Florian Weingarten

Prüfungsprotokoll

zur mündlichen Prüfung im Anwendungsfach Mathematik für den Diplom Studiengang Informatik an der RWTH-Aachen

Prüfungsinhalt: Analysis IV (Funktionentheorie), Lineare Algebra II, Numerische Analysis I
Prüfer: Prof. Dr. Aloys Krieg (K), Prof. Dr. Joachim Schöberl (S)
Prüfungsdauer: 30 Minuten, 10 Minuten pro Vorlesung
Prüfungsdatum: 07.04.2008 (SS08)
Prüfungsnote: 1.0

Es handelt sich hier um ein **Gedächtnisprotokoll**! Ich habe mit Sicherheit ein paar Sachen vergessen oder falsch in Erinnerung! Vielleicht hilft es trotzdem jemandem bei seiner Prüfungsvorbereitung.

Prof. Krieg sagt ich kann mir selbst aussuchen womit wir anfangen. Ich wähle Analysis.

Analysis IV (Funktionentheorie) (K)

K: Was ist eine holomorphe Funktion?
I: Eine Funktion $f : U \to \mathbb{C}$ (U offen), die in jedem Punkt komplex differenzierbar ist und ...
K: Was heißt das? komplex differenzierbar?
I: Das ist ähnlich definiert wie im reellen: Eine Funktion f heisst in z_0 komplex differenzierbar, wenn der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existiert
K: Okay, weiter
I: Also, komplex differenzierbar in einer Umgebung. Oder äquivalent: Reell differenzierbar und es müssen die Cauchy Riemannschen partiellen Differentialgleichungen erfüllt sein
K: Was heisst das?
I: Die partiellen Ableitungen müssen im Sinne der reellen Analysis existieren
K: Was für holomorphe Funktionen kennen sie?
I: jedes Polynom ist holomorph, jede Funktion, die sich als konvergente Potenzreihe darstellen lässt ist holomorph auf ihrem Konvergenzradius, z.B. *exp*, *sin*, *cos*, etc.
K: Schreiben Sie mal eine davon hin
I: In Potenzreihendarstellung?
K: Wie Sie möchten
I: Okay, also z.B. die komplexe Exponentialfunktion: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*, z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$
K: Wo konvergiert diese Reihe?
I: Auf ganz $\mathbb{C}$
K: Wie beweisen Sie das?
I: Konvergenzradius über Quotientenkriterium bestimmen
K: Was hat diese Funktion für Eigenschaften?
I: Sie ist $2\pi i$-periodisch, und damit insbesondere nicht injektiv. Man kann den Definitionsbereich aber einschränken, so dass sie bijektiv ist
K: Welche Werte nimmt sie dann an?
I: Alle ausser 0
K: Welche Eigenschaften hat sie noch?

I: Es gilt die Funktionalgleichung $exp(z+w) = exp(z) \cdot exp(w)$ und für $z \in \mathbb{R}$ gilt z.B. noch $exp(iz) = cos(z) + i \cdot sin(z)$
K: Diese Funktiongleichung gilt ja bereits für die reelle Exponentialfunktion. Müssen wir hier wirklich beweisen, dass sie auch für alle komplexen Zahlen gilt?
I: Nein, man kann das direkt mit dem Identitätssatz folgern.
K: Ok. Residuensatz. Was ist das?
I: Damit kann man Integrale entlang nullhomologer Zyklen in offenen Mengen mit Singularitäten berechnen indem man Windungszahl und Residuum bestimmt
K: Was ist ein nullhomologer Zyklus?
I: Ein Zyklus in U bei dem für alle z, die nicht in U liegen, die Windungszahl gleich 0 ist
K: Ok, weiter
I: Also, $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{a \in A} n_\gamma(a) \cdot Res_a(f)$, wobei $A \subset U$ diskret in U liegt und die Spur von γ leeren Schnitt mit A hat
K: Warum ist diese Summe definiert?
I: Ja, eigentlich wird hier über eine überabzählbare Menge summiert. Da der Zyklus nullhomolog ist, ist die Windungszahl fast immer 0 bzw. das Residuum ist fast immer 0, daher sind es hier in Wirklichkeit nur endlich viele Summanden
K: Was heißt diskret?
I: $A \subset U$ heisst diskret in U wenn die Häufungspunkte von A nicht in U enthalten sind
K: Wo können die Häufungspunkte denn sonst noch sein, wenn nicht in U?
I: Hmmm.. Irgendwo in $\mathbb{C} \setminus U$?
K: Wo genau? Irgendwo ganz weit weg?
I: Hmmmm. Nein. Dann wohl nur auf dem Rand von U
K: Genau! Okay, machen wir mal ein Beispiel. $\int_{K_1(0)} \frac{1}{sin(z^2)} dz$
I: Die Funktion hat Singularitäten bei den Nennernullstellen, also bei $\sqrt{\pi \cdot k}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\sqrt{\pi k} i$ für $k \in -\mathbb{N}$. Und das Residuum ist nun.... hmm..
K: Macht es einen Unterschied wenn sie hier $-z$ statt z schreiben?
I: Nein
K: Warum nicht?
I: Weil die Funktion *gerade* ist
K: Aha! Was heisst das fürs Residuum?
I: Es ist 0, weil alle ungeraden Koeffizienten in der Laurent-Entwicklung 0 sind!
K: Also?
I: Das komplette Integral ist 0!
K: Okay, wie sieht es mit $\int_{K_1(0)} \frac{1}{sin^2(z)} dz$ aus?
I: Ganz genauso
K: genau! Okay, das reicht für Analysis. Machen wir weiter mit der Linearen Algebra II.

