Automatentheorie
und
Formale Sprachen

Übungen und Musterlösungen zur Vorlesung im
SS 2000
von Prof. Baader

geTEXt von

Claus Richterich
richterich@hitnet.rwth-aachen.de
Diego Biurrun
diego@pool.informatik.rwth-aachen.de
Stefan Jacobs
Stefan.Jacobs@post.rwth-aachen.de
Stefan Schiffer
dr.stf@web.de
Thomas Deselaers
Thomas@Deselaers.de
Tran Huy Nguyen
TranHuy.Nguyen@gmx.net

0.1 1. Übung

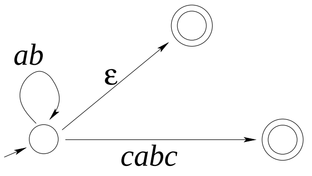
Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

1. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

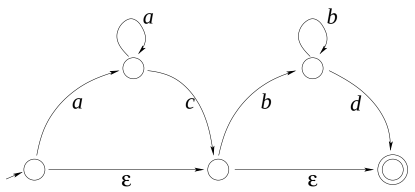
Aufgabe 1: (3 Punkte)

Konstruieren Sie (siehe Beweis von Lemma 1.10. der Vorlesung) zu dem unten graphisch angegebenen NEA mit Wortübergängen eine äquivalenten ϵ-NEA.



Aufgabe 2: (3 Punkte)

Konstruieren Sie (siehe Beweis von Lemma 1.12. der Vorlesung) zu dem unten graphisch angegebenen ϵ-NEA eine äquivalenten NEA.



Aufgabe 3: (7 Punkte)

Es sei $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ ein Transitionssystem. Die Schrittrelation $\vdash_{\mathcal{A}} \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$ sei wie folgt definiert:

$$(q, w) \vdash_{\mathcal{A}} (q', v) \text{ genau dann, wenn } \text{ es } a \in \Sigma \text{ gibt mit } w = av \text{ und } (q, a, q') \in \Delta$$

Es sei $\vdash^*_{\mathcal{A}}$ die reflexiv-transitive Hülle von $\vdash_{\mathcal{A}}$.

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(a) $w \in L(\mathcal{A})$ genau dann, wenn für jedes $q \in I$ und $q' \in F$ gilt: $q \xrightarrow[\mathcal{A}]{w} q'$.

(b) $w \in L(\mathcal{A})$ genau dann, wenn

- $w = \epsilon$ und $I \cap F \neq \emptyset$ oder
- es gibt $q_0 \in I$, $q_1 \in Q$, $q_2 \in F$, $a \in \Sigma$ und $v \in \Sigma^*$ mit $w = av$, $q_0 \xrightarrow[\mathcal{A}]{a} q_1$ und $q_1 \xrightarrow[\mathcal{A}]{v} q_2$.

(c) $w \in L(\mathcal{A})$ genau dann, wenn es $q_0 \in I$ und $q \in F$ gibt, so daß $(q_0, w) \vdash^*_{\mathcal{A}} (q, \epsilon)$.

0.2 2. Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

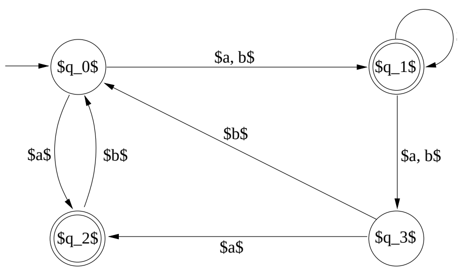
Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

2. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“

Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 5: (6 Punkte)

Geben Sie einen DEA an, der zu folgendem NEA äquivalent ist. Verwenden Sie dazu die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 2.4.



Aufgabe 6: (4 Punkte)

Ein NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \Delta, F)$ heißt *fast-deterministisch*, falls es zu jedem $q \in Q$ und jedem $a \in \Sigma$ höchstens ein $q' \in Q$ gibt mit $(q, a, q') \in \Delta$. Zeigen Sie: Zu jedem fast-deterministischen NEA gibt es einen äquivalenten DEA mit höchstens $|Q| + 1$ Zuständen.

Aufgabe 7: (8 Punkte)

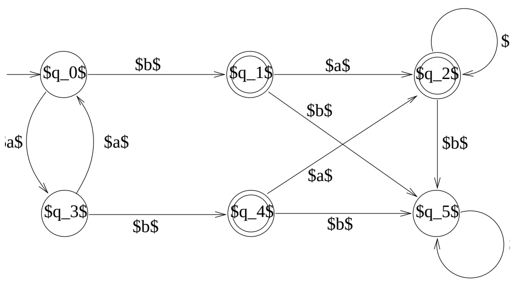
Es sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, I, \delta, F)$ ein DEA. Ergänzen Sie den Beweis von Lemma 2.9, indem Sie zeigen:

(a) Für alle $\{u, v\} \subseteq \Sigma^*$ und $q \in Q$ gilt $\delta(q, uv) = \delta(\delta(q, u), v)$.

(b) Ist $\sim_k = \sim_{k+1}$, so ist $\sim_k = \sim_{\mathcal{A}}$.

Aufgabe 8: (7 Punkte)

Berechnen Sie für folgenden DEA $\mathcal{A}$ die Äquivalenzrelation $\sim_{\mathcal{A}}$ und geben Sie den Quotientenautomaten $\widetilde{\mathcal{A}}$ (nach Definition 2.10) an.



0.2.1 zu Aufgabe 5:

Gesucht: DEA A' mit $L(A) = L(A')$

Weg: Konstruktion aus Satz **??**

$A' = (Q', \{a, b\}, I', \delta, F')$

wobei für $q' \in Q'$ gilt: $q' \subseteq \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$

Wir berechnen zunächst δ :

	$q \in 2^Q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
1	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$
2	$\{q_i\}$	$\{q_3\}$	$\{q_1, q_3\}$
3	$\{q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
4	$\{q_2\}$	$\emptyset$ leere Menge !	$\{q_0\}$
5	$\{q_1, q_2\}$	$\{q_3\} = \delta(\{q_1\}, a) \cup \delta(\{q_2\}, a)$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
6	$\{q_1, q_3\}$	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
7	$\{q_2, q_3\}$	$\{q_2\}$	$\{q_0\}$
8	$\{q_0, q_1, q_3\}$	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
9	$\{q_1, q_2, q_3\}$	$\{q_{irgendwas} \cdots\}$	$\{q_0, q_1, q_3\}$
10	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$I' = (\{q_0\} = \{I\}$ d. NEAs

$F' = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 = q \in Q' \mid q \cap F \neq \emptyset$

0.2.2 zu Aufgabe 6:

Es sei

$A = (Q, \Sigma, \underbrace{I}_{z.B\{q_0\}}, \Delta, F)$

ein fast deterministischer NEA.

Wir definieren $A' = (Q \cup \{\downarrow\}, \Sigma, I, \delta, F)$, wobei

$\delta(q, a) = q'$ gdw.

- $(q, a, q') \in \Delta$ oder
- es gibt kein $q'' \in Q$ mit $(q, a, q'') \in \Delta$ und $q' = \downarrow$.

Insbesondere ist $\delta(\downarrow, a) = \downarrow$ für jedes $a \in \Sigma$.

Behauptung:

1. A' ist DEA.
2. $L(A) = L(A')$.

zu 1:

1. A' ist NEA, da A' endlich viele Zustände hat.
2. Angenommen, es gäbe $q' \neq q''$, $a \in \Sigma$ mit $\delta(q, a) = q'$ und $\delta(q, a) = q''$.
   Da A fast deterministisch, ist $\{q', q''\} \leq Q$ nicht möglich.
   Es müsste $q = \downarrow$ oder $q'' = \downarrow$, aber das ist nach Definition von δ nicht möglich.
3. laut Definition von δ ist A' vollständig, d.h. zu jedem $q \in Q \cup \{\downarrow\}, a \in \Sigma$ gibt es $q' \in Q \cup \{\downarrow\}$ mit $\delta(q, a) = q'$. Also ist A' DEA.

zu 2:
$w \in L(A) \Rightarrow w \in L(A')$, da δ eine Erweiterung von ??? Δ und End- und Anfangszustände von A' und A sind gleich.
Sei $w \in L(A')$, d.h. es gibt Pfad $\underbrace{q_0}_{\in I} \xrightarrow{\omega}_{A'} q_n \in F$.
Der Zustand $\downarrow$ kann nicht auf diesem Pfad liegen:

- $\downarrow \notin I$
- $\downarrow \notin F$
- und da es kein $q \in Q$ gibt: $\delta(\downarrow, a) = q$, kann $\downarrow$ auch nicht in der Mitte dieses Pfades liegen.

Also gibt es Pfad $q_0 \xrightarrow{\omega} q_n$ auch in A, d.h. $\omega \in L(A)$.

