Diplomvorprüfung in Analysis I/II vom 20. 9. 2001
Lehrstuhl I für Mathematik
Prof. Dr. M. Wiegner
M. Winkler

Aufgabe 1
Untersuchen Sie, ob die durch $a_1 := 4, a_{n+1} := \sqrt{2 + \frac{1}{2}a_n^2}, n \in \mathbb{N}$ definierte Folge konvergent ist, und berechnen Sie ggf. den Grenzwert.

Durch vollständige Induktion sieht man, dass $a_n \geq 2 \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ ist. Ferner ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend, da $a_{n+1} = \sqrt{\frac{2^2}{2} + \frac{a_n^2}{2}} \leq \sqrt{\frac{a_n^2}{2} + \frac{a_n^2}{2}} = a_n$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als monoton fallende und nach unten beschränkte Folge gegen eine Zahl $L \geq 2$ konvergent. Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion ist dann $L = \sqrt{2 + \frac{1}{2}L^2}$, woraus schließlich $L = 2$ folgt.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass durch $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n e^{-nx}$ eine auf $(0, \infty)$ stetige Funktion definiert ist.

Erste Lösung: Man findet leicht $0 < xe^{-x} \leq 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$ für $x \in (0,\infty)$, so dass $\sqrt[n]{\|n^2x^ne^{-nx}\|_\infty} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\|xe^{-x}\|_\infty = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}\frac{1}{e} \to \frac{1}{e}$. Also ist f nach Wurzelkriterium wohldefiniert. Ferner gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|n^2x^ne^{-nx}\|_\infty \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n \ \forall n \geq n_0$. Wir zeigen nun, dass $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $f_k(x) := \sum_{n=1}^{k} n^2x^ne^{-nx}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Es ist $\|f - f_k\|_\infty = \| \sum_{n=k+1}^{\infty} n^2x^ne^{-nx}\|_\infty \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \|n^2x^ne^{-nx}\|_\infty \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ für $k \geq n_0$. Da die geometrische Reihe $\sum \left(\frac{2}{e}\right)^n$ konvergent ist, müssen die Reste $\sum_{n=k+1}^{\infty} \left(\frac{2}{e}\right)^n$ und damit $\|f - f_k\|_\infty$ eine Nullfolge bilden. Also ist $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergent, so dass f wohldefiniert ist und sich die Stetigkeit der f_k auf f überträgt.

Zweite Lösung: Es ist $f = g \circ h$ mit $g(y) := \sum_{n=1}^{\infty} n^2y^n$ und $h(x) := xe^{-x}$. Die Potenzreihe g hat den Konvergenzradius 1, während $h(x)$ wie in der ersten Lösung zwischen 0 und $\frac{1}{e}$ liegt, also ist f wohldefiniert. Da g als Potenzreihe auf ihrem Konvergenzbereich stetig ist, muss f als Komposition zweier stetiger Funktionen auch stetig sein.

Aufgabe 3
Bestimmen Sie die kleinste Zahl $c \in \mathbb{R}$ derart, dass die Ungleichung $\ln x \leq cx^2 \ \forall x \in (0, \infty)$ gilt.

Offenbar ist das Supremum von $f(x) := \frac{\ln x}{x^2}$ für $x \in (0, \infty)$ gesucht. Es ist $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$. Man erkennt am Vorzeichen von f', dass f ein absolutes Maximum an $x_{max} = \sqrt{e}$ hat, also ist $c = \frac{1}{2e}$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{x+8}{x^2+7x+10}dx$.

Partialbruchzerlegung liefert $\frac{x+8}{x^2+7x+10} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+5}$, also $\int \frac{x+8}{x^2+7x+10}dx = \ln \frac{(x+2)^2}{|x+5|} + C$.

Aufgabe 5
Zeigen Sie: Existiert für eine gleichmäßig stetige Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(x)dx$, so gilt $f(x) \to 0$ für $x \to \infty$.

Angenommen, es wäre nicht so. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine streng monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $(x_n) \to \infty$ und $f(x_n) > \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, falls nur $|x - y| < \delta$ bleibt. O.B.d.A. ist $x_{n+1} - x_n > 2\delta$, sonst wähle man eine geeignete Teilfolge. Dann gilt: $\int_0^\infty f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} \frac{\varepsilon}{2}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \delta\varepsilon = \infty$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 6
Gegeben Sei die Menge $M := \{f \in C_0([0, 1])|f$ ist differenzierbar in $(0, 1)$ mit $|f'(x)| \leq 1 \forall x \in (0, 1)$ und $\int_0^1 f(x)dx = 0\}$.