Lineare Algebra II (K)

K: Erzählen Sie mal was zum Satz über die Jordansche Normalform
I: Jede quadratische Matrix mit Einträgen aus $\mathbb{C}$ ist ähnlich zu einer Jordanform, d.h. es gibt immer ein $T \in GL_n(\mathbb{C})$ mit $T^{-1} \cdot A \cdot T = J_A$ wobei J_A die Jordanform von A ist. Sie besteht aus sogenannten Jordankästchen $J(\lambda, \mu)$, das sind Teilmatrizen aus $\mathbb{C}^{\mu \times \mu}$ mit λ auf der Diagonalen (Eigenwert) und 1 auf der oberen oder unteren Nebendiagonale
K: Ist die Jordanform eindeutig?
I: Nur bis auf die Reihenfolge der Jordanblöcke
K: $\chi_A(x) = (x-5)^3$ sei das charakteristische Polynom von A. Wie sieht die Jordanform von A

aus?

I: Das ist nicht eindeutig. Es gibt drei Möglichkeiten: $\begin{pmatrix} 5 & & \\ 1 & 5 & \\ & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & 1 & 5 \end{pmatrix}$ (Blöcke auch vertauschbar) und $\begin{pmatrix} 5 & & \\ & 5 & \\ & & 5 \end{pmatrix}$

K: Erzählen sie mal etwas dazu

I: Also, die Größen der Jordanblöcke entsprechen den algebraischen Vielfachheiten des Eigenwerts. Die Anzahl der Jordanblöcke entspricht der geometrischen Vielfachheit und die Größe des größten Jordanblocks entspricht der algebraischen Vielfachheit im Minimalpolynom

K: Ist die Jordanform durch diese drei Zahlen eindeutig bestimmt?

I: Nein, bei 3x3 zwar schon glaube ich, aber bei größeren Matrizen nicht

K: Ist sie eindeutig wenn ich ihnen noch $Rang(A - 5 \cdot E_3)$ sage?

I: Hmmmm...

K: Ist der Rang überhaupt invariant unter Ähnlichkeitstransformationen?

I: Ja, es gilt sogar unter Äquivalenztransformationen. Zwei Matrizen sind genau dann äquivalent, wenn sie gleichen Rang haben, also haben auch ähnliche Matrizen den gleichen Rang, da sie insbesondere äquivalent sind!

K: Welchen Rang haben die drei möglichen Jordanformen hier?

I: 2, 1 und 0

K: Kann Rang 3 auch auftreten?

I: Nein, dann wäre 5 kein Eigenwert mehr

K: Genau

Hier fehlt noch irgendwas. Irgendwelche weiteren Fragen zur Jordanform. Kann mich aber nichtmehr 100% erinnern.

Numerische Analysis I (S)

S: Lineare Gleichungssysteme. Schreiben Sie mal hin

I: $Ax = b$

S: Wann ist sowas lösbar?

I: Wenn A invertierbar ist, d.h. vollen Rang hat, dann ist $x = A^{-1}b$ die eindeutige Lösung

S: Wie löst man sowas?

I: Da gibt es mehrere Möglichkeiten. Theoretisch indem man die Matrix A invertiert.

S: Wie noch?

I: Mit dem Gauss Algorithmus

S: Genau. Ist der immer durchführbar?

I: Nein, nur wenn die Matrix strikt diagonaldominant ist, z.B. wenn sie symmetrisch positiv definit ist

S: Warum nur dann?

I: Weil sonst Divisionen durch 0 auftreten

S: Was kann man da machen?