0.2.3 zu Aufgabe 7:

Sei $A = (Q, \Sigma, I, \delta, F)$ ein DEA.

1. a.)ZuZeigen : Für alle $u, v \in \Sigma^*$ und $q \in Q$ gilt

   $$\delta(q, uv) = \delta(\delta(q, u), v)\text{(*)}$$

   Beweis: Per Induktion über $|v|$.

   Ind.Anf. : $|v| = 0$, d.h. $v = \varepsilon$

   $$\delta(q, uv) \underbrace{=}_{v=\varepsilon} \delta(q, u) \underbrace{=}_{Def2.3} \delta(\delta(q, u, \varepsilon)) \underbrace{=}_{v=\varepsilon} \delta(\delta(q, u), v).$$

   Ind.Schritt : Ind.Vor. Es gelte (*) für alle $v \in \Sigma^*$ mit $|v| \leq n$.
   ZuZeigen: Dann gilt (*) für alle $v \in \Sigma^*$ mit $|v| = n + 1$.
   Sei also $v = \omega a$ mit $|\omega| \leq n$ und $a \in \Sigma$.

   $$\delta(q, u\omega a) \underbrace{=}_{Def2.3} \delta(\delta(q, u\omega), a) \underbrace{=}_{Ind.Vor.}$$

   $$\delta(\delta(\delta(q, u), \omega), a) \underbrace{=}_{Def2.3} \delta(\delta(q, u), \omega a)$$

   .

2. b.)ZuZeigen :Ist $\cong_k=\cong_{k+1}$, so ist $\cong_k=\cong_A$.
   Beweis:Es sei $\cong_k=\cong_{k+1}$.
   "$\supseteq$" Wir zeigen, dass $\cong_A\subseteq\cong_k$ per Induktion über l.

   Ind.Anf. : Sei $l=0$ und $p\cong_A q$, so gilt

$$(p\in F\text{gdw.}q\in F)$$

   [sonst wäre $\varepsilon\in L(A_p)$ und ε] und damit $p\cong_0 q$.

   Ind.Schritt : Es gelte $\cong_A\subseteq\cong_{l'}$ für alle $l'\leq l$.
   Dann ist $\cong_A\subseteq\cong_{l+1}$, denn :
   Sei $p\cong_a q$. Laut Ind.Vor. gilt $p\cong_l p$.
   Angenommen, es gibt $a\in\Sigma$.

$$\delta(p,a)\ncong_l\delta(q,a)$$

   Dann wäre (Lt. Ind.Vor.) $\delta(p,a)\ncong_A\delta(q,a)$. D.h. es gibt $\omega\in\Sigma^*$.
   (O.B.d.A.) $\omega\in L(A_{\delta(p,a)})$ und $\omega\notin L(A_{\delta(q,a)})$. Also ist $a\omega\in L(A_p)$ und $a\omega\notin L(A_q)$.

0.3 3. Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

3. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 9: (8 Punkte)

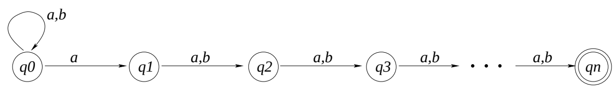
Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie NEAs $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$ an mit

(a) $L(\mathcal{A}_1) = \{w \in \Sigma^* \mid (|w|_a$ ist ungerade und $|w|_b$ ist gerade) oder es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv\}$

(b) $L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \Sigma^* \mid$ (es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ubabcv$ und es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$) und es gibt kein $u \in \Sigma^*$ mit $w = au\}$

Aufgabe 10: (10 Punkte)

Für $n \geq 1$ sei der Automat $\mathcal{A}_n$ wie folgt gegeben:



(a) Beschreiben Sie $L(\mathcal{A}_n)$.

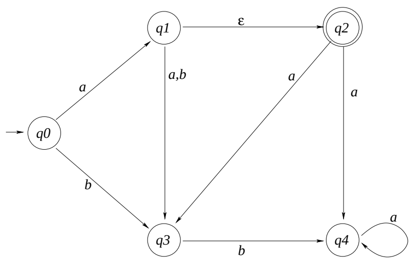
(b) Geben Sie einen zu $\mathcal{A}_3$ äquivalenten DEA $\mathcal{A}'$ an und berechnen Sie zu $\mathcal{A}'$ den Quotientenautomaten $\widetilde{\mathcal{A}'}$ und den reduzierten DEA $\mathcal{A}'_{\text{red}}$.

(c) Beweisen Sie, daß jeder zu $\mathcal{A}_n$ äquivalente DEA mindestens 2^n Zustände hat, indem Sie zeigen,

- daß für je zwei Wörter $x, y \in \{a, b\}^n$ gilt: Aus $x \neq y$ folgt $x \not\simeq_{L(\mathcal{A}_n)} y$
- und dann Lemma 2.15.4 anwenden.

Aufgabe 11: (6 Punkte)

Der ϵ-NEA $\mathcal{A}$ sei wie folgt gegeben:

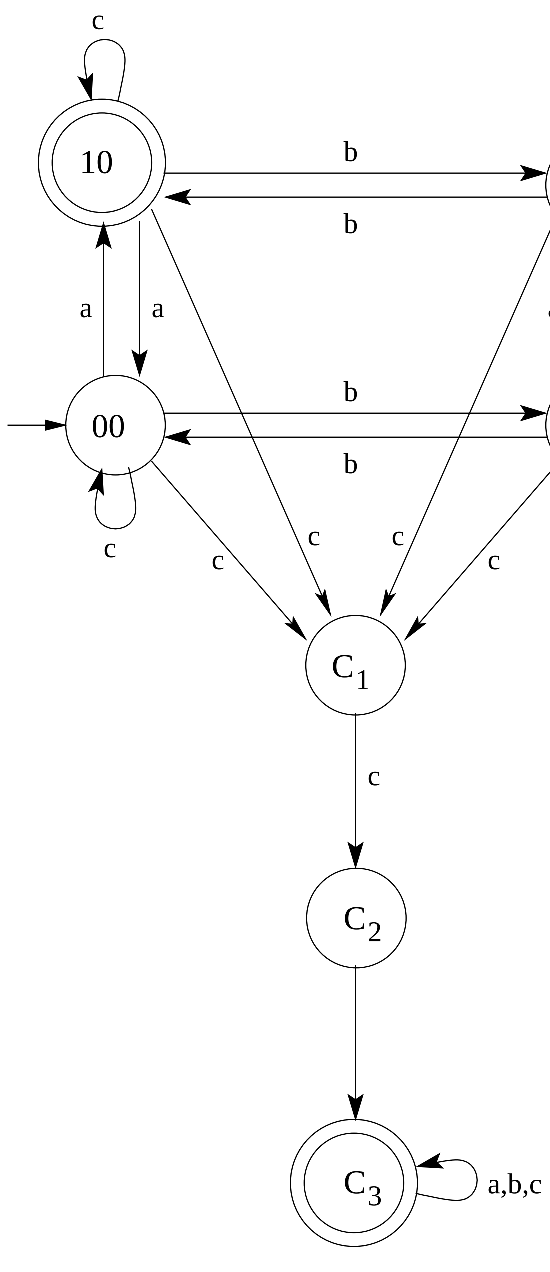


(a) Konstruieren Sie einen zu $\mathcal{A}$ äquivalenten DEA $\mathcal{A}'$.

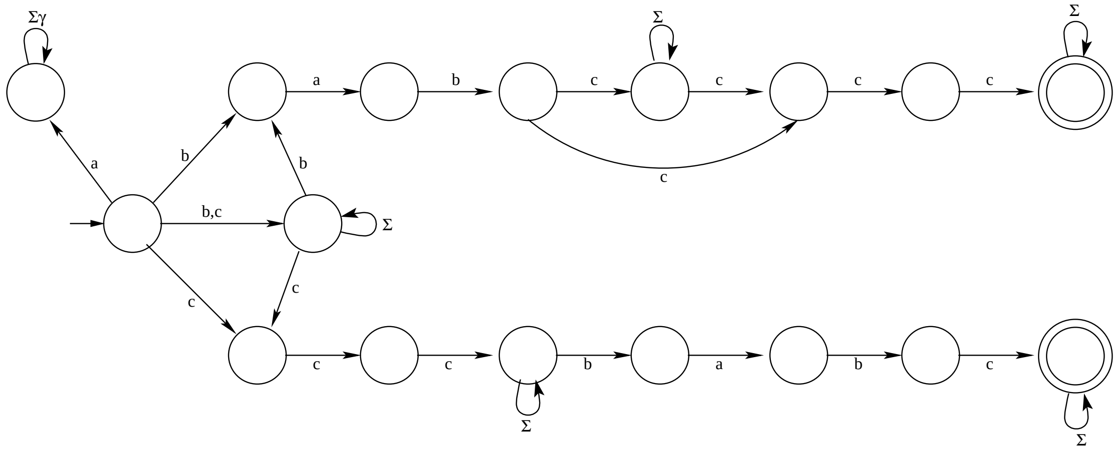
(b) Geben Sie den zu $\mathcal{A}'$ reduzierten DEA $\mathcal{A}_{\text{red}}$ an.

