lösungen sind:

$$z_0 = 2(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} - i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} - i$$



Kl/A3

Aufgabe 3 (15 Punkte)

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die rekursiv definierte Folge

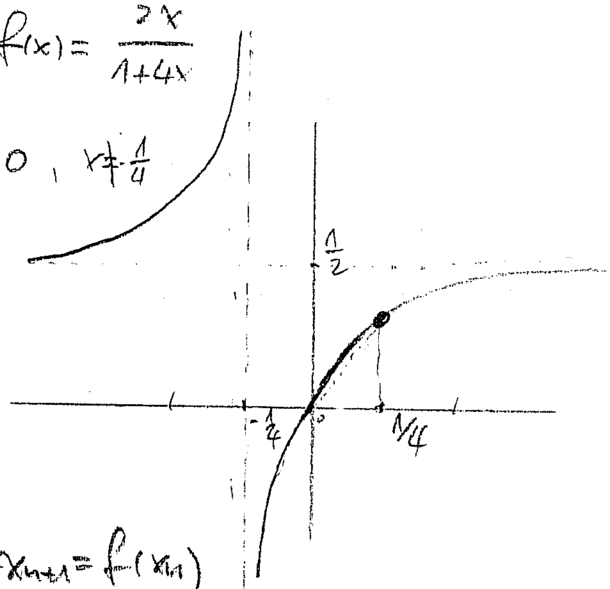
$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1+4x_n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$.

Lösung: Betrachte die Funktion $f(x) = \frac{2x}{1+4x}$

$$f'(x) = \frac{2(1+4x) - 2x\cdot 4}{(1+4x)^2} = \frac{2}{(1+4x)^2} > 0, \quad x \neq \tfrac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ f ist monoton steigend.



Beh 1: $x_n \geq \frac{1}{4}$ $n \in \mathbb{N}$.

$x_1 = 1 \geq \frac{1}{4}$ ✓

Mit Voraussetzung $x_n \geq \frac{1}{4}$ und $x_{n+1} = f(x_n)$

gilt $x_{n+1} \geq f(\frac{1}{4}) = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1+4\cdot\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$, da $f(x)\uparrow$.

Mit vollständiger Induktion ist $x_n \geq \frac{1}{4}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beh 2: x_n monoton fallend.

$$x_2 = \frac{2x_1}{1+4x_1} = \frac{2}{5} < 1 = x_1$$

Mit $x_{n+1} = f(x_n)$ und der Monotonie von f ist (x_n) monoton fallend.

Beh 1. Beh 2 + Monotonieprinzip $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} x_n =: x$

$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq x$

$(*) \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \quad x = \frac{2x}{1+4x} \quad \overset{x\neq 0}{\Longrightarrow} \quad x = \frac{1}{4}$

Kl/A4

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Bestimmen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{x\uparrow 0}(1-2^x)^{\sin(x)}.$$

Lösung: Weil $x \uparrow 0$, ist $2^x \uparrow 1 \Rightarrow 1-2^x \downarrow 0$

$\sin x \to 0$

$\Rightarrow (1-2^x)^{\sin(x)}$ ist vom Typ „0^0" für $x \uparrow 0$

Anwendung von log:

$$(1-2^x)^{\sin x} = e^{\overset{\to 0}{\sin(x)}\overbrace{\log(1-2^x)}^{\to -\infty}}$$

$$\sin x \cdot \log(1-2^x) = \frac{\log(1-2^x)}{\frac{1}{\sin(x)}} =: \frac{f}{g} \quad \text{Typ: „}\frac{-\infty}{-\infty}\text{"}$$

$$\frac{f'}{g'} = \frac{\frac{-2^x\log 2}{1-2^x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \frac{\overset{\to \log 2}{2^x\log 2}}{\underset{\to 1}{\cos x}} \cdot \frac{\overset{\to 0}{\sin^2 x}}{\underset{\to 0}{1-2^x}} =: \frac{h}{l} \quad \text{Typ: „}\frac{0}{0}\text{"}$$

$$\frac{h'}{l'} = \frac{2\overset{\to 0}{\sin x}\,\overset{\to 1}{\cos x}}{-2^x \cdot \log 2} \to \underline{\underline{0}}$$

$$\overset{l'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\uparrow 0}\frac{f'}{g'} = \log 2 \cdot \lim_{x\uparrow 0}\frac{h'}{l'} = 0 \overset{l'H}{\Longrightarrow} \lim_{x\uparrow 0}\frac{f}{g} = \lim_{x\uparrow 0}\frac{f'}{g'} = 0$$

$$\overset{\text{Stetigkeit von } e^{\cdot}}{\Longrightarrow} \lim_{x\uparrow 0}(1-2^x)^{\sin(x)} = e^{\lim_{x\uparrow 0}\sin(x)\cdot\log(1-2^x)} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

kl/A5

Aufgabe 5 (15 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes: Für $n \in \mathbb{N}$ und $s \geq -1$ gilt

$$\frac{|s|}{(n+1)^{s+1}} \leq \left| \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{s+1}}$$

Lösung: Sei $f(x) = \frac{1}{x^s}$. $\forall n \; \forall x \in [n, n+1] : n \leq x \leq n+1$

$\Rightarrow x \geq 1 > 0$

$f'(x) = -s \frac{1}{x^{s+1}}$. f ist stetig in $[n, n+1]$ und diffbar auf $(n, n+1)$

$\xRightarrow[\exists \xi \in (n, n+1)]{\text{Mittelwertsatz}}$ $f(n+1) - f(n) = f'(\xi)(n+1-n)$

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right| = \left| -\frac{s}{\xi^{s+1}} \right| = \frac{|s|}{\xi^{s+1}}$$

$$\left. \begin{array}{l} n \leq \xi \leq n+1 \\ s+1 \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \quad n^{s+1} \leq \xi^{s+1} \leq (n+1)^{s+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^{s+1}} \leq \frac{1}{\xi^{s+1}} \leq \frac{1}{n^{s+1}} \qquad |s| \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{|s|}{(n+1)^{s+1}} \leq \left| \frac{1}{(n+1)^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{s+1}}$$

kl/A6

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Bestimmen Sie:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$$

Lösung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx \overset{x=\tan y}{=} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y}}{\left(\frac{1}{\cos^2 y}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 y}\, dy$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y\, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2y}{2}\, dy$$

$$= \left(\frac{1}{2} y - \frac{1}{4} \sin 2y\right)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Alt. Lösung:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\, dx \overset{\text{Sym.}}{=} 2\int_0^1 x \cdot \underbrace{\frac{x}{(1+x^2)^2}}_{g'}\, dx = -\int_0^1 x \cdot \left(\frac{1}{1+x^2}\right)' dx$$

$$\overset{\text{P.I.}}{=} -x\,\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2} + \arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bestimmen Sie den Wahrheitswert, wahr oder falsch, der folgenden Aussagen und notieren Sie Ihre Antwort auf dem **Deckblatt** der Klausur. Eine Begründung ist jeweils nicht erforderlich. Für jede richtige Antwort gibt es 2 Punkte, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen (solange die Gesamtsumme für diese Aufgabe nicht negativ wird).

W (1) Sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen nach oben beschränkt.

W (2) Eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ ist stets beschränkt.

F (3) Eine Menge reeller Zahlen ist abgeschlossen genau dann, wenn sie nicht offen ist.

F (4) Ist f eine auf (a, b) stetige Funktion, dann ist f auf (a, b) beschränkt.

W (5) Es sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei differenzierbar. Dann besitzt f auf K ein Maximum.