(a) Ist M beschränkt?

(b) Ist $\overline{M}$ kompakt?

(c) Ist M zusammenhängend?

Alle drei Aufgaben sind mit Ja zu beantworten:

(a) Die Funktionen s und S in $C_0([0,1])$ mit $s(x) := -1, S(x) := 1$ sind eine untere bzw. obere Schranke für M, d. h. $s \leq f \leq S$ für alle $f \in M$. Angenommen, es gäbe trotzdem ein $f \in M$ mit $f(x_0) > 1$ für ein $x_0 \in [0,1]$. Da die Nullfunktion die einzige stetige und nicht negative Funktion mit Integral 0 ist, kann f nicht überall ≥ 0 sein. Es gibt also eine Stelle $y_0 \in [0,1]$ mit $f(y_0) < 0$. Nach Mittelwertsatz gibt es dann eine Stelle $\xi \in (0,1)$ mit $1 < |f(x_0) - f(y_0)| = |f'(\xi)||x_0 - y_0| \leq |f'(\xi)|$ im Widerspruch zu $f \in M$. Analog (oder durch Übergang zu $-f$) zeigt man, dass $f(x_0) < -1$ ebenfalls unmöglich ist.

(b) Nach Satz von Arzelà-Ascoli ist $\overline{M}$ genau dann kompakt, wenn M punktweise beschränkt (wurde eben gezeigt) und gleichstetig ist. Es verbleibt also nur noch, die Gleichstetigkeit von M zu zeigen. Für alle $f \in M$ und $x, y \in [0,1]$ gilt wegen Mittelwertsatz: $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq |x - y|$. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man einfach $\delta := \varepsilon$. Dann ist nämlich $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle $f \in M$, sofern $|x - y| < \delta$ bleibt, d. h. M ist gleichstetig.

(c) Tatsächlich ist M sogar wegzusammenhängend, woraus der Zusammenhang von M folgt. Zu gegebenen $f, g \in M$ setze man $w_t := f + t(g - f)$ für $t \in [0,1]$. Zunächst zeigen wir, dass $w_t \in M$ für alle $t \in [0,1]$ bleibt. Es ist: $w_t' = (1-t)f' + tg'$. Insbesondere folgt aus $-1 \leq f', g' \leq 1$ auch $-1 \leq w_t' \leq 1$. Ferner ist $\int_0^1 w_t(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + t(\int_0^1 g(x)dx - \int_0^1 f(x)dx) = 0$, also $w_t \in M$. Schließlich ist noch zu zeigen, dass aus $t \to t_0$ folgt: $w_t \to w_{t_0}$ (in der Maximumsnorm des $C_0([0,1])$). Es ist aber $\|w_t - w_{t_0}\|_\infty = \|(t - t_0)(g - f)\|_\infty = |t - t_0| \cdot \|g - f\|_\infty \to 0$. Also ist $t \mapsto w_t$ ein Weg in M, der f mit g verbindet. Da aber f und g beliebig in M waren, ist M also wegzusammenhängend und mithin zusammenhängend.

Aufgabe 7
Bestimmen Sie $\sup\{f(x,y)|\binom{x}{y} \in M\}$ und $\inf\{f(x,y)|\binom{x}{y} \in M\}$, wobei $M := \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y \leq x\}$ und $f(x,y) := xy^3 + xy^2 - x^2y^2 - y^3$ sei.