0.3.1 zu Aufgabe 9

a)



b)



0.3.2 zu Aufgabe 10

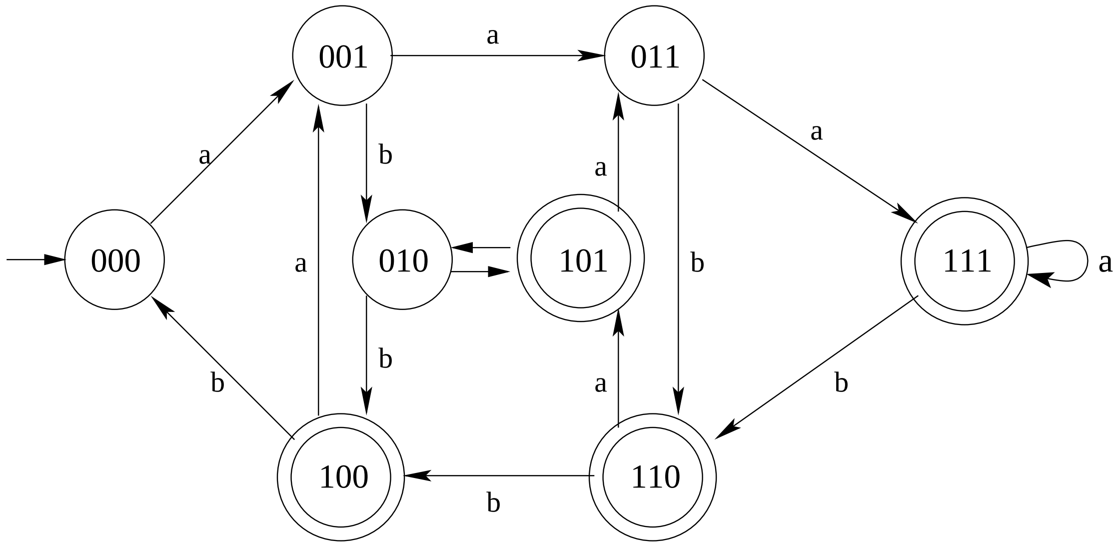
Für $n \geq 1$ sei A_n gegeben

a)

$L(A_n) = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid \omega$ hat an n-letzter Stelle ein $a\} = \{\omega \in \{a,b\}^* \mid \exists u \in \Sigma^*, v \in \Sigma^*$ mit $\omega = uav$ und $|v| = n-1\}$

b)

	q	$\delta(q,a)$	$\delta(q,b)$
000	0	$0,1$	0
001	$0,1$	$0,1,2$	$0,2$
010	$0,2$	$0,1,3$	$0,3$
100	$0,3$	$0,1$	0
011	$0,1,2$	$0,1,2,3$	$0,2,3$
101	$0,1,3$	$0,1,2$	$0,2$
110	$0,2,3$	$0,1,3$	$0,3$
111	$0,1,2,3$	$0,1,2,3$	$0,2,3$



Gesucht: $\sim_A \Rightarrow$ Berechne $\sim_0, \sim_1, \sim_2, \ldots$

$\sim_0$ Klassen $\{000, 001, 010, 011\}$ $\{100, 101, 110, 111\}$

$\sim_1$ Klassen $\{000, 001\}, \{010, 011\}$ $\{100, 101\}, \{110, 111\}$

$\sim_1$ Klassen $\{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\}$ $\{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\}$

Fertig, feiner geht es nicht. Der gemalte ist der reduzierte!

c)

z. z: Jeder zu A_n äquivalente DEA hat mind. 2^n Zustände.

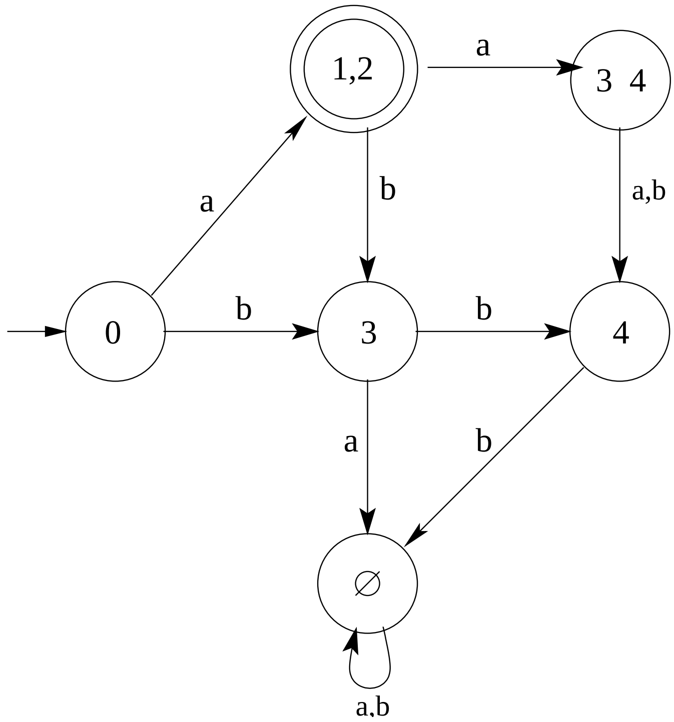
Für je zwei Wörter $x \neq y$ mit $x, y \in \{a, b\}^n$ gilt: $x \ncong_{L(A_n)} y$ Sei $x \neq y$ mit $x, y \in \{a, b\}^n$. Das heißt für $a_i, b_i \in \{a, b\}$ lassen sich x, y schreiben als

$$x = a_1 \ldots a_n$$

$$y = b_1 \ldots b_n$$

Da $x \neq y$ ist, gibt es $i \in \{1, \ldots, n\}$ mit $a_i \neq b_i$. oBdA sei $a_i = a$ und $b_i = b$ Damit ist $x \cdot b^{i-1} \in L(A_n), y \cdot b^{i-1} \notin L(A_n)$ Daher ist $x \ncong_{L(A_n)} y$. Da x, y beliebig gewählt wurden, gibt es mind. 2^n $\cong_{L(A_n)}$-Klassen (2^n ist Anz. der Wörter aus $\{a, b\}$). Mit Lemma **??** hat jeder DEA, der zu A_n äquivalent ist, mind. 2^n Zustände.

DEA A': nach Potenzmengenkonstruktion

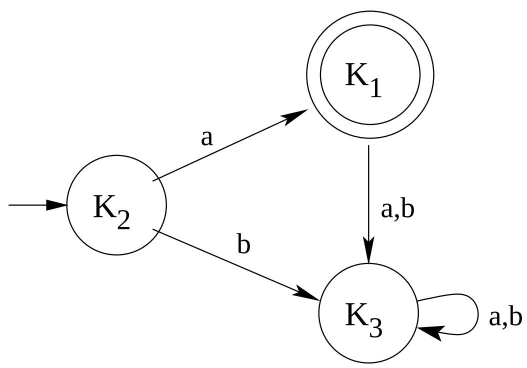


Minimal:

$\sim_0$-Klasse $\{12\}, \{0, 3, 4, 34, \emptyset\}$

$\sim_1$-Klasse $\{12\}, \{0\}, \{3, 4, 34, \emptyset\}$

$\sim_2$-Klasse $\{12\}, \{0\}, \{3, 4, 34, \emptyset\}$



Da alle Zustände in $\tilde{A}$ erreichbar ist $A_{red} := \tilde{A}$

0.4 4.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

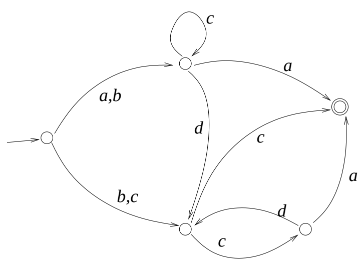
Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

4. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“

Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 12: (8 Punkte)

Es sei folgender NEA $\mathcal{A}$ gegeben:



Geben Sie für jedes $w \in \{adc, cda, bcdc, acdc\}$ alle Zerlegungen $w = xyz$ mit $x, z \in \Sigma^*$, $y \in \Sigma^+$ an, so daß für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt: $xy^kz \in L(\mathcal{A})$. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 13: (6 Punkte)

Es sei $L := \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$.

Wenden Sie den Satz von Nerode (Satz 2.18 der Vorlesung) an, um nachzuweisen, daß L nicht erkennbar ist.

Aufgabe 14: (6 Punkte)

Es sei L wie in Aufgabe 13 gegeben. Wenden Sie die verschärfte Version des Pumping-Lemmas (Lemma 3.5 der Vorlesung) an, um nachzuweisen, daß L nicht erkennbar ist.