I: Zeilen vertauschen, z.B. über Spaltenpivotisierung

S: Was ist LR Zerlegung?

I: Die Elementarmatrizen aus dem Gauss Algorithmus, die die jeweiligen Zeilenumformungen durchführen werden gesammelt in einer normierten unteren Dreiecksmatrix. Zusammen mit der Pivotisierung erhält man eine Matrixzerlegung $P \cdot A = L \cdot R$, wobei L normierte untere Dreicks-

matrix ist, R obere Dreiecksmatrix (nicht unbedingt normiert) und P eine Permutationsmatrix (also insbesondere orthogonal)
S: Wie aufwändig ist sowas?
I: ca. $\frac{2}{3}n^3$ Rechenoperationen
S: Wie kann man mit so einer Zerlegung ein LGS lösen?
I: $Ax = b \Leftrightarrow LRx = P^t b$, jetzt die zwei Teilsysteme $Ly = P^t b$ und $Rx = y$ mit Rückwärtseinsetzen lösen, das geht effizient in $\frac{1}{2}n^2$ Operationen
S: Was wissen Sie über das Cholesky Verfahren?
I: Damit kann man symmetrisch positiv definite Matrizen stabil und effizient zerlegen. Schneller als mit LR.
S: Wie schnell?
I: ca. $\frac{1}{3}n^3$, also ungefähr doppelt so schnell wie mit LR
S: Wie sieht die Zerlegung aus?
I: $A = LDL^t$, wobei DL^t dem R aus der LR Zerlegung entspricht (die LR Zerlegung ist eindeutig)
S: Was ist D?
I: Eine Diagonalmatrix. Cholesky stellt ebenfalls einen Test auf positive definitheit dar. A ist genau dann spd wenn die Diagonaleinträge von D alle strikt positiv sind
S: Okay. Lineare Ausgleichsrechnung. (Er zeichnet ein Koordinatensystem mit einer Punktwolke die sehr nach einer Parabel aussieht)
S: Was macht man hier?
I: Wir suchen die Koeffizienten einer Approximation. Dazu schreibt man das Problem um in ein lineares Gleichungssystem und wir suchen das x was den Ausdruck $\|Ax - b\|_2$ minimiert, d.h. eine beste Annäherung an die Lösung im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate
S: Wie bekommen wir das?
I: Wenn A vollen Spaltenrang hat z.B. über die Normalengleichungen. x ist genau dann minimale Lösung des Ausgleichsproblems, wenn x die eindeutige Lösung von $A^t Ax = A^t b$ ist.
S: Okay. Und wie geht das sonst noch?
I: z.B. mit der QR Zerlegung, denn orthogonale Transformationen lassen die euklidische Norm invariant, d.h. wir können oben auch schreiben $\|Q(Ax - b)\|$, wenn $A = QR$ gilt dann also $\|Rx - Q^t b\|$, wobei R jetzt eine obere Dreiecksmatrix ist, die unten eventuell noch Nullzeilen hat. Der obere Dreiecksteil ist nun regulär und zusammen mit dem zugehörigen Teil in b bekommt man die Lösung. Falls b noch nicht-Nullzeilen unten hat entspricht die Norm dieser Zeilen dem Residuum.
S: Okay, was wenn A nicht vollen Rang hat?
I: Dann ist das nicht anwendbar. Die Lösung ist dann nichtmehr eindeutig. Man nimmt dann als zusätzliche Bedingung, dass die Lösung die minimale euklidische Norm haben soll. Dann ist es wieder eindeutig.
S: Wie bekommt man diese Lösung?
I: Über die Singulärwertzerlegung, damit kann man die Pseudoinverse bestimmen
S: Wie geht das?
I: Angenommen A ist invertierbar und $UAV^t = \Sigma$ sei die Singulärwertzerlegung von A, dann gilt $A^{-1} = V\Sigma^{-1}U^t$. Wenn A nicht invertierbar ist definiert man das zu $A^+ = V\Sigma^+ U^t$ mit $\Sigma^t = diag(\sigma_1^{-1}, ..., \sigma_r^{-1}, 0, ..., 0)$ (r ist hier der Rang von A). Jetzt ist $x = A^+ b$ die Lösung des Ausgleichsproblems.
S: Genau

Fazit

Die Zeit ging sehr schnell rum, die Prüfung war sehr fair, beide Prüfer sind sehr freundlich gewesen und haben geholfen falls man ins stottern kam. Zum rechnen von konkreten Aufgaben ist in einer 30 Minuten Prüfung keine Zeit. Für Lange Beweise auch nicht. Es geht um Beweisideen und darum, ob man die grundliegenden Ideen verstanden hat und wiedergeben kann.