Da M beschränkt und abgeschlossen, also kompakt ist, handelt es sich bei den gesuchten Werten tatsächlich um Maximum bzw. Minimum. Man findet die Stellen, an denen f diese Werte annimmt, entweder auf dem Rand von M oder als kritische Punkte im Inneren von M. Es ist $\partial M = \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | x = 1 \wedge 0 \leq y \leq 1\} \cup \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\} \cup \{\binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq 1 \wedge x = y\}$. Da $f(1,y) = f(x,0) = f(x,x) \equiv 0$, ist f auf dem Rand konstant 0. Für das Innere betrachten wir $\nabla_f(x,y) = (y^3 + (1-2x)y^2, (3x-3)y^2 + (2x - 2x^2)y)$. Man erhält $\nabla_f(x,y) = (0,0)$ genau dann, wenn $y = 0$ oder $\binom{x}{y} = \binom{1}{1}$ oder $\binom{x}{y} = \binom{3/4}{1/2}$. Nur der letzte Punkt liegt in M^0, wobei $f(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{64}$. Es kommen keine weiteren Punkte in Frage, da jedes weitere (lokale) Maximum oder Minimum als kritischer Punkt erkannt worden wäre. Also ist $\sup\{f(x,y)|\binom{x}{y} \in M\} = \frac{1}{64}$ und $\inf\{f(x,y)|\binom{x}{y} \in M\} = 0$.

Aufgabe 8
Zeigen Sie, dass es $\delta > 0$ und genau eine positive stetige Funktion $f : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}$ mit $x^3 f(x) + f^2(x) = e^{(x-1)f(x)} \forall x \in (-\delta, \delta)$ gibt.

Zunächst zeigen wir, dass $f(0) := y_0 > 0$ eindeutig ist: Setze $F(x,y) := x^3y + y^2 - e^{(x-1)y}$ sowie $g(y) := F(0,y) = y^2 - e^{-y}$. Es müsste $F(0, y_0) = 0$, also $g(y_0) = 0$ mit $y_0 > 0$ sein. Aber da $g'(y) = 2y + e^{-y} > 0$ für $y > 0$, ist g streng monoton wachsend, so dass es höchstens ein $y_0 > 0$ mit $g(y_0) = 0$ gibt. Damit ist die Eindeutigkeit von y_0 gezeigt. Ferner ist $g(0) = -1$ und $g(1) = 1 - \frac{1}{e} > 0$. Da g stetig ist, gibt es nach Zwischenwertsatz ein $y_0 \in (0,1)$ mit $g(y_0) = F(0, y_0) = 0$.

Da F stetig differenzierbar ist mit $\frac{\partial F}{\partial y}(0, y_0) = 2y_0 + e^{-y_0} > 0$, gibt es mit dem Satz über implizite Funktionen $\delta, \varepsilon > 0$ und genau eine Funktion $f : (-\delta, \delta) \to (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ mit $F(x, f(x)) = 0$ auf $(-\delta, \delta)$. Diese Funktion ist stetig differenzierbar (also auch stetig), so dass die Existenz und Eindeutigkeit durch den Satz über implizite Funktionen garantiert ist.

Aufgabe 9

(a) Lösen Sie das Anfangswertproblem $x'(t) = -x(t) + \frac{1}{2}tx^3(t), t > 0, x(0) = x_0$ für $x_0 > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $x'(t) = \frac{x^4(t)-2}{1+tx^2(t)}, t > 0, x(0) = 1$ eine auf $[0, \infty)$ definierte monoton fallende Lösung hat.

(a) Es handelt sich um eine Bernoulli-Differentialgleichung. Substituiere also $z := x^{-2}$, was wegen $x(0) > 0$ möglich ist. Dann ist nur noch $z'(t) = 2z(t) - t$ mit $z(0) = \frac{1}{x_0^2}$ zu lösen. Dies ist eine lineare Differentialgleichung. Die homogenen Lösungen sind durch $z_{hom}(t) = Ce^{2t}$ gegeben. Eine spezielle Lösung ist $z_{spez}(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$, also ist $z(t) = Ce^{2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$. Setzt man nun den Anfangswert ein, so erhält man nach Resubstituieren: $x(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} + (\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{4})e^{2t}}}$.