Aufgabe 15: (4 Punkte)

Kann man das Pumping-Lemma auch anwenden, um von einer Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ nachzuweisen, daß L erkennbar ist? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 16: (Zusatzaufgabe:[1] 4 Punkte)

Es sei $\mathcal{A}$ ein NEA mit n Zuständen und $L = L(\mathcal{A})$. Zeigen Sie: L ist unendlich genau dann, wenn es ein $w \in L$ gibt mit $|w| \geq n$.

Folgt aus dieser Aussage, daß für eine durch einen NEA gegebene Sprache entscheidbar ist, ob sie unendlich ist?

[1] Für Zusatzaufgaben gibt es die angegebene Punktzahl, allerdings wird diese nicht zu den insgesamt erreichbaren Punkten dazugerechnet.

Hier fehlt noch die Musterlösung der 4. Übung

0.5 5.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

5. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 17: (5 Punkte)

Vervollständigen Sie den Beweis von Satz 4.1.3. der Vorlesung, indem Sie zeigen, daß für den Produktautomaten $\mathcal{A}$ von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ gilt: $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}_1) \cap L(\mathcal{A}_2)$.

Aufgabe 18: (7 Punkte)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Verwenden Sie die Konstruktionen aus Satz 4.1., um einen Automaten für $L := L_1 \cap L_2 \cap \overline{L_3}$ anzugeben, wobei

$$\begin{array}{rcl}
L_1 & := & \{w \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt } u, v \in \Sigma^* \text{ mit } w = ubcv\} \\
L_2 & := & \{w \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt } u, v \in \Sigma^* \text{ mit } w = uccv\} \\
L_3 & := & \{w \in \Sigma^* \mid \text{ es gibt } u \in \Sigma^* \text{ mit } w = au\}
\end{array}$$

Aufgabe 19: (6 Punkte)

Motivation: Um zu einem NEA $\mathcal{A}$ einen Automaten für $\overline{L(\mathcal{A})}$ zu konstruieren, wurde im Beweis von Satz 4.1.2 zunächst ein zu $\mathcal{A}$ äquivalenter DEA konstruiert, bei dem dann End- mit Nichtendzuständen vertauscht wurden. Überzeugen Sie sich, daß das Determinisieren tatsächlich nötig ist.

Für einen NEA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \Delta, F)$ definieren wir

$$\widehat{\mathcal{A}} := (Q, \Sigma, q_0, \Delta, Q \setminus F).$$

Geben Sie NEAs $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ an mit

(a) $L(\widehat{\mathcal{A}})\overline{L(\mathcal{A})}$.

(b) $L(\widehat{\mathcal{A}}) \cap L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Tip: Es gibt derartige Automaten mit drei Zuständen

Aufgabe 20: (6 Punkte)

Geben Sie zu jedem der regulären Ausdrücken r_i einen NEA $\mathcal{A}_i$ an mit $L(\mathcal{A}_i) = L(r_i)$:

(a) $r_1 = (ab)^*$

(b) $r_2 = (a \cdot (b + c) \cdot a^*) + a^*$

(c) $r_3 = (bb + cc^*)^*$

0.5.1 zu Aufgabe 12+5:

[»Wiederholung der Definition aus Satz **??**«]

zu zeigen: $L(A) = L(A_1) \cap L(A_2)$.

Beweis: "$\subseteq$" Sei $w \in L(A)$

- Falls $w = \varepsilon$, so ist $(q_{01}, q_{02}) \in F_1 \times F_2$, d.h. $q_{01} \in F_1$ und $q_{02} \in F_2$, daher gilt $\varepsilon \in L(A_1) \cap L(A_2)$.
- Falls $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$, so gibt es einen Pfad in A:

$$(q_{01}, q_{02}) \xrightarrow{a_1} (q_{11}, q_{12}) \xrightarrow{a_2} (q_{21}, q_{22}) \ldots \xrightarrow{a_n} (q_{n1}, q_{n2})$$

Laut Definition von Δ ist offensichtlich

$$q_{0i} \xrightarrow{a_1} q_{1i} \xrightarrow{a_2} q_{2i} \ldots \xrightarrow{a_n} q_{ni}$$

akzeptierter Pfad für w in A_i (für $i \in \{1, 2\}$), daher ist $w \in L(A_1) \cap L(A_2)$.

"$\subseteq$" Sei $w \in L(A_1) \cap L(A_2)$, d.h. $w \in L(A_1)$ und $w \in L(A_2)$.

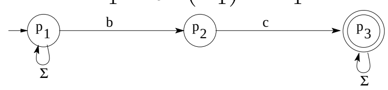
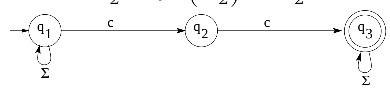
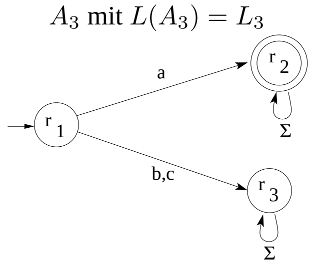
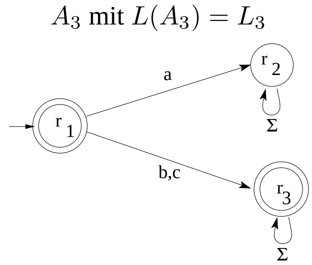
- Falls $w \in \varepsilon$, so ist $q_{01} \in F_1$, $q_{02} \in F_2$, also ist $(q_{01}, q_{02} \in F_1 \times F_2)$ und $w \in L(A)$.
- Falls $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$, dann gibt es akzeptierte Pfade

$$q_{0i} \xrightarrow{a_1} q_{1i} \xrightarrow{a_2} q_{2i} \ldots \xrightarrow{a_n} q_{ni}$$

für $i \in \{1, 2\}$ in A_i. Daher ist:

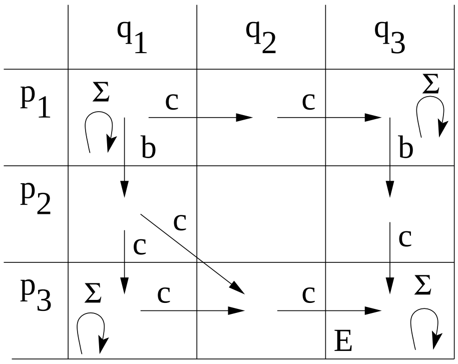
$$(q_{01}, q_{02}) \xrightarrow{a_1} (q_{11}, q_{12}) \xrightarrow{a_2} (q_{21}, q_{22}) \ldots \xrightarrow{a_n} (q_{n1}, q_{n2})$$

akzeptierter Pfad für w in A, also ist $w \in L(A)$.

A_1 mit $L(A_1) = L_1$ 	A_2 mit $L(A_2) = L_2$ 
DEA A_3 mit $L(A_3) = L_3$ 	A_3 mit $L(A_3) = L_3$  (ohne r_2: NEA reicht; mit r_2: DEA auch ok)

0.5.2 zu Aufgabe 13+5:

Produktautomat A für A_1 und A_2



A mit $L(A) = L_1 \cap L_2$

0.6 6.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

6. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 21: (8 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussage:
Es sei L eine erkennbare Sprache. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so daß gilt: jedes Wort $w \in L$ mit $|w| \geq n$ läßt sich zerlegen in $w = xyz$ mit

- $y \neq \epsilon$,
- $|xy| \leq n$ und
- $xy^k z \in L$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Tip: Diese Aussage folgt leicht aus dem Pumping-Lemma in verschärfter Form (Lemma 3.5), man kann den Beweis aber auch analog zum Beweis des Pumping-Lemmas in einfacher Form (Lemma 3.1) führen.

Aufgabe 22: (9 Punkte)

Es sei $\Sigma = \{a, b, c\}$. Geben Sie für jede der folgenden Sprache L_i einen regulären Ausdruck r_i an mit $L_i = L(r_i)$. Erklären Sie die Wahl Ihrer regulären Ausdrücke r_i.

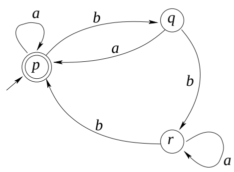
(a) $L_1 = \{w \in \Sigma^* \mid w$ beginnt mit a und $|w|_b$ ist gerade $\}$

(b) $L_2 = \{w \in \Sigma^* \mid$ es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ubabcv$ und es gibt $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = ucccv$ und es gibt kein $u \in \Sigma^*$ mit $w = au\}$

(c) $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid$ es gibt kein $u, v \in \Sigma^*$ mit $w = uaav\}$

Aufgabe 23: (7 Punkte)

Verwenden Sie die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 5.5 (Satz von Kleene) und das Lemma 5.7 (Arden-Lemma), um einen regulären Ausdruck r anzugeben, der die von dem folgenden Automaten $\mathcal{A}$ akzeptierte Sprache repräsentiert (das heißt, es soll $L(r) = L(\mathcal{A})$ gelten).



Aufgabe 24: (Zusatzaufgabe: 8 Punkte)

Es sei Σ gegeben. Geben Sie eine geeignete Datenstruktur für DEAs und ein Verfahren an, das für einen in dieser Datenstruktur repräsentierten DEA $\mathcal{A}$ und ein Wort $w \in \Sigma^*$ entscheidet, ob $w \in L(\mathcal{A})$ gilt und dessen Laufzeit in $\mathcal{O}(|w|)$ ist.

Beachten Sie, daß die Laufzeit des Verfahrens unabhängig von der Anzahl der Zustände und der Anzahl der Endzustände sein soll.

0.6.1 zu Aufgabe 21:

Wir zeigen, daß diese Aussage Konsequenz des Lemmas 3.5 ist.

<u>Beweis:</u> Sei $L \subseteq \Sigma^*$ erkennbar und $n \in I - N$ Pumpkonstante für L nach Lemma 3.5. Sei $w \in L$ mit $|w| \geq n$ beliebig. Wir zerlegen $w = uvw'$ mit

- $u = \varepsilon$
- $|v| = n$ (damit ist $|v| \geq n$)
- und w' derart, daß $w = uvw'$ gilt.

Mit Lemma 3.5 gibt es eine Zerlegung von v in $v = xyz$ mit $|y| \geq 1$ und $uxy^kzw' = xy^kzw' \in L$ für alle $k \in I - N$.

Da $|v| = n$ und $xyz = v$, gilt $|xy| \leq n$. Also ist $w = xyz'$ mit $z' = zw'$. Zerlegung der gewünschten Form, d.h. $xy^kz' \in L$, für alle $k \in I - N$, $|xy| \leq n$, $y \neq \varepsilon$.

0.6.2 zu Aufgabe 22:

1. $r_1 = a \cdot ((a + c) + (a + c)^*b(a + c)^*b(a + c)^*)^*$
2. $r_2 = (b+c) \cdot (\Sigma^*babc\Sigma^*ccc + \Sigma^*babccc\Sigma^* + \Sigma^*ccc\Sigma^*babc\Sigma^*) + babc\Sigma^*ccc\Sigma^* + babccc\Sigma^* + ccc\Sigma^*babc\Sigma^*$
3. Idee: Zerlege $w \in L_3$ folgendermaßen:

$(b + c)^*$	$(a(b + c)(b + c)^*$	$a(b + c)(b + c)^*$	a oder ε

$r_3 = (b + c)^* \cdot (a(b + c)(b + c)^*)^* \cdot (\varepsilon + a)$

0.6.3 zu Aufgabe 23:

(1) $L_p = aL_p \cup bL_q \cup \{\varepsilon\}$

(2) $L_q = bL_r \cup aL_p \cup \emptyset$

(3) $L_r = aL_r \cup bL_p \cup \emptyset$

(3) liefert mit Ardenlemma (AL)

(3') $L_r = a^*bL_p$

(3') in (2) einsetzen:

(2') $L_q = ba^*bL_p \cup aL_p$

(2') in (1) einsetzen:

$L_p = aL_p \cup b(ba^*bL_p \cup aL_p) \cup \{\varepsilon\}$

umformen liefert

$L_p = aL_p \cup bba^*bL_p \cup baL_p \cup \{\varepsilon\} = (a \cup bba^*b \cup ba)L_p \cup \{\varepsilon\}$

AL auf (1') anwenden liefert:

$L_p = (a \cup bba^*b \cup ba)^* \cdot \{\varepsilon\} = (a \cup bba^*b \cup ba)^*$

Also ist r regulärer Ausdruck, der $L(A)$ repräsentiert.

$$r = (a + bba^*b + ba)^*$$

0.6.4 zu Aufgabe 24:

Weg:

- Zustände nicht als Menge/Liste darstellen sondern als Array
- Direkter Zugriff auf Anfangszustände
- Flag für Endzustand

Automat	q_0	q_1		q_n
Endzustand	0/1	0/1		0/1
	$a_1 q_{01}$	$a_1 q_{11}$		
	$a_2 q_{02}$			
	$a_m q_{0m}$	$a_m q_{1m}$		

Automat$[i, 0] = \begin{cases} 1 & \text{falls } q_i \in F \\ 0 & \text{falls } q_i \notin F \end{cases}$

$j \geq 1$

Automat$[i, j] = k$ falls $(q_i, a_j, q_k) \in \delta$

```
procedure test (w)
  q:=0
while w ≠ ε DO
  a:= erster-Buchstabe(w);
  q:= Automat[q,a];
  w:= ohne-ersten-Buchstaben(w);
ENDO;
RETURN Automat[q,0];
```

0.7 7.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

7. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen"
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Im Folgenden steht $u \longrightarrow v_1 \mid \cdots \mid v_n$ für die Folge von Produktionen $u \longrightarrow v_1, \ldots, u \longrightarrow v_n$.

Aufgabe 25: (15 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik $G_0 = (\{S, T, U, V, R\}, \{a, b\}, P_0, S)$ mit $P_1 = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & \epsilon \mid aSb \mid T \mid R \\ T & \longrightarrow & bbT \mid U \\ U & \longrightarrow & aaU \mid bbT \\ V & \longrightarrow & bSa \\ R & \longrightarrow & bSa \mid \epsilon\} \end{array}$$

(a) Geben Sie zu G_0 alle nicht-terminierenden und unerreichbaren Zustände an und geben Sie eine zu G äquivalente reduzierte Grammtik G_1 an.

(b) Geben Sie zu G_1 ein äquivalente Grammatik G_2 an, die keine Regeln der Form $A \longrightarrow \epsilon$ für $A \in N \setminus \{S\}$ enthält.

(c) Falls $\epsilon \in L(G_2)$ ist, so geben Sie zu G_2 eine äquivalente Grammatik G_3 an, die die Produktion $S_3 \longrightarrow \epsilon$ für das Startsymbol S_3 von G_3 enthält und in deren Produktionen S_3 nicht auf der rechten Seite auftaucht.

Sonst sei $G_3 = G_2$.

(d) Geben Sie zu G_3 eine äquivalente Grammatik G_4 an, die keine Produktionen der Form $A \longrightarrow B$ mit Nichtterminalsymbolen A, B enthält.

(e) Geben Sie zu G_4 eine äquivalente Grammatik G_5 in Chomsky Normalform an.

Aufgabe 26: (9 Punkte)

Im Folgenden haben wir drei Grammatiken angegeben. Geben Sie zu jeder dieser Grammatiken G_i

- das maximale i an, so daß G eine Grammatik vom Typ-i ist und
- das maximale j an, so daß $L(G)$ eine Typ-i Sprache ist und beschreiben Sie $L(G)$.

Begründen Sie Ihre Antworten (unbegründete Antworten werden mit 0 Punkten bewertet).

(a) $G_1 = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b\}, P_1, S)$ mit $P_1 = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & S_1a \mid aS_1 \mid bS \mid Sb \mid \epsilon \\ S_1 & \longrightarrow & S_2a \mid aS_2 \mid bS_1 \mid S_1b \\ S_2 & \longrightarrow & Sa \mid aS \mid bS_2 \mid S_2b\} \end{array}$$

(b) $G_2 = (\{S, S_1, S_2\}, \{a, b\}, P_2, S)$ mit $P_2 = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & S_1 \mid \epsilon \\ S_1 & \longrightarrow & ab \mid aS_2b \\ aS_2 & \longrightarrow & aaS_2b \mid a\} \end{array}$$

(c) $G_3 = (\{S, T\}, \{a, b\}, P_3, S)$ mit $P_3 = \{$

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & aSb \mid aTb \mid \epsilon \\ aTb & \longrightarrow & T \mid S\} \end{array}$$

0.7.1 zu Aufgabe 25:

1. Zuerst terminierende Symbole berechnen:
   $T_1 = \{S, R\}$
   $T_2 := T_1 \cup \{V\} \quad | \; V \to aSb, S \in T_1$
   $T_3 := T_2$
   $G'_0 := (\{S, R, V\}, \underbrace{\Sigma}_{\{a,b\}}, P'_0, S)$
   $P'_0 = \{S \to \varepsilon \mid aSb \mid R \quad V \to bSaR \to bSa \mid \varepsilon\}$
   Erreichbare Symbole berechnen:
   $E_0 := \{S\}$
   $E_1 := E_0 \cup \{R\}$
   $E_2 := E_1 \cup \emptyset = E_1$
   $G_1 = (\{S, R\}, \Sigma, P_1, S)$
   $P_1 = \{S \to \varepsilon \mid aSb \mid R, R \to bSa \mid \varepsilon\}$.