(b) Mit $f(t, x) := \frac{x^4-2}{1+tx^2}$ ist f stetig. Ferner ist $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ ebenfalls überall stetig, da der Nenner wegen $t \geq 0$ nicht 0 werden kann. Also ist $f(t, x)$ überall lokal Lipschitz-stetig in x, so dass nach Satz von Picard-Lindelöf eine eindeutige Lösung der Differentialgleichung $x' = f(t, x)$ existiert, die genau dann global ist, falls $|x|$ in endlicher Zeit nicht unbeschränkt wächst. Die Anfangswertprobleme $x(0) = \sqrt[4]{2}$ und $x(0) = -\sqrt[4]{2}$ haben offenbar die konstanten Funktionen als globale Lösung. Da nach Satz von Picard-Lindelöf auch diese Lösungen überall eindeutig sind, kann x niemals diese konstanten Funktionen schneiden, d. h. es gibt kein $t \geq 0$ mit $|x(t)| = \sqrt[4]{2}$. Da aber x stetig ist sowie der Anfangswert $x(0) = 1$ zwischen $-\sqrt[4]{2}$ und $\sqrt[4]{2}$ liegt, kann nach Zwischenwertsatz niemals $|x(t)| > \sqrt[4]{2}$ sein. Also ist $|x(t)| < \sqrt[4]{2}$ und somit x beschränkt, also global. Ferner ist $x'(t) = \frac{x^4(t)-2}{1+tx^2(t)} < 0$, da der Zähler stets < 0 und der Nenner stets > 0 ist. Also ist x (streng) monoton fallend.

Aufgabe 10

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

1. Die Menge aller Häufungspunkte einer beschränkten reellen Zahlenfolge ist kompakt.
2. Sind mit einer beliebigen Menge I abzählbare Mengen $M_\alpha \subset \mathbb{R}$ für $\alpha \in I$ mit $\mathbb{R} = \cup_{\alpha \in I} M_\alpha$ gegeben, so ist I überabzählbar.
3. Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^4}{a_n^2+1}$ konvergent.
4. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und beschränkt, so gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$.
5. Ist eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(x) \to \infty$, so gibt es eine Folge von Zahlen $x_k \to \infty$ mit $\liminf_{k \to \infty} f'(x_k) > 0$.
6. Sind $f_k : [0, 1] \to \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$ stetig differenzierbare Funktionen mit $\|f_k'\|_\infty \leq 2$ und $0 \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq 1 \forall x \in [0, 1] \forall k \in \mathbb{N}$, so ist $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent.
7. Für jede stetig differenzierbare injektive Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist $M := \{x \in \mathbb{R} | f'(x) \neq 0\}$ offen mit $\overline{M} = \mathbb{R}$.
8. Sind f und g auf $(0, 1]$ stetige reelle Funktionen mit $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in (0, 1]$, so folgt aus der Existenz von $\int_0^1 g(x)dx$ die von $\int_0^1 f(x)dx$.
9. Es gibt eine Folge von Vektoren $\binom{x_k}{y_k} \in \mathbb{R}^2$ mit $|x_k| + |y_k| = 1$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{x_k^2 + 3y_k^4} \to 0$ für $k \to \infty$.

10. Das Anfangswertproblem $x'(t) = \ln(x(t) + \sqrt{t}), x(0) = 1$ besitzt genau eine auf $[0, \infty)$ definierte Lösung x.

Die Antworten mit (nicht geforderten) Begründungen lauten:

1. Wahr: Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, ist die Menge der Häufungspunkte auch beschränkt. Sei $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen h konvergente Folge von Häufungspunkten mit $h \neq h_n, n \in \mathbb{N}$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $h_k \in (h - \frac{\varepsilon}{2}, h + \frac{\varepsilon}{2})$. Da h_k Häufungspunkt, gibt es zu $\delta := |h - h_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ ein a_l mit $|a_l - h_k| < \delta$, also $h \neq a_l \in (h - \varepsilon, h + \varepsilon)$, d. h. h ist Häufungspunkt. Also ist die Menge der Häufungspunkte auch abgeschlossen und somit schließlich kompakt.

2. Wahr: Gäbe es nämlich ein abzählbares I, so wäre $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar, was nicht zutrifft.

3. Wahr: Da $\sum a_n$ absolut konvergent, ist auch $\sum(a_n \cdot a_n)$ absolut konvergent. Da $0 \leq \frac{a_n^4}{a_n^2+1} \leq \frac{a_n^4}{a_n^2} = a_n^2$, ist $\sum \frac{a_n^4}{a_n^2+1}$ nach Majorantenkriterium konvergent.

4. Wahr: Betrachte $g(x) := x^3 - f(x)$. Da f beschränkt, ist $g(x) \to \infty$ für $x \to \infty$ und $g(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Da mit f auch g stetig ist, gibt es nach Zwischenwertsatz eine Nullstelle, d. h. eine Lösung von $f(x) = x^3$.