2. $N_1 = \{S, R\} = N_2$
   $G_2 = (\{S, R\}, \Sigma, P_2, S)$
   $P_2 = \{S \to \varepsilon \mid aSb \mid R \mid \underbrace{ab}_{\text{da } S \in N_k \text{ und } S \to aSb \in P_1} \quad R \to bSa \mid \underbrace{ba}_{S \in N_k \text{ und } R \to bSa \in P_1}\}$.

3. G_2 ist noch nicht ε-frei, da $S \to \varepsilon \in P_2$ und S auf einer rechten Produktionsseite auftaucht.
   $G_3 = (\{S_3, S, R\}, \Sigma, P_3, S_3)$
   $P_3 = \{S_3 \to S \mid \varepsilon, S \to aSb \mid R \mid ab, R \to bSa \mid ba\}$
   Damit ist G_3 ε-frei.

4. In G_3 gibt es Kettenregeln, z.B. $S \to R$.
   $N(S_3) = \{S_3, S, R\}$ $N(R) = \{R\}$ $N(S) = \{S, R\}$
   $G_4 = (\{S_3, S, R\}, \Sigma, P_4, S_3)$
   $P_4 = \{\underbrace{S_3 \to aSb|ab}_{\text{von } S \in N(S_3)} \mid \underbrace{bSa|ba}_{R \in N(S_3)} \mid \underbrace{\varepsilon}_{S_3 \in N(S_3)}$
   $S \to aSb|ab|bSa|ba$
   $R \to bSa|ba\}$.

5. G_5 in Chomsky-NormalForm
   $G_5 = (\{S_3, S, R\}, X_a, X_b, \Sigma, P_5, S_3)$
   $P_5 = \{X_a \to a, X_b \to b \; S_3 \to A \underbrace{SB}_{C_b} \; S_3 \to X_aC_b|X_aX_b|X_aC_a|X_bX_a|\varepsilon$
   $S \to X_aC_b|X_aX_b|X_aC_a|X_bX_a$
   $C_b \to SX_b, C_a \to SX_a$
   $R \to X_bC_a|X_bX_a\}$.

0.7.2 zu Aufgabe 26:

1.
   - G_1 ist nicht Typ-3, da $S \to S_1a$ nicht von der Form $A \to nB$ mit $n \in \Sigma^*, B \in N$.
     G_1 ist vom Typ-2, da jede linke Regelseite nur aus einem Nichtterminalsymbol besteht.
   - **Beh:** $L(G_1) = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a \text{ ist Vielfaches von 3 }\}$
     "$\subseteq$": Sei $w \in L(G_1)$

– Für alle $u \in (\Sigma \cup N)^*$ mit $S \underset{G_1}{\overset{*}{\vdash}} u$ gilt $\underbrace{|u|_N}_{=1}$

– Da $w \in L(G_1)$, gibt es also Ableitung der Form

$$S \underset{G_1}{\vdash} u_1 \hat{S}_1 v_1 \underset{G_1}{\vdash} u_2 \hat{S}_2 v_2 \ldots \underset{G_1}{\vdash} u_n \hat{S}_n v_n \underset{G_1}{\vdash} w$$

mit $u_i, v_i \in \Sigma^*$ und

$*$ falls $\hat{S}_i = \hat{S}_{i+1}$ $|u_i v_i|_a = |u_{i+1} v_{i+1}|_a$

$*$ falls $\hat{S}_i \neq \hat{S}_{i+1}$, so ist $\hat{S}_i = S$ und $\hat{S}_{i+1} = S$ oder
$\hat{S}_i = S_1$, $\hat{S}_{i+1} = S_2$
$\hat{S}_i = S_2$, $\hat{S}_{i+1} = S$

und $|u_i v_i|_a + 1 = |u_{i+1} v_{i+1}|_a$ und $\hat{S}_n = S$
$\Rightarrow |w|_a$ Vielfaches von 3.

"$\supseteq$": Sei $w \in \{a, b\}^*$ mit $|w|_a$ Vielfaches von 3.

– falls $w = \varepsilon$, so ist $w \in L(G_1)$

– falls $w = a_1 \ldots a_n$ mit $a_i \in \{a, b\}$ mit $n \geq 1$

$$S \underset{G_1}{\vdash} w_1 \hat{S}_1 \underset{G_1}{\vdash} w_2 \hat{S}_2 \ldots \underset{G_1}{\vdash} w_n$$

mit $w_i = a_1 \ldots a_i$ und

$$\hat{S}_i =$$

$\Rightarrow w \in L(G_1)$.

Wir wissen, dass $L(G_1)$ Typ-3-Sprache, da wir NEA und regulären Ausdruck für $L(G_1)$ aus der Übung kennen.

2. • G_2 ist nicht Typ-2 wegen $aS_2 \rightarrow a$ in P_2
G_2 ist nicht Typ-1, da $aS_2 \rightarrow a$ nicht von der Form $uNv \rightarrow uwv$, wobei $u, v \in (\Sigma \cup N)^*$ und $|w| \geq 1$
Also ist G_2 Typ-0-Grammatik.

• "Offensichtlich" ist $L(G_0) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, und dies ist bekannterweise vom Typ-2.

3. • G_3 ist keine Typ-1-Grammatik wegen

$$\underbrace{a}_{u}\underbrace{T}_{N}\underbrace{b}_{v} \rightarrow \underbrace{T}_{u?wv?} \; |w| \geq 1$$

Also Typ-0-Grammatik.

• Da $L(G_3) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ gilt, ist $L(G_3)$ Typ-2-Sprache.

0.8 8.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

8. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen"
Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 27: (4 Punkte)

Im Beweis von Satz 8.6. werden, um zu einer kontextfreien Grammatik eine äquivalente reduzierte Grammatik zu konstruieren, zuerst die nichtterminierenden Symbole entfernt und danach die unerreichbaren.

Geben Sie eine (nicht-reduzierte) Grammatik an, die ein Beispiel dafür ist, daß das Vorgehen in umgekehrter Reihenfolge (erst unerreichbare, danach nichtterminierende Symbole entfernen) nicht zu einer reduzierten Grammatik führen muß.

Aufgabe 28: (6 Punkte)

Betrachten Sie die Grammatik $G = (\{S, U, X, T, V, W, Y, D, E, A, B, C\}, \Sigma, S, P)$ mit $\Sigma = \{a, b, c\}$ und

$$P = \{ \begin{array}{llllll} S \longrightarrow & UT \mid VW & U \longrightarrow & XB \mid AB & X \longrightarrow & AU \\ T \longrightarrow & TC \mid c & V \longrightarrow & AV \mid a & W \longrightarrow & BY \mid BC \\ Y \longrightarrow & WC & D \longrightarrow & BC \mid BB \mid b & E \longrightarrow & AB \mid AA \\ A \longrightarrow & a & B \longrightarrow & b & C \longrightarrow & c\} \end{array} .$$

Verwenden Sie den CYK-Algorithmus (mit der Matrix-Notation aus der Vorlesung), um für die folgenden Wörter w_i zu entscheiden, ob $w_i \in L(G)$ ist.

(a) $w_1 = aabcc$

(b) $w_2 = aabbcc$

Aufgabe 29: (6 Punkte)

Welche der folgenden Sprachen L_i ist kontextfrei? Zur Begründung Ihrer Antwort sollten Sie das Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen verwenden oder eine entsprechende kontextfreie Grammatik angeben.

(a) $L_1 = \{a^m b^n c^p d^q \in \{a, b, c, d\}^* \mid m, n, p, q \in \mathbb{N} \text{ und } m + n = p + q\}$

(b) $L_2 = \{a^m b^n \in \{a, b\}^* \mid m, n \in \mathbb{N} \text{ und } m^2 = n\}$

Aufgabe 30: (6 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen (damit Sie die regulären Ausdrücke nicht vergessen):

(a) $L(\emptyset^*) = \emptyset$

(b) für alle regulären Ausdrücke r_1, r_2 gilt: $L((r_1^* + r_2^*)^*) = L((r_1 + r_2)^*)$

(c) für alle regulären Ausdrücke r_1, r_2 gilt: $L(r_1^* \cdot r_2^*) = L((r_1 \cdot r_2)^*)$

Aufgabe 31: (6 Punkte)

Geben Sie einen Kellerautomaten $\mathcal{A}$ an mit $L(\mathcal{A}) = \{a^{2n} b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

0.8.1 zu Aufgabe 27:

$G = (\{S, T, V, W\}, \{a, b\}, P, S)$ mit $P = \{S \to T|a, T \to VW, V \to b\}$

- Erreichbare Symbole (anstatt sich zuerst um die Nichtterminalsymbole zu kümmern)
  $E_0 = \{S\}, E_2 = \{S, T\}, E_2 = \{S, T, V, W\} = N$
  $\Rightarrow$ alle Nichtterminalsymbole sind erreichbar.
- Terminierende Symbole
  $T_1 = \{S, V\}, T_2 = T_1$ fertig!
  $\Rightarrow G' := (\{S, V\}, \{a, b\}, \{S \to a; V \to b\}$
  Da V in G' nicht erreichbar ist, ist G' tatsächlich nicht reduziert.