5. Falsch: Gegenbeispiel ist $f(x) := \ln x$.

6. Wahr: Sei $x_0 \in M$, also $f'(x_0) \neq 0$. Da f' stetig, gibt es ein $\delta > 0$, wobei $f'(x) \neq 0$ auf $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Also ist x_0 innerer Punkt und somit M offen. Da f injektiv ist, enthält $\mathbb{R} \setminus M$ kein Intervall, d. h. für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ ist die Menge $(x, x + \varepsilon) \cap M$ nicht leer, so dass es in jeder Umgebung von x noch weitere Punkte von M gibt. Also ist x Häufungspunkt von M und somit $\overline{M} = \mathbb{R}$.

7. Wahr: Da die Folge der $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in [0, 1]$ monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, muss diese Folge konvergieren, d. h. $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen eine Funktion f. Wäre die Konvergenz nicht gleichmäßig, gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und eine gegen f punktweise konvergente Teilfolge $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ mit $\|f - f_{k_l}\|_\infty > \varepsilon \; \forall l \in \mathbb{N}$. Also ist $(f_{k_l})_{l\in\mathbb{N}}$ und keine ihrer Teilfolgen gleichmäßig konvergent, so dass $M := \{f_{k_l} | l \in \mathbb{N}\}$ nicht relativ kompakt ist. Dies steht aber im Widerspruch zum Satz von Arzelà-Ascoli, weil $M(x)$ offenbar durch 0 und 1 beschränkt und M gleichstetig ist, da die Ableitungen gleichmäßig durch 2 beschränkt sind.

8. Falsch: Gegenbeispiel ist $f(x) := -\frac{1}{x}$ und $g(x) := 0$.

9. Falsch: Wenn nämlich $\sqrt{x_k^2 + 3y_k^4}$ gegen 0 konvergiert, so auch $x_k^2 + 3y_k^4$. Als Summe von nicht negativen Zahlen muss dann auch x_k^2 und $3y_k^4$, also x_k und y_k gegen 0 laufen. Dann konvergieren aber auch $|x_k|$ und $|y_k|$ gegen 0, so dass ab einem hinreichend großen Index $|x_k| + |y_k|$ nicht mehr konstant 1 gehalten werden kann.

10. Wahr: Es ist $\ln(x + \sqrt{t})$ für $t \geq 0, x > -\sqrt{t}$ stetig und nach x stetig partiell differenzierbar, also in x lokal Lipschitz-stetig. Da $x(0) = 1$, gibt es nach Satz von Picard-Lindelöf genau eine Lösung x, solange $x(t) > -\sqrt{t}$ bleibt. Angenommen, es gäbe ein $t \in (0, 1]$ mit $x(t) \leq \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein $\delta \in (0, 1]$ mit $x(t) > \frac{1}{2}$ auf $[0, \delta)$ und $f(\delta) = \frac{1}{2}$. Wir schätzen $x'(t)$ ab durch $\ln(x + \sqrt{t}) \geq \ln(\frac{1}{2} + t)$, da $\sqrt{t} \geq t$ auf $[0, \delta]$. Dadurch erhalten wir: $x(t) \geq (\frac{1}{2} + t)\left(\ln(\frac{1}{2} + t) - 1\right) + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$, wobei die rechte Seite y den Anfangswert $y(0) = 1$ und $y'(t) = \ln(\frac{1}{2} + t)$ erfüllt. y hat ein absolutes Minimum bei $t = \frac{1}{2}$ mit dem Wert $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$, woraus $x(\delta) \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln 2 > \frac{1}{2}$ folgt, also ein Widerspruch. Wir wissen nun, dass $x(t) > \frac{1}{2}$ auf $[0, 1]$, insbesondere ist dann $x'(t) \geq 0$ für $t \geq 1$, also x ab $t = 1$ monoton wachsend. x ist also genau dann global, falls x nicht in endlicher Zeit unbeschränkt wächst. Da aber $|x'(t)| = |\ln(x(t) + \sqrt{t})| \leq x(t) + \sqrt{t} \leq e^{\sqrt{t}}x(t) + e^{\sqrt{t}} = e^{\sqrt{t}}(x(t) + 1)$ linear beschränkt ist, kann dies nicht eintreten. Daher ist x eine globale Lösung.