0.8.2 zu Aufgabe 28:

a) CYK-Algorithmus auf $w_1 = aabcc$

	1	2	3	4	5
1	A, V	E, V	X	S	$\emptyset$
2	\	A, V	U, E	S	S
3	\	\	B, D	W, D	Y
4	\	\	\	T, C	T
5	\	\	\	\	T, C
	a	a	b	c	c

$\Rightarrow w_1 \notin G$

b) CYK-Algorithmus auf $w_1 = aabbcc$

	1	2	3	4	5	6
1	A, V	E, V	X	U	S	S
2	\	A, V	U, E	$\emptyset$	$\emptyset$	S
3	\	\	B, D	D	$\emptyset$	W
4	\	\	\	B, D	D, W	Y
5	\	\	\	\	T, C	T
6	\	\	\	\	\	T
	a	a	b	b	c	c

$\Rightarrow w_2 \in G$

0.8.3 zu Aufgabe 29:

a) $L_1 = \{a^n b^m c^p d^q | n + m = n + q\}$
$\{x^n y^n | n \geq 0\}$ ist kontexfrei
L_1 ist auch kontextfrei, denn $L_1 = L(G_1)$ mit $G_1 = (\{S, S_1, S_2, S_3\}\{a, b, c, d\}, P, S)$

$P = \{S \to aSd|S_1|S_2|S_3|\varepsilon$
$S_1 \to bS_1d|S_3|\varepsilon(n < q)$
$S_2 \to aS_2c|S_3|\varepsilon(n > q)$
$S_3 \to bS_3c|\varepsilon\}$

Es gilt: $L_1 = L(G_1)$, denn

"$\supseteq$" $S \overset{*}{\vdash} w$ mit $w \in (\Sigma \cup N)^*$ dann:

$w = uTv$ mit $T \in N$ und $u, v \in \Sigma^*$ und $|u| = |v|$ und $u \in L(a^*b^*)$ und $v = L(c^*d^*)$ und $T \to \varepsilon$ für alle $T \in N$

$\Leftarrow$ für $w \in \Sigma^*$ $\quad w \in L(G_1) \Leftarrow w \in L_1$

"$\subseteq$" Sei $w \in L_1$ mit $w = a^n b^m c^p d^q$ mit $n + m = p + q$

Dann gibt es für w folgende G_1 Ableitung:

$n < q$ $S \underset{G_1}{\overset{*}{\vdash}} a^n S d^n \underset{G_1}{\vdash} a^n S_1 d^n \underset{G_1}{\overset{*}{\vdash}} a^n b^{n-q} S_1 d^q \underset{G_1}{\vdash} a^n b^{q-n} S_3 d^q \underset{G_1}{\overset{*}{\vdash}} a^n b^{(n-q+p)=m} S_3 c^p d^q \underset{G_1}{\vdash} a^n b^m c^p d^q$

$n > q$ Anlog zu $n > q$

$n = q$:-)

b) $L_2 = \{a^m b^{m^2} | m \geq 0\}$ ist nicht kontextfrei.

Angenommen, L_2 wäre kontextfrei:

Sei $n_0 \in N$ eine ausreichende große Pumpkonstante für L_2.

Wähle $z = a^{n_0} b^{n_0^2} \in L$

Da $|z| \geq n_0$, gibt es laut "Pumping-Lemma für kontextfreie Sprchen" eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vwx| \leq n_0$ $\quad |vx| \geq 1$ und $uv^k wx^k y \in L$ für alle $k \in N$

Beonachtung: Da $L_2 \subseteq (a^* b^*)$ muß $v, X \in L(a^* + b^*)$ sein.

1. Fall $v = a^l$ mit $l \geq 1$

- Falls $x \in a^*$, so ist $uv^2wx^2y = a^{n_0 + l'} b^{n_0^2}$ mit $l' \geq l \geq 1$, also ist $uv^2wx^2y \notin L_2$.
- Falls $x \in b^+$, d.h. $x = b^r$ für $r \geq 1$. Dann ist $uv^k wx^k y = a^{n_0 + k \cdot l} b^{n_0^2 + k \cdot r}$ und es gibt $\hat{k}$ mit $(u + \hat{k} \cdot l)^2 \neq (n_0^2 + \hat{k} \cdot r) \Leftarrow uv^{\hat{k}} wx^{\hat{k}} y \notin L_2$

2. Fall $v = b^l$ mit $l \geq 1 \Leftarrow x \in b^*$
$\Rightarrow uv^2wx^2y = ab^{n_0^2 + l'}$ mit $l' \geq l \geq 1$
$\Rightarrow uv^2wx^2y \notin L_2$
$\Rightarrow$ Eine Zerlegung der gewünschten Form gibt es nicht für Z
$\Rightarrow L_2$ ist nicht kontextfrei

3. Fall $v = \varepsilon \begin{cases} x \in a^+ \to \text{analog zu 1. Fall} \\ x \in b^+ \to \text{analog zu 2. Fall} \end{cases}$

0.8.4 zu Aufgabe 30:

a) $L(\emptyset^*) \overset{?}{=} \emptyset$

Da $\varepsilon \in L(r^*)$ für jeden regulären Ausdruck r

$L^* = \bigcup_{i \in N} L^i$, $\{\varepsilon\} = L^0$ für alle $L \subseteq \Sigma^*$ Also ist $L(\emptyset^*) = in\{\varepsilon\} \neq \emptyset$

b) $L((r_1^* + (r_2^*)^*) = L((r_1 + r_2)^*)$

Stimmt, denn:

"$\subseteq$" Wenn $w \in L((r_1^* + r_2^*)^*)$ ist, dann ist $w = w_1 \dots w_n$ mit $w_i \in L(r_1^*)$ oder $w_i \in L(r_2^*)$ für alle $1 \leq i \leq n$

$\Leftarrow w_i \in L((r_1 + r_2)^*)$ für alle $1 \leq i \leq n$

$\Leftarrow w \in L((r_1 + r_2)^*)$

"$\supseteq$" Da $L(r_j) \subseteq L(r_j^*)$ für jedes $j \in \{1, 2\}$, gilt $L((r_1 + r_2)^*) \subseteq L((r_1^* + r_2^*)^*)$

c) $L(r_1^* \cdot r_2^*) \stackrel{?}{=} L(r_1 \cdot r_2)^*)$ Gilt nicht, denn für $r_1 = a$ und $r_2 = b$ ist $aaa \in L(r_1^* \cdot (r_2^*$ aber $aaa \neq L((r_1 \cdot r_2))^*$

0.8.5 zu Aufgabe 30:

PDA A mit $L(A) = \{a^{2n}b^n | n \geq 0\} aaaabb, aab \in L(A)$

A schreibt nur B auf den Stack für jedes 2. gelesene a

$\rightarrow$ zum lesen der a's Zustände q_0 und q_1 alternieren lassen.

$A = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, B\}, q_0, Z_0, B, \{q_f\})$

$\Delta = (q_0, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_f) \quad \varepsilon \in L(A)$
$(q_0, a, Z_0, BZ_0, q_f) \quad 1.a$gelesen
$(q_0, a, A, AA, q_1) \quad (2m+1)a$gelesen
$(q_1, a, A, A, q_0) \quad (2m)a$gelsen - Keller nicht verändern
$(q_0, b, A, \varepsilon, q_2) \quad (2n)a's$beraits gelesen (wg. q_0) b lesen und Keller um$1A$reduzieren
$(q_2, b, A, \varepsilon, q_2)$
$(q_2, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_f)$

0.9 9.Übung

Lehr– und Forschungsgebiet Theoretische Informatik
Rhein.–Westf. Technische Hochschule Aachen
Prof. Dr. F. Baader

Ahornstraße 55
52074 Aachen
✆ Sekretariat: 0241/80–21131
✆ U. Sattler: 0241/80–21140

9. Übung zur Vorlesung „Automatentheorie und formale Sprachen“

Abgabe: Donnerstag, 4. Mai vor der Vorlesung

Aufgabe 32: (6 Punkte)

Ein PDA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, Z_0, \Delta, F)$ heißt *quasi-deterministisch*, falls er die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

- Für alle $q \in Q$, für alle $a \in \Sigma$, für alle $Z \in \Gamma$ existiert höchstens ein Übergang der Form $(q, a, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$.
- Existiert ein Tupel $(q, \epsilon, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$, so exisiert kein Tupel $(q, a, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$ mit $a \in \Sigma$.

Geben Sie einen quasi-deterministischen PDA für $L_S = \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b, c\}^*\} \subseteq \{a, b, c\}^*$ an. Verwenden Sie diesen und Satz 10.5, um folgende Behauptung zu widerlegen:
Für alle Sprachen $L \subseteq \Sigma^*$ gilt: Wird L von einem quasi-deterministischen PDA akzeptiert, so wird L auch von einem deterministischen PDA akzeptiert.

Aufgabe 33: (4 Punkte)

Zeigen Sie, daß Lemma 10.14 der Vorlesung nicht für kontextfreie Sprachen gilt.
Beweisen Sie dazu, daß $\mathsf{min}(L_S)$ für $L_S = \{w\overleftarrow{w} \mid w \in \{a, b\}^*\} \subseteq \{a, b\}^*$ nicht kontextfrei ist, wobei Sie analog zum Beweis von Satz 10.15 vorgehen können. Außerdem können Sie Beispiel 10.5 verwenden.

Aufgabe 34: (5 Punkte)

Verwenden Sie die Konstruktion aus dem Beweis von Satz 10.8, um zu der Grammatik $G = (\{S, T\}, \{\wedge, \vee, \neg, p, q, (,)\}, P, S)$ mit

$$
\begin{array}{rll}
P = \{ & S \rightarrow & S \wedge S \mid S \vee S \mid (S) \mid T \ \ \} \\
& T \rightarrow & p \mid q \mid \neg p \mid \neg q
\end{array}
$$

einen PDA $\mathcal{A}$ zu bauen mit $L(\mathcal{A}) = L(G)$. Vergleichen Sie außerdem die Ableitungsbäume von G mit den Konfigurationsfolgen von $\mathcal{A}$ für die Wörter $(p \wedge q) \vee \neg q$ und $(p))$.

Aufgabe 35: (5 Punkte)

Beschreiben Sie die von dem PDA $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, \bar{q}_1, q_2, q_2', \bar{q}_2, q_{1f}, q_{2f}\}, \{a, b, c\}, \{A, B, Z_0\}, q_0, Z_0, \Delta, \{q_{1f}, q_{2f}\})$ mit

$$
\begin{array}{rlll}
\Delta = & (q_0, \epsilon, Z_0, Z_0, q_1) & (q_1, a, Z_0, AZ_0, q_1) & (q_2, a, Z_0, Z_0, q_2) \\
& (q_0, \epsilon, Z_0, Z_0, q_2) & (q_1, a, A, AA, q_1) & (q_2, b, Z_0, BZ_0, q_2') \\
& (q_0, \epsilon, Z_0, Z_0, q_{1f}) & (q_1, b, A, \epsilon, \bar{q}_1) & (q_2', b, B, BB, q_2') \\
& (q_2, a, Z_0, Z_0, q_{2f}) & (\bar{q}_1, b, A, \epsilon, \bar{q}_1) & (q_2', c, B, \epsilon, \bar{q}_2) \\
& & (\bar{q}_1, \epsilon, Z_0, Z_0, q_{1f}) & (\bar{q}_2, c, B, \epsilon, \bar{q}_2) \\
& & (q_{1f}, c, Z_0, Z_0, q_{1f}) & (\bar{q}_2, \epsilon, Z_0, \epsilon, \bar{q}_{2f})
\end{array}
$$

akzeptierte Sprache und begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 36: (5 Punkte)

Es sei $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{a, b\}, \{Z_0, A\}, q_0, Z_0, \Delta, \{q_f\})$ ein DPDA mit:

$$
\begin{array}{llllll}
\Delta = \{ & (q_0, a, Z_0, AZ_0, q_0) & (q_0, a, A, AA, q_0) & (q_0, b, A, \epsilon, q_1) & (q_1, b, A, \epsilon, q_1) & \} \\
& (q_1, a, A, A, q_2) & (q_2, \epsilon, A, AA, q_2) & (q_1, \epsilon, Z_0, \epsilon, q_f) & &
\end{array}
$$

Geben Sie einen DPDA $\bar{\mathcal{A}}$ an mit $L(\bar{\mathcal{A}}) = \overline{L(\mathcal{A})}$. *Tip:* Überlegen Sich sich, wie DEAs komplementiert werden, und beachten Sie dabei, daß es für DPDAs noch andere Gründe für das Nicht-Akzeptieren eines Wortes geben kann.

0.9.1 zu Aufgabe 32:

Ein PDA heisst "quasi-deterministisch", falls

- für alle $q \in Q$, für alle $a \in \underbrace{\Sigma}_{\Sigma\cup\{\varepsilon\}\text{ bei deterministischen}}$ existiert höchstens ein Übergang der Form $(q, a, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$
- Existiert ein Tupel $(q, a, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$, so gibt es kein Tupel $(q, a, Z, \ldots, \ldots) \in \Delta$ mit $a \in \Sigma$

Wir wissen: $L_5 = \{w\vec{w} \mid w \in \{a, b, c\}^*\}$ ist nicht dkf. (für keinen DPDA $\mathcal{A}$ gilt: $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L_S}$)

Gesucht: Quasi-deterministischer PDA $\mathcal{A}$ mit $L(\mathcal{A}) = \mathcal{L_S}$.

$\mathcal{A} = (\{\amalg_\prime, \hat{\amalg}_\prime, \amalg_\infty, \amalg_\in, \hat{\amalg}, \amalg_{\{}\}, \{\mathcal{Z}_\prime, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}, \amalg_\prime, \mathcal{Z}_\prime, \cdot, \{\amalg_{\{}\})$ mit (im folgenden steht x für ein Element aus $\{a, b, c\}$, und $(\ldots, x, X, \ldots) \in \Delta$ liest sich als $(\ldots, a, \ldots, A, \ldots), \ldots, (\ldots, c, \ldots, C, \ldots)$).
$\Delta = \{$ $(\hat{q}_0, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_f)$ % A akzeptiert ε
$(\hat{q}_0, \varepsilon, Z_0, Z_0, q_0)$
$(q_0, x, Z_0, XZ_0, \hat{q})$ % 1. Buchstaben lesen und raten
$(q_1, x, Y, XY, \hat{q})$ % n + 1. Buchstaben lesen und raten
$(\hat{q}, \varepsilon, X, X, q_1)$ % raten, dass $\mathcal{A}$ nach 1. Worthälfte liegt
$(\hat{q}, \varepsilon, X, X, q_2)$ % raten, dass 2. Worthälfte beginnt
$(q_2, x, X, \varepsilon, q_2)$
$(q_2, \varepsilon, Z_0, \varepsilon, q_f)\}$

0.9.2 zu Aufgabe 33:

Lemma 14: Ist L dkf., so auch $\underbrace{min(L)}_{\{w\in L\mid \text{ kein echtes Präfix von } w \text{ liegt in } L\}}$

zu zeigen: $min(L_S)$ ist nicht kontextfrei.
$L_S = \{w\vec{w} \mid w \in \{a, b\}^*\}$

Beweis: Es sei $L' := min(L_S) \cap \underbrace{(ab)^+(bc)^+(ab)^+(bc)^+}_{L_r}$

Es gilt: $\Rightarrow$ Wenn L'

- L_r ist regulär
- L_r ist kontextfrei
- kf. Sprachen sind unter Durchschnitt mit regulären Sprachen abgeschlossen.

nicht kf. ist, so ist auch $min(L_S)$ nicht kf.
Wir zeigen also, dass L' nicht kf. ist (mit P.L. für kf. Sprachen)
siehe Beweis von Satz 10.15 !

0.9.3 zu Aufgabe 34:

$\mathcal{A}$ mit $N(\mathcal{A}) = \mathcal{N}(\mathcal{G})$ sieht wie folgt aus:
$\mathcal{A} = (\{\hat{\amalg}\}, \{\wedge, \vee, \neg, (,), \surd, \amalg\}, \{\wedge, \vee, \neg, (,), \surd, \amalg, \mathcal{S}, \mathcal{T}\}, \hat{\amalg}, \mathcal{S}, \cdot)$
$\Delta = \{(\hat{q}, \varepsilon, S, \gamma, \hat{q}) \mid \gamma \in \{S \wedge S, S \cup S, (S), T\}$
$\{(\hat{q}, \varepsilon, T, \gamma, \hat{q}) \mid \gamma \in \{p, q, \neg p, \neg q\}\}$
$\{(\hat{q}, a, a, \varepsilon, \hat{q}) \mid a \in \{\wedge, \vee, \neg, (,), p, q\}$
Ableitungsbaum für $w_1 =$ $(p \wedge q) \vee \neg q$:
$(\hat{q}, w_1, S) \vdash_A$
$(\hat{q}, w_1, S \vee S) \vdash_A$
$(\hat{q}, w_1, (S) \vee S) \vdash_A$
$(\hat{q}, w_1, S) \vee S \vdash_A$
$(\hat{q}, w_1, S \wedge S) \vee S) \vdash_A$

0.9.4 zu Aufgabe 35:

0.9.5 zu Aufgabe 36: