Skript zur Vorlesung

Analysis III

H. Th. Jongen, RWTH-Aachen
Wintersemester 2003/2004 [1]

Dominik Hollmann [2]

17. August 2004

[1] www.bartholodeus.de.vu
[2] Anregungen, Fehler, Lob etc. an: dominik.hollmann@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

Kapitel VIII

Differentialgleichungen

VIII.3 Definitionen Differentialgleichung / Lösung / Reduktion

Vorlesung vom 14.10.2003

VIII.3.1 Def.: Differentialgleichung

Seien $n, m \in \mathbb{R}$. $D \subset \mathbb{R}^{1+(m+1)*n}$; $F : D \to \mathbb{R}^n$

$$* \qquad F\left(t, u(t), u'(t), u''(t), \ldots, u^{(m)}(t)\right) = 0$$

Kurz: $F\left(t, u, u', u'', \ldots, u^{(m)}\right) = 0$

$*$ heißt *gewöhnliche Differentialgleichung m-ter Ordnug.*
Für $n \geq 1$: Differentialgleichungssystem

Konvention

I sie immer ein Intervall. $I \subset \mathbb{R}, I^\circ \neq \phi$

VIII.3.2 Def.: Lösung

$u \in C^m(I, \mathbb{R}^n)$ heißt *Lösung* von $*$ auf I, wenn

$$\begin{aligned} & \left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(m)}(t)\right) && \in D \\ \text{und} \quad & F\left(t, u(t), u'(t), \ldots, u^{(m)}(t)\right) && = 0 \qquad \forall\, t \in I \end{aligned}$$

VIII.3.3 Def.: Reduktion

einer Differentialgleichung m-ter Ordnung auf ein System 1. Ordnung

$m * x'' = F(t, x, x')$

$y_1 = x, \quad y_2 = x' \qquad y_1' = (x)' = x' = y_2$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= \frac{1}{m} F(t, y_1, y_2) \\ &\ \text{Form: } u' = f(t,u) \end{aligned}$$

Idee: Setze $v_1 = u, \quad v_2 = u', \quad v_3 = u'', \ \ldots\ , \ v_m = u^{(m-1)}$
Kopplung: $v_1' = u' = v_2 \qquad v_2' = (u')' = u'' = v_3$

$$v_j' = v_{j+1} \qquad j = 1, 2, \ldots, m-1$$
$$F(t, v_1, v_2, \ldots, v_m, v_m') = 0$$
1. Ordnung

VIII.4 Anfangswertproblem (AWP)

Vorlesung vom 17.10.2003

$$\begin{aligned} u' &= f(t,u) \qquad && f : D \to \mathbb{R}^n \\ u(t_0) &= x_0 && \phi \neq D \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

VIII.5 Integralgleichung

Vorlesung vom 14.10.2003

Vor.:

f stetig $\qquad u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$

Beh.:

u ist eine Lösung des Anfangswertproblemes $* \iff$

$$(t, u(t)) \in D \ \forall\, t \in I$$
$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau$$

VIII.6 Satz: Randverhalten

Vorlesung vom 17.10.2003

Vor.:

D offen, f stetig, I offen, $u : I \to \mathbb{R}^n$
$u : I \to \mathbb{R}^n$ maximale (bzgl. des Intervalls) Lösung des Anfangswertproblemes $*$
σ sei Randpunkt von I

Beh.:

Ist $\sigma \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Folge $t_j \in I^n$ mit $t_j \to \sigma \quad (j \to \infty)$ derart, dass $(t_j, u(t_j))$ gegen einen Randpunkt von D konvergiert oder $(\| (t_j, u(t_j)) \|_\infty)$ bestimmt divergiert.

VIII.7 Satz: Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

Vorlesung vom 17.10.2003

Vor.:

D offen, f stetig, $(t_0, x_0) \in D$

1. $\exists L \geq 0 : \| f(t,x) - f(t,y) \|_\infty \leq L \| x - y \|_\infty \qquad \forall (t,x), (t,y) \in D$
2. $\exists a, b > 0$ mit $Z_{a,b} \subset D$
   $Z_{a,b} := \{(t,x) \mid t \in [t_0 - a, t_0 + a], x \in \bar{B}_{\|.\|_\infty}(x_0, b)\}$
3. $\exists \rho \in (0,a)$ mit $\rho L < 1$ und $\sup_{(t,x) \in Z_{a,b}} \| f(t,x) \|_\infty \leq \frac{b}{\rho}$

Beh.:

1. Das Anfangswertproblem $*$ besitzt genau eine Lösung auf
   $I := [t_0 - \rho, t_0 + \rho]$
2. Für $u_0 \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ mit $u_0(t_0) = x_0, \sup_{t \in I} \| u_0(t) - x0 \|_\infty \leq b$ ist durch

$$u_k(t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u_{k-1}(\tau))\, d\tau \qquad t \in I$$

eine Funktionenfolge definiert mit

$$u_k \in C(I, \mathbb{R}^n)$$

und

$$u_k \to u \qquad \text{gleichmäßig}$$

und

$$\begin{aligned}\sup_{t \in I} \| u_k(t) - u(t) \|_\infty &\leq \frac{\rho L}{1 - \rho L} \sup_{t \in I} \| u_k(t) - u_{k-1}(t) \|_\infty \\ &\leq \frac{(\rho L)^k}{1 - \rho L} \sup_{t \in I} \| u_1(t) - u_0(t) \|_\infty\end{aligned}$$

VIII.8 Def.: Lipschitzstetigkeit

Vorlesung vom 21.10.2003

$V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen $\quad F : V \to \mathbb{R}^k$
F heißt *lokal gleich-Lipschitz stetig in den letzten n Variablen*, wenn zu jedem $(\lambda, x) \in V \quad [\lambda \in \mathbb{R}^m, x \in \mathbb{R}^n]$ eine Umgebung $U \subset V$ von (λ, x) und $L \geq 0$ existieren mit

$$\| F(\mu, y) - F(\mu, z) \|_\infty \leq L \| y - z \|_\infty \qquad \forall (\mu, y), (\mu, z) \in U$$

VIII.9 Satz von Picard und Lindelöf

Vorlesung vom 21.10.2003

Vor.:

$D \subset \mathbb{R}^{1+n}$ offen,
$f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig* und lokal gleich-Lipschitz stetig in den letzten n Variablen.

Beh.:

Jedes Anfangswertproblem $*$ mit $(t_0, x_0) \in D$ besitzt eine eindeutige, maximale Lösung

$$u : I \to \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad I \text{ ist offen.}$$

VIII.9 Satz zur Lipschitzstetigkeit

Vorlesung vom 21.10.2003

Vor.:

$V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ offen $\quad F : V \to \mathbb{R}^k$
F besitze *stetige* partielle Ableitungen $\delta_{m+1}F,\ \delta_{m+2}F,\ \dots\ ,\ \delta_{m+n}F$.

Beh.:

Dann ist F lokal gleich-Lipschitz stetig in den letzten n Variablen.

VIII.10 Lemma von Gronwall

Vorlesung vom 21.10.2003

Vor.:

$a, b \in \mathbb{R}, \qquad \alpha > 0$
$\varphi, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ stetig

$$\varphi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

Beh.:

$$\varphi(t) \le \alpha \exp \int_a^t \beta(\tau) d\tau, \qquad t \in [a,b]$$

VIII.11 Satz: Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten

Vorlesung vom 24.10.2003

Vor.:

$D \in \mathbb{R}^{1+n}$ offen $\qquad f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig

$K := \{t_0\} \times \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_0, r) \subset D \qquad (r > 0), \qquad t_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$

Es existiert ein $L \ge 0$ mit

$$\| f(t,x) - f(t,y) \|_\infty \le \; L \| x - y \|_\infty \qquad \forall\, (t,x),(t,y) \in D$$

Beh.:

Es existiert ein $\rho > 0$ so dass gilt:

1. Ist $x \in \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_0, r)$ und $u_x : I_x \to \mathbb{R}^n$ die (nach VIII.9) existierende Lösung des Anfangswertproblemes, $\quad u' = f(t,u),\ u(t_0) = x, \quad$ so gilt:
$$[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \subset I_x$$
2. Die aufgrund von *1.* wohldefinierte Abbildung
$$\begin{array}{rcl} \Phi : \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_0, r) & \longrightarrow & C\left([t_0 - \rho, t_0 + \rho], \mathbb{R}^n\right) \\ x & \longmapsto & u_x|_{[t_0-\rho, t_0+\rho]} \end{array}$$
ist Lipschitz-stetig

VIII.12 Stetige Abhängigkeit der Lösungen von Anfangswerten und Parametern (λ - Erweiterung)

Vorlesung vom 24.10.2003

Vor.:

$D \in \mathbb{R}^{1+n+m}$ offen $\qquad f : D \to \mathbb{R}^n$ stetig

$K := \{t_0\} \times \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(x_0, r) \times \bar{B}_{\|\cdot\|_\infty}(\lambda_0, r) \subset D \qquad (r > 0)$

$t_0 \in \mathbb{R}, \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad \lambda_0 \in \mathbb{R}^m$

Es existiert ein $L \ge 0$ mit

$$\| f(t,x,\lambda) - f(t,y,\mu) \|_\infty \le \; L \max\{\| x - y \|_\infty, \| \lambda - \mu \|_\infty\} \qquad \forall\, (t,x,\lambda),(t,y,\mu) \in D$$

Beh.:

Es existiert ein $\rho > 0$ so dass gilt:

1. Ist $x \in \bar{B}_{\|.\|_\infty}(x_0, r),\ \lambda \in \bar{B}_{\|.\|_\infty}(\lambda_0, r)$, und $u_{x,\lambda} : I_{x,\lambda} \to \mathbb{R}^n$ die (nach VIII.9) existierende Lösung des Anfangswertproblemes, $u' = f(t, u, \lambda),\ u(t_0) = x$, so gilt:

$$[t_0 - \rho, t_0 + \rho] \subset I_{x,\lambda}$$

2. Die aufgrund von *1.* wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \Phi : \bar{B}_{\|.\|_\infty}(x_0, r) \times \bar{B}_{\|.\|_\infty}(\lambda_0, r) &\longrightarrow C\left([t_0 - \rho, t_0 + \rho], \mathbb{R}^n\right) \\ (x, \lambda) &\longmapsto u_{x,\lambda}|_{[t_0-\rho, t_0+\rho]} \end{aligned}$$

ist Lipschitz-stetig

VIII.13 Satz über *globale* Lösbarkeit

Vorlesung vom 24.10.2003

Vor.:

I offenes Intervall (könnte durchaus $\mathbb{R}$ sein!)
$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *stetig* und lokal gleich-Lipschitz stetig in den letzten n Variablen.

Seien $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}_+$ *stetig* mit

$$\| f(t, x) \|_\infty \leq \alpha(t) \| x \|_\infty + \beta(t) \qquad \forall\, t \in I,\ x \in \mathbb{R}^n$$

Beh.:

Für alle $(t_o, x_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ ist das

$$\text{Anfangswertproblem} \qquad * \begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

global (d.h. auf *ganz* I) eindeutig lösbar.

VIII.14 Satz: Lineare, inhomogene Differentialgleichungen

Vorlesung vom 24.10.2003

Vor.:

$A \in C(I, M_n), \qquad b \in C(I, \mathbb{R}^n)$
$u' = A(t) \cdot u + b(t)$

Setze $\mathcal{L}(u) := u' - A(t) \cdot u$

Dann ist

$$\mathcal{L}\, u = b \quad \text{Lösung der inhomogenen Differentialgleichung}$$

und

$$\mathcal{L}\, u = 0 \quad \text{Lösung der homogenen Differentialgleichung.}$$

Beh.:

$\mathcal{L}$ ist linear.

VIII.15 Satz: Lösungsraum linearer, inhomogener Differentialgleichungen

Vorlesung vom 24.10.2003

Vor.:

$A \in C(I, M_n), \qquad b \in C(I, \mathbb{R}^n)$
$u' = A(t) \cdot u + b(t)$

Beh.:

1. Die Lösungsmenge L_h der homogenen Differentialgleichung ($Kern\, \mathcal{L}_h$) ist n-dimensionaler linearer Teilraum von $C^1(I, \mathbb{R}^n)$.
2. Parametrisierung von $\mathcal{L}_h$ mit Anfangswerten:

   Für $t_0 \in I$ sei u_{t,x_0} die Lösung des Anfangswertproblemes

   $$\begin{aligned} u' &= A(t)u \\ u(t_0) &= x \end{aligned}$$

   Dann gilt: $\Phi : x \mapsto u_{t_0,x}$ ist Isomorphismus von $\mathbb{R}^n$ auf $\mathcal{L}_h$

3. Es ist $\bar{u}+L_h$ die Lösungsgesamtheit der inhomogenen Differentialgleichung wobei $\bar{u} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lösung der homogenen Differentialgleichung ist.

VIII.16 Definitionen: Lösungsmatrix, Fundamentalmatrix

Vorlesung vom 24.10.2003

VIII.16.1 Def.: Lösungsmatrix

W ist *Lösungsmatrix* der homogenen, linearen Differentialgleichung (*Wronski-Matrix*), falls mit

$$W(t) = (W_1(t) \mid W_2(t) \mid \cdots \mid W_n(t))$$

jedes W_i Lösung der Differentialgleichung ist.

VIII.16.2 Def.: Fundamentalmatrix

Eine *Fundamentalmatrix* der homogenen, linearen Differentialgleichung ist eine Lösungsmatrix $W(t)$, wobei $W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t)$ Basis von L_h ist.

VIII.17 Wronski-Determinante

Vorlesung vom 24.10.2003

VIII.17.1 Def.: Wronski-Determinante

Sei W Lösungsmatrix der homogenen, linearen Differentialgleichung.
Dann heißt

$$\det(W) \quad \textit{Wronski-Determinante.}$$

VIII.17.2 Satz

1. Es gilt entweder (a) oder (b).
   (a) $detW(t) \neq 0 \qquad \forall t \in I$
   (b) $detW(t) = 0 \qquad \forall t \in I$
2. W Fundamentalmatrix $\Longleftrightarrow (a)$

VIII.18 Über Fundamentalmatrizen

Vorlesung vom 24.10.2003

Sei W_0 Fundamentalmatrix

Beh.:

1. $W \in C^1(I, M_n)$ ist Lösungsmatrix der homogenen, linearen Differentialgleichung $\Longleftrightarrow \quad \exists\, \Gamma \in M_n \quad \text{mit} \quad W = W_0 \cdot \Gamma$
2. $W \in C^1(I, M_n)$ ist Fundamentalmatrix der homogenen, linearen Differentialgleichung $\Longleftrightarrow \quad \exists\, \Gamma \in M_n \quad \text{mit} \quad W = W_0 \cdot \Gamma$ *und* $det\, \Gamma \neq 0$

VIII.19 Differentialgleichung für Wronskideterminante

Vorlesung vom 31.10.2003

$w \in C^1(I, \mathbb{R})$ ist Wronskideterminante (d.h., $w = det\, W$),
W Lösungsmatrix)

$\Longleftrightarrow w$ Lösung der Differentialgleichung

$$w' = Sp\,(A(t)) \cdot w$$

Dabei ist $Sp(A(t)) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)$ die *Spur(A)*.

$\Longrightarrow w(t) = c \cdot \exp\left(\int_{t_0}^{t} Sp\left(A(\tau)\right) d\tau\right)$

VIII.20 Variation der Konstanten

Vorlesung vom 31.10.2003

Vor.:

Sei $W(t)$ Fundamentalmatrix der homogenen, linearen Differentialgleichung $u'(t) = A \cdot u(t) + b(t)$.

Beh.:

Mit $t_0 \in I$ ist

$$t \mapsto W(t) \int_{t_0}^{t} W(\tau)^{-1}\ b(\tau)\, d\tau$$

Lösung der inhomogenen, linearen Differentialgleichung.

Somit ist die allgemeine Lösung der inhomogenen, linearen Differentialgleichung:

$$W(t) \cdot \left(\int_{t_0}^{t} W(\tau)^{-1}\ b(\tau)\, d\tau + c\right) \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

VIII.21 $\exp(A)$

Vorlesung vom 31.10.2003

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\, x^n + \ldots$ (Taylorentwicklung)

VIII.21.1 Def.: $\exp(A)$

$\exp(A) := I + A + \frac{1}{2!}\, A^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\, A^n + \ldots$ für $A \in M_m$

VIII.21.2 Satz: Wohldefiniertheit von $\exp$

Beh.: $\sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!}\, A^k$ ist absolut konvergent.

VIII.22 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Vorlesung vom 31.10.2003

Vor.:

$A \in M_n$

Beh.:

1. $t \mapsto \exp(t\,A)$ ist Fundamentalmatrix für $u' = Au$
2. $t \mapsto [\exp((t-t_0)\cdot A)]\,x_0$ ist *die* Lösung des Anfangswertproblemes

$$\begin{aligned} u' &= A\,u \\ u(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

VIII.23 Berechnung von $\exp(tA)$

Vorlesung vom 31.10.2003
Sei $A\,v = \lambda\,v, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert

$$\begin{aligned} \left[e^{\lambda\,t}\cdot v\right]' &= e^{\lambda\,t}\cdot\lambda\,v \\ &= e^{\lambda\,t}\cdot A\,v \\ &= A\cdot\left[e^{\lambda\,t}\cdot v\right] \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow e^{\lambda\,t}\cdot v = e^{\lambda\,t}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda\,t}\cdot v_1 \\ e^{\lambda\,t}\cdot v_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda\,t}\cdot v_n \end{pmatrix} \text{ ist Lösung von } u' = A\cdot u.$$

$\Longrightarrow$ Falls $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ Eigenwerte und
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ Eigenvektoren und linear unabhängig

$\Longrightarrow$ Matrix $\left(e^{\lambda_1\,t}\cdot v_1 \mid e^{\lambda_2\,t}\cdot v_2 \mid \ldots \mid e^{\lambda_n\,t}\cdot v_n\right)$ Fundamentalmatrix

$\left(e^{\lambda_1\,t}\cdot v_1 \mid e^{\lambda_2\,t}\cdot v_2 \mid \ldots \mid e^{\lambda_n\,t}\cdot v_n\right)\cdot(v_1 \mid v_2 \mid \cdots \mid v_n)^{-1} = \exp(t\,A)$

$(\exp(0) = I)$

VIII.23.1 Reelle Jordan-Normalform

Vorlesung vom 04.11.2003

Vor.:

$A \in M_n$

Beh.:

$\exists\,\Gamma \in M_n,\ det\,\Gamma \neq 0$:

$$A = \Gamma\cdot M\cdot\Gamma^{-1}$$

wobei M Jordan-Normalform hat.

Bemerkung:

Dann ist $\exp(tA) = \Gamma\cdot\exp(tM)\cdot\Gamma^{-1}$

VIII.23.2 Systematische Berechnung von $\exp(tA)$

Vorlesung vom 07.11.2003

Vor.:

Seien $A, \Gamma, M \in M_n$, $\det(\Gamma) \neq 0$ mit $A = \Gamma M \Gamma^{-1}$, wobei M Jordan-Normalform hat.
Sei J_r ein Jordanblock aus M zum Eigenwert λ.

Dann hat J_r genau eine der folgenden gestalten:

a: λ reell

$$\begin{pmatrix} \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & & 0 \\ & & \lambda & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & \ddots & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

b: λ komplex

$\lambda = \alpha + i\beta, \quad \beta \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & & \alpha & \beta \\ & & -\beta & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & & & \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & & 0 & \\ & & \alpha & \beta & 1 & 0 & & & & \\ & & -\beta & \alpha & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & \alpha & \beta & 1 & 0 \\ & & & & & -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ & 0 & & & & & & \alpha & \beta \\ & & & & & & & -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\exp(tA)$

$\exp(tA) = \Gamma \exp(tM) \Gamma^{-1}$ mit

$$\exp(tM) = \begin{pmatrix} \exp(tJ_1) & & & & & \\ & \exp(tJ_2) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \exp(tJ_r) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\exp(tJ_r)$

a: λ reell

Sei J_r reeller Jordanblock zum Eigenwert λ(s.o.). Dann ist

$$J_r = \lambda I + N$$

Berechne dazu

$$\exp(t\lambda I) = e^{\lambda t} I$$

$$\exp(tN) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Somit

$$\begin{aligned} \exp(tJ_r) &= e^{\lambda t}\exp(tN) \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{1}{2!}t^2 & \dots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b: λ komplex

Sei J_r komplexer Jordanblock zum Eigenwert $\lambda = \alpha + i\beta$ (s.o.). Dann ist

$$J_r = \alpha I + D + B \qquad \text{mit}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & & 0 & \\ & & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \beta U & \begin{matrix} 0 \\ 0 \; 0 \end{matrix} & & \\ \begin{matrix} 0 \; 0 \\ 0 \end{matrix} & \beta U & \begin{matrix} 0 \\ 0 \; 0 \end{matrix} & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta U \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Dann ist } DB = BD.$$

$$\Longrightarrow \quad \exp(tJ_r) = \exp(t\alpha I) \cdot \exp(tD) \cdot \exp(tB)$$

Berechne dazu

$$\exp(t\alpha I) = e^{\alpha t} I$$

$$\exp(tD) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & t & 0 & \frac{1}{2!}t^2 & 0 & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t & 0 & \frac{1}{2!}t^2 & & 0 & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \\ & & 1 & 0 & t & 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 0 & 1 & 0 & t & & & \\ & & & & 1 & 0 & \ddots & \frac{1}{2!}t^2 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & & 0 & \frac{1}{2!}t^2 \\ & & & & & & \ddots & t & 0 \\ & & & & & & & 0 & t \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exp(t\beta U) = \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix}$$

VIII.24 Satz zur Asymptotik von $\exp(tA)$

Vorlesung vom 07.11.2003

Vor.:

$A \in M_n$

Beh.:

$$\lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad Re(\lambda) < 0 \quad \forall \text{ Eigenwerte } \lambda \text{ von } A$$

VIII.25 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Vorlesung vom 07.11.2003, Übung 5, SA 2

Differentialgleichung:

$$v^{(n)} = \alpha_0(t)v + \alpha_1(t)v' + \alpha_2(t)v'' + \ldots + \alpha_{n-1}(t)v^{(n-1)} + \beta(t) \qquad *$$

$\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta \in C(I, \mathbb{R})$

$u_1 := v, u_2 := v', u_3 := v'', \ldots, u_n := v^{(n-1)}$

Dann ist $\quad * \Longleftrightarrow u' = A(t) \cdot u + b(t) \quad$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ \alpha_0(t) & \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \ldots & \ldots & \alpha_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{Systemmatrix}$$

$$b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

VIII.25.1 Homogene lineare Differentialgleichung höherer Ordnung

Vor.:

$$\begin{aligned} v^{(n)} &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j(t) v^{(j)} \qquad *_H \\ \text{bzw.} \quad u' &= A(t)u \qquad **_H \end{aligned}$$

Sei $\Lambda_h \in C^n(I, \mathbb{R})$ Lösungsmenge von $*_H$ und $L_h \subset C^1(I, \mathbb{R}^n)$ Lösungsmenge von $**_H$.

Beh.:

$$\Lambda_h \cong L_h \quad \text{vermöge } v \mapsto \begin{pmatrix} v \\ v' \\ v'' \\ \vdots \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

VIII.25.2 Def.: Fundamentalsystem

Ein *Fundamentalsystem* für $*_H$ ist *Basis* von Λ_h.

VIII.26 Lineare Differentialgleichung höherer Ordnung mit *konstanten* Koeffizienten

Vorlesung vom 11.11.2003

VIII.26.1 Homogene Differentialgleichung

Vor.:

$$v^{(n)} + \alpha_0 v + \alpha_1 v' + \alpha_2 v'' + \ldots + \alpha_{n-1} v^{(n-1)} = 0 \qquad * \qquad \text{(homogen)}$$
$$\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta \in C(I, \mathbb{R})$$
$$u_1 := v, u_2 := v', u_3 := v'', \ldots, u_n := v^{(n-1)}$$

Betrachte das System 1. Ordnung

$$u' = A(t) \cdot u$$

mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \ldots & \ldots & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$p(\lambda) := \det(\lambda I - A) \qquad \text{(Charakteristisches Polynom)}$$

Allgemeine Lösung:

$$u = e^{tA} \cdot c, \qquad c \in \mathbb{R}^n$$

Ansatz:

$$v(t) = e^{\lambda t} \quad \Rightarrow v' = \lambda \exp(\lambda t), v' = \lambda^2 e^{\lambda t}, \ldots$$

Einsetzen in $*$:

$$[\underbrace{\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_1\lambda^1 + \alpha_0}_{p(\lambda)}]e^{\lambda t} \stackrel{!}{=} 0$$

Nullstellen von p

1. $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t}$ ist Lösung von $*$.
2. $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ und $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$ sind Lösungen von $*$.

VIII.26.2 Satz: Vielfachheiten von Nullstellen von p

Sei λ k-fache Nullstelle von p.

1. $\lambda \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \ldots, t^{k-1}e^{\lambda t}$, sind Lösungen von $*$.
2. $\lambda = \alpha \pm i\beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$
   $$\begin{array}{lllll} \Longrightarrow & e^{\alpha t}\cos\beta t, & te^{\alpha t}\cos\beta t, & \ldots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\cos\beta t, \\ & e^{\alpha t}\sin\beta t, & te^{\alpha t}\sin\beta t, & \ldots, & t^{k-1}e^{\alpha t}\sin\beta t \end{array}$$
   sind Lösungen von $*$.

VIII.26.3 Fazit:

Bildet man nach obigem Schema bezüglich (paarweise verschiedener) Nullstellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ von p die Lösungen, so sind diese *linear unabhängig* und bilden damit ein Fundamentalsystem für die Lösungen von $*$.

VIII.27 Lineare Differentialgleichungen - *Potenzreihenansatz*

Vorlesung vom 11.11.2003

Vor.:

$$v^{(n)} + \alpha_{n-1}(t)v^{(n-1)} + \ldots + \alpha_1(t)v' + \alpha_0(t)v = \beta(t) \qquad *$$

Es seien $\alpha_0, \alpha 1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta$ um t_0 in einer Potenzreihe entwickelbar mit *positivem* Konvergenzradius (Vergleich IV.72).

Ansatz:

$$v(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (t - t_0)^k, \qquad c_k \in \mathbb{R},\ k = 0, 1, 2, \dots \qquad **$$

Einsetzen von $**$ in $*$

Gliedweise differenzieren von $**$

Koeffezientenvergleich bringt Rekursionsformel für c_k

Anschließend untersuchen ob $**$ positiven Kovergenzradius hat, denn nur dann ist das gliedweise differenzieren von $**$ erlaubt (Vergleich IV.70, IV.72)

VIII.28 Stabilität von Gleichgewichtspunkten autonomer Differentialgleichungen

Vorlesung vom 11.11.2003 und 14.11.2003

Vor.:

$$x' = F(x) \qquad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \qquad *$$

$*$ heißt *autonome Differentialgleichung*, da F nicht explizit von t abhängt.

VIII.28.1 Def.: Gleichgewichtspunkt

$\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $F(\bar{x}) = 0$ heißt *Gleichgewichtspunkt* für $*$.

$x(t) = \bar{x}$ ist die Lösung von $*$ mit $x(0) = \bar{x}$.

VIII.28.2 Def.: Stabil, asymptotisch stabil, instabil

Sei $\bar{x}$ ein Gleichgewichtspunkt von $*$.

Def.: Stabil

$\bar{x}$ ist *stabil* falls für jede Umgebung U von $\bar{x}$ ($\bar{x} \in U$) eine Umgebung V von $\bar{x}$ existiert, so dass die Lösung $x(t)$ mit $x(0) \in V$ definiert ist für alle $t > 0$ und zusätzlich $x(t) \in U$ ist für alle $t > 0$.

Def.: Asymptotisch stabil

$\bar{x}$ ist *asymptotisch stabil*, falls $\bar{x}$ stabil ist und mit U, V wie oben gilt:
$x(t) \to \bar{x}$ für $t \to \infty$.

Def.: Instabil

$\bar{x}$ ist instabil, falls $\bar{x}$ nicht stabil ist.

VIII.28.3 Lineare Koordinatentransformation

Sei $F(x) = Ax \quad (A \in M_n)$ linear, also $\qquad x' = Ax.$
Dann ist $\bar{x} = 0$ Gleichgewichtspunkt.

Lemma

Stabilitätsbetrachtung ist invariant unter linearer Koordinatentransformation.
Etwa $\quad y := Bx \quad$ für ein $B \in M_n, B$ nicht singulär.

$$\begin{array}{rll} y(t) & = Bx(t) & \text{bzw. } x(t) = B^{-1}y(t) \\ x' = Ax & \Longrightarrow (B^{-1}y)' & = A(B^{-1}y) \\ & B^{-1}y' & = AB^{-1}y \\ & \Longrightarrow y' & = BAB^{-1}y \end{array}$$

VIII.28.4 Satz

Vor.:

$A \in M_n$

Beh.:

Es ist $\bar{x} = 0$ asymptotisch stabil für $x' = Ax$
$\Longleftrightarrow \quad Re(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte λ von A
$\overset{VIII.24}{\Longleftrightarrow} \quad \lim_{t\to\infty} \exp(tA) = 0$

VIII.28.5 Satz

Vor.:

$F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), F(\bar{x}) = 0$ (F i.A. nicht linear)

Beh.:

$\bar{x}$ ist asymptotisch stabil für $* \Longleftarrow Re(\lambda) < 0$ für alle Eigenwerte λ von $DF(\bar{x})$

VIII.29 Satz: Lyapunov-Funktion

Vorlesung vom 14.11.2003

Vor.:

$x' = F(x), \quad F \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \quad F(\bar{x}) = 0$
U offene Umgebung von $\bar{x}, \quad V : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar
$V(x) > V(\bar{x}) \quad \forall x \neq \bar{x} \qquad$ ($\bar{x}$ globales Minimum)

Beh.:

1. Falls $\dot{V} \leq 0 \quad \forall x \in U \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x}$ ist stabil
2. Falls $\dot{V} < 0 \quad \forall x \in U \setminus \{\bar{x}\} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{x}$ ist asymptotisch stabil

Wobei $\dot{V} := DV(x) \cdot F(x)$ ist.

Kapitel IX

Integration von Funktionen mehrerer Veränderlichen

IX.1 Vorbereitung

Vorlesung vom 18.11.2003

IX.1.1 Satz 1

Vor.:

$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $\quad f : [a,b] \times A \to \mathbb{R}$ stetig

Beh.:

$F : A \to \mathbb{R}$ stetig, $\quad$ wobei $F(x) := \int_a^b f(t,x)dt$

IX.1.2 Satz 2

Vor.:

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig
$\partial_2 f : [a,b] \times (c,d) \to \mathbb{R}$ existiert und ist stetig fortsetzbar auf $[a,b] \times [c,d]$

Beh.:

Mit $\quad F(x) := \int_a^b f(t,x)dt \quad$ ist F differenzierbar auf (c,d) und
$F'(x) = \int_a^b \partial_2 f(t,x)dt$

IX.1.3 Satz 3

Vor.:

$f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig

Beh.:

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(s,t)ds \right) dt = \int_a^b \left(\int_c^d f(s,t)dt \right) ds$$

IX.2 Integral für stetige Funktionen mit kompakten Trägern

Vorlesung vom 18.11.2003

$$\begin{aligned} &C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \mid \ \mathrm{supp}(f) \text{ kompakt}\} \\ &\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}} \\ &f \in C_c(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

IX.2.1 Definition: Integral

$\int_{\mathbb{R}^\mathbf{n}} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n := \int_Q f(x)dx$
wobei $Q \supset \mathrm{supp}(f)$

IX.2.2 Satz

Vor.:

$f, g \in C_c(\mathbb{R}^n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Beh.:

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$
2. $\int_{\mathbb{R}^n} \lambda f = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f$
3. $f \leq g$ (d.h. $f(x) \leq g(x) \forall x$)
   $\Longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g$
   Monotonie
4. Mit $a \in \mathbb{R}^n, \quad \tau_a f : x \mapsto f(x-a)$ gilt
   $\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} \tau_a f$
   verschobene Funktion
5. *Vor.:* $f_k \in C_c(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N}$ und $f_k \longrightarrow f$ *gleichmäßig*
   $\mathrm{supp}(f_k) \subset K \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (K kompakt)
   Beh.: $\int_{\mathbb{R}^n} f_k \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f$ für $k \to \infty$

IX.3 Transformationsregel für lineare Abbildungen

Mehrdimensionale Substitutionsregel
Vorlesung vom 21.11.2003

Vor.:

$f \in C_c(\mathbb{R}^n), \qquad A \in GL(n)$

Beh.:

$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax) \cdot |\det(A)|\; dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$

IX.3.1 Folgerung

$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b) \cdot |\det(A)|\; dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$

IX.4 Zerlegung der Eins

Vorlesung vom 21.11.2003

$$\begin{array}{rl} \text{Eindimensional:} & \psi(t) := \begin{cases} 1-|t| & t \in [-1,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{Mehrdimensional:} & \Psi(x_1,\ldots,x_n) := \psi(x_1)\cdot\ldots\cdot\psi(x_n) \qquad \text{(Tensoransatz)} \\ & \Psi_\varepsilon(x) := \Psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \\ \text{Dann ist} & \displaystyle\sum_{p\in\mathbb{Z}^n} \tau_p \Psi(x) \equiv 1 \end{array}$$

IX.5 Die Transformationsregel

Vorlesungen vom 21.11.2003 bis 28.11.2003

Vor.:

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\qquad \varphi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus $\qquad f \in C_C(V)$

Beh.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\varphi(x)) \cdot |detD\varphi(x)|\; dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy$$

IX.5.1 Def.: C^1-Diffeomorphismus

$\varphi : U \to V$ ist ein C^1-*Diffeomorphismus*, falls folgendes gilt:

1. φ bijektiv
2. $\varphi : U \to V$ stetig differenzierbar
3. $\varphi^{-1} : V \to U$ stetig differenzierbar

IX.5.2 Lemma 1

Vor.:

$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

Beh.:

$\forall \alpha > 0 \exists \varepsilon^* > 0$ so dass $\forall 0 < \varepsilon \leq \varepsilon^*$ gilt:

$$\|f - \sum_{p \in \mathbb{Z}^n} f(p\varepsilon) \cdot \tau_{p\varepsilon} \cdot \Psi_\varepsilon\|_\infty \leq \alpha$$

wobei $\|g\|_\infty = \sup_x |g(x)|$.

IX.5.3 Lemma 2 (Stetigkeitsmodul)

Vor.:

$\emptyset \neq K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt*, $\qquad f : K \to \mathbb{R}$ *stetig*

Beh.:

Mit $\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in K \text{ mit } \|x - y\| \leq \delta\}$ gilt:

1. $\omega(\delta)$ ist monoton fallend.
2. $\lim\limits_{\delta \to \infty} \omega(\delta) = 0$
3. $|f(x) - f(y)| \leq \omega(\|x - y\|)$

IX.6 Integral für halbstetige Funktionen

Vorlesungen vom 28.11.2003 bis 05.12.2003

IX.6.1 Definition: $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ gehört zu $\mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$
$\Longleftrightarrow$
$\exists f_k \in C_c(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad f_k \leq f_{k+1} \quad \forall k \quad \text{und} \quad \lim f_k(x) = f(x)$

IX.6.2 Definition: $f \in \mathcal{H}^\uparrow(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f := \lim_{k \to \infty} \int f_k \qquad (\text{existiert in } \mathbb{R} \cup \{+\infty\})$$

IX.6.3 Definition $f_k \uparrow f$

$f_k \uparrow f \iff f_{k+1} \geq f_k$ und $f_k(x) \longrightarrow f(x)\ \forall x$

IX.6.4 Lemma 1

$\int f$ ist unabhängig von der Folge $f_k \uparrow f$.

IX.6.5 Bemerkung 1

Falls $f_k, f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\qquad \mathrm{supp}(f_k) \subset K$ (kompakt) $\forall k$,
$f_k \longrightarrow f$ gleichmäßig

Dann ist nach IX.2 $\quad \lim_k \int f_k = \int \lim_k f_k = \int f$.

IX.6.6 Bemerkung 2

Falls $f_k, f \in C_c(\mathbb{R}^n), \quad f_k \uparrow f$

Dann gilt: $\int f = \lim_k \int f_k$

IX.6.7 Lemma 2

$\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n) = C_c(\mathbb{R}^n)$

IX.6.8 Satz 1 (Dini)

Vor.:

$$\begin{aligned}
&K \in \mathbb{R}^n \text{kompakt}, \\
&g_k : K \to \mathbb{R} \text{ stetig} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\
&g_k \geq g_{k+1} \geq 0_K \qquad \text{(Monotonie)} \\
&\lim_k g_k(x) = 0 \quad \forall x \in K \qquad \text{(punktweise Konvergenz)}
\end{aligned}$$

Beh.:

$$g_k \longrightarrow 0_K \quad \text{gleichmäßig}$$

IX.6.9 Definition: Halbstetig

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ heißt *von unten halbstetig* in x, falls

$$\forall c \in \mathbb{R} \text{ mit } f(x) > c \ \exists \text{ Umgebung } U \text{ von } x \text{ mit } f(y) \geq c \ \forall y \in U$$

IX.6.10 Satz 2 (Charakterisierung von $\mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$)

Vor.:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Beh.:

$f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ ist äquivalent zu:

1. f *von unten* halbstetig
2. $\exists K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, mit $f(x) \geq 0 \ \forall x \notin K$

IX.6.11 Lemma 3

Vor.:

$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ von unten halbstetig $\forall i \in I$, wobei I eine beliebige Menge ist.

Beh.:

$f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x) \quad$ ist von unten halbstetig.

IX.7 Eigenschaften von $\int f$

Vorlesungen vom 05.12.2003 bis 09.12.2003

IX.7.1 Satz 1

Vor.:

$f, g \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$

Beh.:

1. $f + g \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ und
   $\int (f+g) = \int f + \int g$

2. Für $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq 0$ gilt:
   $\lambda f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$ und $\int \lambda f = \lambda \int f$

3. $-f \in \mathcal{H}^{\downarrow}(\mathbb{R}^n)$ und
   $\int -f = -\int f$

4. $f \leq g \Longrightarrow \int f \leq \int g$

IX.7.2 Konvention

$$\begin{aligned} \infty &:= 1+1+1+\dots \\ a+\infty &:= \infty \qquad a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \lambda\infty &:= \infty \qquad \lambda > 0 \\ 0 \cdot \infty &:= 0 \end{aligned}$$

IX.7.3 Satz 2

Vor.:

$f_r \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$, $f_r \geq 0$, $r = 0, 1, 2, \dots$

Beh.:

1. $$\sum_{r=0}^{\infty} f_r \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n)$$

2. $$\int \sum_{r=0}^{\infty} f_r = \sum_{r=0}^{\infty} \int f_r$$

IX.7.4 Definition: Volumen

Sei $C \in \mathbb{R}^n$ kompakt.

$$\textit{Volumen:} \qquad \mathrm{Vol}_n := \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_C = \int_C 1 \; dx$$

wobei

$$\kappa_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in C \\ 0 & \text{falls } x \notin C \end{cases}$$

IX.7.5 Satz 3 (Fubini)

Vor.:

$f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n), \qquad 1 \leq k \leq n$

Beh.:

1. $(x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ fest:

   $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto f(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^k)$

2. $F(x_{k+1}, \ldots, x_n) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n$

   (a) $F \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^{n-k}) \quad$ und es gilt

   (b)

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F(x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dx_{k+1} \ldots dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \left(\int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_k \right) dx_{k+1} \ldots dx_n \end{aligned}$$

IX.7.6 Folgerung (Volumen)

$\mathrm{Vol}_n(\times_{i=1}^n \, [a_i, b_i]) = \mathrm{Vol}_{n-1}(\times_{i=1}^{n-1} \, [a_i, b_i]) \cdot \mathrm{Vol}_1([a_1, b_1])$

IX.7.7 Folgerung (Volumen)

$\mathrm{Vol}_n(C_1 \times C_2) = \mathrm{Vol}_k(C_1) \cdot \mathrm{Vol}_{n-k}(C_2)$

IX.7.8 Prinzip von Cavalieri ("Salamitechnik")

Vor.:

$C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt.
$C_t := \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}, t) \in C \right\}$

Beh.:

$$\mathrm{Vol}_n(C) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{Vol}_{n-1}(C_t) dt$$

IX.8 Satz (Transformationsregel)

Vorlesungen vom 09.12.2003 bis 12.12.2003

Vor.:

$f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n), \qquad A \in GL(n), \qquad b \in \mathbb{R}^n$

Beh.:

$$\begin{aligned} & x \mapsto f(Ax+b) \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n) \\ \text{und} \quad & \int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)|\det A| dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) dy \end{aligned}$$

IX.8.1 Folgerung

Vor.:

$f \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n), \qquad A \in GL(n)$

Beh.:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\,|det(A)|\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy$$

IX.8.2 Folgerung

Vor.:

$f(x) = Ax + b, \qquad A \in M_n, \qquad b \in \mathbb{R}^n, \qquad C \subset \mathbb{R}^n$ kompakt

Beh.:

$$\mathrm{Vol}_n(f(C)) = |det(A)|\,\mathrm{Vol}_n(C)$$

IX.9 Lebesgue-Integral

Vorlesungen vom 12.12.2003 bis 16.12.2003

IX.9.1 Definition: $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}\}$$

IX.9.2 Definition: Ober- / Unterintegral

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$$\text{Oberintegral :} \quad \int^* f := \inf \left\{ \int \varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}^{\uparrow}(\mathbb{R}^n), \varphi \geq f \right\}$$

$$\text{Unterintegral :} \quad \int_* f := \sup \left\{ \int \varphi \mid \varphi \in \mathcal{H}^{\downarrow}\left(\mathbb{R}^n\right), \varphi \le f \right\}$$

IX.9.3 Definition: Lebesgue-Integrierbar

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *Lebesgue-integrierbar*, falls

$$-\infty < \int_* f = \int^* f < +\infty$$

Dann ist $\int f$ das *Lebesgue-Integral*

IX.9.4 Eigenschaften

Beh.:

$\int_* f \le \int^* f \qquad \forall f \in \mathcal{F}$

Beh.:

$\forall f, g \in \mathcal{F}$ mit $f \le g$ gilt: $\qquad \int^* f \le \int^* g$

Beh.:

Für $f \in \mathcal{H}^{\uparrow}\left(\mathbb{R}^n\right)$ gilt: $\qquad \int_* f = \int^* f$

IX.9.5 Definition: $\mathcal{F}_+$

$$F_+ := \{f \in \mathcal{F} | f \ge 0\}$$

IX.9.6 Satz 1

1. $f \in \mathcal{F}_+ \quad \Longrightarrow \quad \int^* \lambda f = \lambda \int^* f$
2. $f_k \in \mathcal{F}_+$ Folge, $\quad k \in \mathbb{N}$
   Dann:
$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k \le \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k$$

IX.9.7 Definition $\|f\|_{L_1}$

$f \in \mathcal{F}$

$$\|f\|_{L_1} := \int^* |f| \qquad \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

IX.9.8 Satz ($\|f\|_{L_1}$)

1. $\|\lambda f\|_{L_1} = |\lambda| \, \|f\|_{L_1} \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathcal{F}$
2. $\|f + g\|_{L_1} \le \|f\|_{L_1} + \|g\|_{L_1} \qquad \forall f, g \in \mathcal{F} \qquad$ (Dreiecksungleichung)

IX.9.9 Satz 3: Charakterisierungssatz

1. $f \in \mathcal{F}$ ist Lebesgue-integrierbar
   $\Longleftrightarrow$
   $\forall \varepsilon > 0 \; \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - g\|_{L_1} \leq \varepsilon$
2. Falls $g_k \in C_c(\mathbb{R}^n),\; k \in \mathbb{N}$ Folge, $\quad f \in \mathcal{F}$
   mit $\lim\limits_{k\to\infty} \|f - g_k\|_{L_1} = 0$
   $\Longrightarrow$
   f ist Lebesgue-integrierbar *und* $\int f = \lim\limits_{k\to\infty} \int g_k$

IX.9.10 Folgerung 1

Definition: f_+, f_-

$f_+ := \max(f, 0), \qquad f_- := \min(f, 0) \qquad \Rightarrow f = f_+ + f_-$

Folgerung:

1. $f \in \mathcal{F}$ Lebesgue-integrierbar $\quad \Longleftrightarrow \quad$ f_+, f_- sind Lebesgue-Integrierbar
2. $f \in \mathcal{F}$ Lebesgue-integrierbar $\quad \Longrightarrow \quad$ $|f|$ ist Lebesgue-Integrierbar

IX.9.11 Definition: $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$

$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist Lebesgue-integrierbar}\}$

IX.9.12 Folgerung 2

Vor.:

$f, g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Beh.:

1. $\lambda f, \quad f + g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ und
   $\int f + g = \int f + \int g, \quad \int \lambda f = \lambda \int f$
2. $f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int f \leq \int g$
3. $\max(f, g),\; \min(f, g) \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$
4. $|g(x)| \leq M \; \forall\, x \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$
5. $|f(x)| \leq M \; \forall x \in \mathbb{R}^n,\; 1 \leq p \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad |f|^p \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$

IX.9.13 Folgerung 3

Vor.:

$f_1 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n), \quad f_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^m)$

Beh.:

$f_1 \otimes f_2 \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^{n+m}) \qquad$ und $\qquad \int f_1 \otimes f_2 = \int f_1 \cdot \int f_2$

IX.9.14 Definition: Integrierbar (Menge)

$M \in \mathbb{R}^n$ heißt *integrierbar*, falls κ_M integrierbar ist.
Dann ist $\mathrm{Vol}_n(M) := \int \kappa_M$ *Volumen* von M. (*Lebesgue-Maß*)

IX.9.15 Satz (Rechenregeln)

Vor.:

$A, B \in \mathbb{R}^n$ integrierbare Mengen.

Beh..:

$A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ sind integrierbar und

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}(A \cup B) &= \mathrm{Vol}(A) + \mathrm{Vol}(B) - \mathrm{Vol}(A \cap B), \\ \mathrm{Vol}(A \setminus B) &= \mathrm{Vol}(A) - \mathrm{Vol}(A \cap B) \end{aligned}$$

IX.9.16 Definition: Integrierbar (Funktion)

$M \in \mathbb{R}^n, f : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt *integrierbar*, falls die triviale Fortsetzung

$$\tilde{f} := \begin{cases} f(x), & x \in M \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

integrierbar ist.

IX.10 Nullmengen

Vorlesungen vom 19.12.2003 bis 16.01.2004

IX.10.1 Definition: Nullmenge

$M \in \mathbb{R}^n$ heißt *Nullmenge*, falls $\int^* \kappa_M = 0$.

$\Rightarrow \int_* \kappa_M = 0 \Rightarrow M$ ist integrierbar mit $\mathrm{Vol}(M) = 0$.

IX.10.2 Satz 1

1. $M \in \mathbb{R}^n$ Nullmenge, $N \subset M$
   $\Longrightarrow N$ ist Nullmenge.
2. $\forall k \in \mathbb{N} : M_k \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge
   $\Longrightarrow M := \bigcup_{k=1}^{\infty} M_k$ ist Nullmenge.

IX.10.3 Beispiel 1

- Jeder Punkt $\{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.
- Jede *abzählbare* Menge in $\mathbb{R}^n$ ist Nullmenge.

IX.10.4 Beispiel 2 (Cantor Menge)

Die Cantor-Menge (Vgl. Ana I, Üb 4, SA 3) ist überabzählbar und Nullmenge.

IX.10.5 Beispiel 3

Vor.:

$K \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad f : K \to \mathbb{R}$ stetig

Beh.:

$\Gamma := \text{Graph}(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid f(x) = y\big\}$ ist Nullmenge.

IX.10.6 Beispiel 4

Vor.:

$V \in \mathbb{R}^{n-1}, \qquad V = \bigcup_{k=1}^{\infty} K_i, \quad K_i$ kompakt $\forall i, \qquad f : V \to \mathbb{R}$ stetig

Beh.:

Graph(f) ist Nullmenge.

IX.10.7 Beispiel 4a

$V \in \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, $\qquad \mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{\infty} W_i, \quad W_i$ kompakte Würfel.

$\Longrightarrow V = \bigcup_{i=1}^{\infty} (W_i \cap V)$

IX.10.8 Lemma 1

Vor.:

$M \subset \mathbb{R}^n$ Nullmenge

Beh.:

$\forall \varepsilon > 0$ existiert eine integrierbare, offene Menge $U \in \mathbb{R}^n$, so das gilt:
$M \subset U, \qquad \text{Vol}(U) < \varepsilon.$

IX.10.9 Lemma 2

$M \subset \mathbb{R}^n$Nullmenge
$\Longleftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Folge $(W_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von kompakten Würfeln mit $M \subset \bigcup_i W_i$ und $\sum_i \text{Vol}(W_i) \leq \varepsilon$

IX.10.10 Satz 2

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\quad F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $\quad M \subset N$ Nullmenge.

Beh.:

$F(M)$ ist auch Nullmenge.

IX.10.11 Satz 3 (Fubini)

Vor.:

$f \in \mathcal{F}$ sei integrierbar.
$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \quad (1 \leq k \leq n), \qquad x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^m$
N Nullmenge in $\mathbb{R}^m$

Beh.:

1. $x \mapsto f(x,y)$ ist integrierbar für alle $y \in \mathbb{R}^m \setminus N$.
2. Mit
$$F(y) := \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f(x,y)dx & y \in \mathbb{R}^m \setminus N \\ \text{beliebig} & y \in N \end{cases}$$
gilt:
   (a) $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist integrierbar
   (b)
$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f &= \int_{\mathbb{R}^m} F(y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{R^k} f(x,y)dx \right) dy \end{aligned}$$

IX.10.12 Lemma 4

Vor.:

$$M \subset \mathbb{R}^n \text{ Nullmenge}, \qquad f(x) := \begin{cases} \infty & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

Beh.:

f integrierbar und $\int f = 0$.

IX.10.13 Definition: Fast überall

$f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$
f ist fast überall gleich g, falls eine Nullmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ existiert mit

$$f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus M$$

IX.10.14 Lemma 5

Vor.:

$f, g \in \mathcal{F}$, $\qquad f$ integrierbar, $\qquad f(x) = g(x)$ fast überall.

Beh.:

g ist integrierbar und $\int f = \int g$.

IX.10.15 Lemma 6

Vor.:

$f \in \mathcal{F}$

Beh.:

$\int^* |f| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0$ fast überall

IX.11 Wer hat Kapitel 11 gesehen ???

IX.12 Konvergenzsätze

Vorlesungen vom 13.01.2004 bis 16.01.2004

Typ "$\int \lim_k f_k = lim_k \int f_k$"

IX.12.1 Satz 1 (Levi: Monotone Konvergenz)

Vor.:

$f_k \in \mathcal{F}$ integrierbar, $\qquad f_k \nearrow$ d.h. $f_k \leq f_{k+1}$
Es sei $lim_{k\to\infty} \displaystyle\int f_k = M < \infty$.

Beh.:

$f := \lim_{k\to\infty} f_k$ (aus $\mathcal{F}$) ist integrierbar und

$$\int \lim_k f_k = \lim_k \int f_k$$

IX.12.2 Folgerung 1

Vor.:

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ integrierbare Mengen aus $\mathbb{R}^n$.
$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}_n(A_k) = M < \infty$

Beh.:

$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ ist integrierbar und

$$\mathrm{Vol}_n(A) = \lim_{k\to\infty} \mathrm{Vol}_n(A_k)$$

IX.12.3 Folgerung 2

Vor.:

$A_k \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Vol}(A_i \cap A_j) = 0$ für $i \neq j$.
Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}(A_k) < \infty$.

Beh.:

$A := \bigcup_{k=1}^{\infty}$ ist integrierbar und

$$\mathrm{Vol}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{Vol}_(A_k)$$

IX.12.4 Satz 2 (Lebesgue: Majorisierte Konvergenz)

Vor.:

$f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *integrierbar*, $k \in \mathbb{N}$, N Nullmenge, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus N : f_k(x) \to f(x)$
Ferner sei $|f_k| \leq F$ mit $F \in \mathcal{F}_+$ und $\int^* F < \infty$.

Beh.:

Es ist f *integrierbar* und

$$\int f = \int \lim_{k\to\infty} f_k = \lim_{k\to\infty} \int f_k$$

IX.12.5 Folgerung 3

Vor.:

$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. $A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$
Ferner sei $f : A \to \mathbb{R}$ derart, dass $f_{|A_k}$ über A_k integrierbar ist für alle k.
(Das heißt trivial außerhalb A_k fortsetzen.)

Beh.:

Falls $\lim_{k\to\infty} \int_{A_k} |f| < \infty \implies f$ integrierbar über A und

$$\int_A f = lim_{k\to\infty} \int_{A_k} f$$

Anmerkung:

o.B.d.A. ist $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} \cup$ Nullmenge.

IX.13 Parameterabhängige Integrale

Vorlesungen vom 16.01.2004 bis 20.01.2004

IX.13.1 Typen

1. $t \mapsto \int f(t,x)dx \qquad$ stetig?
2. $\frac{d}{dt} \int f(t,x)dx \stackrel{?}{=} \int \frac{\partial}{\partial t} f(t,x)dx$

IX.13.2 Satz 1 (Typ 1)

Vor.:

$t \in U \subset \mathbb{R}^m, \qquad f : \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \mapsto f(x,t)$

1. Für alle $t \in U$ ist $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar.
2. Für (fast) alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto f(x,t)$ stetig in $\bar{x}$.
3. Es existiert ein F *integrierbar*, so dass $|f(x,t)| \leq F(x)\ \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times U$.

Beh.:

$$g(t) := \int f(x,t)dx \quad \text{ist stetig in } \bar{t}.$$

IX.13.3 Satz 2 (Typ 2)

Vor.:

$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall (1-dimensionaler Parameter)
$f : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$ mit $(x,t) \mapsto f(x,t)$

1. $\forall\, t \in I$ ist $x \mapsto f(x,t)$ integrierbar.
2. $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ ist $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar auf I.
3. Majorisierung:
   $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq F(x) \quad \forall\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times I \qquad$ und $\qquad F$ *integrierbar*.

Beh.:

$g(t) := \int f(x,t)dx$ ist differenzierbar auf I und es gilt:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) \quad \text{ist integrierbar und} \\ g'(t) &= \int \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx \end{aligned}$$

IX.14 Die $\mathcal{L}_p$-Räume

Vorlesungen vom 20.01.2004 bis 23.01.2004

Vergleiche auch IX.9.12, Folgerung 2.

IX.14.1 Definition: lokal integrierbar

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *lokal integrierbar* $\left(f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)\right)$, falls

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n\ \exists\,\text{Umgebung } U \text{ von } x, \text{ so dass } f \text{ über } U \text{ integrierbar ist.}$$

IX.14.2 Bemerkung: (Charakterisierung von *lokal integrierbar*)

f lokal integrierbar
$\Longleftrightarrow$
$\forall\, K \subset \mathbb{R}^n, K$ kompakt: f über K integrierbar.

IX.14.3 Satz 3 (Charakterisierungssatz $\mathcal{L}_1$)

$$\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_1} < \infty\right\}$$

IX.14.4 Definition: $\|.\|_{L_p}$ und $\mathcal{L}_p$

$p \in \mathbb{R}, \quad p \geq 1$

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_p} &:= \left(\int_{\mathbb{R}^n}^{*} |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ \mathcal{L}_p &:= \left\{f \in \mathcal{L}_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_p} < \infty\right\} \end{aligned}$$

IX.14.5 Satz 1

Vor.:

$f, g \in \mathcal{F}$

Beh.:

1. Hölder-Ungleichung:
   $p, q \in \mathbb{R}, \quad p, q \geq 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$
   $\Longrightarrow \quad \|f \cdot g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \cdot \|g\|_{L_q}$
2. Minkowski-Ungleichung:
   $\|f + g\|_{L_p} \leq \|f\|_{L_p} + \|g\|_{L_p}$

IX.14.6 Lemma 1

Vor.:

$p \geq 1, \qquad f, g \in \mathcal{L}_p, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Beh.:

1. $f + g \in \mathcal{L}_p$
2. $\lambda f \in \mathcal{L}_p$
3. $|f| \in \mathcal{L}_p$

Folgerung:

Aus 1. und 2. folgt: $\mathcal{L}_p$ ist ein Vektorraum.

IX.14.7 Satz 4

1. $p \geq 1,\ f \in \mathcal{L}_p \quad \Longrightarrow \quad |f|^p \in \mathcal{L}_1$
2. $p \geq 1,\ f \in \mathcal{L}_p \quad \Longrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\|f - \varphi\|_{L_p} < \varepsilon$
3. $p, q \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad f \in \mathcal{L}_p, g \in Ł_q \quad \Longrightarrow \quad f \cdot g \in \mathcal{L}_1$

IX.14.8 Definition: L_p-Cauchy-Folge

$f_k \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n), \quad k \in \mathbb{N}$ heißt L_p-*Cauchy-Folge*, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k, l \geq k_0 : \|f_k - f_l\|_{L_p} \leq \varepsilon$$

IX.14.9 Satz 5

Vor.:

$p \geq 1, \quad f_k \in \mathcal{L}_p, k \in \mathbb{N} \quad L_p$-Cauchy-Folge

Beh.:

1. Es existieren eine Teilfolge $(f_{k_r})_{r\in\mathbb{N}}$ und eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass gilt:
$$f_k \longrightarrow f \text{ fast überall}$$
2. $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \quad$ und $\quad \lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_{L_p} = 0$

IX.14.10 Definition: L_p und $\|.\|_p$

$$\begin{aligned} p \geq 1, \quad \mathcal{N} &= \left\{ f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{L_p} = 0 \right\} \\ &= \{ f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n) \mid f = 0 \text{ fast überall} \} \\ L_p(\mathbb{R}^n) &:= \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N} \\ \text{zu } \bar{f} \in L_p \text{ setze} \quad \left\|\bar{f}\right\|_p &:= \|f\|_{L_p} \quad \text{mit Repräsentant } f \text{ von } \bar{f} \end{aligned}$$

Bemerkung:

- $\|.\|_p$ ist eine *Norm.*
- $\left(L_p(\mathbb{R}^n), \|.\|_p\right)$ ist ein *Banachraum.*

IX.14.11 Lemma 2 (über Reihen in $\mathcal{L}_p$)

Vor.:

$p \geq 1, \quad g_k \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n), k \in \mathbb{N} \quad$ mit $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{L_p} < \infty.$

Beh.:

Es existiert ein $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ mit $\sum_k g_k \to g$ fast überall und

$$\lim_{m\to\infty} \left\| g - \sum_{k=1}^{m} g_k \right\|_{L_p} = 0$$

Salopp: "$g = \sum_{k=1}^{\infty} g_k$"

IX.14.12 Ergänzung zur majorisierten Konvergenz

Vor.:

$f_k \in \mathcal{L}_p, k \in \mathbb{N}, \qquad f_k \to f$ fast überall, $\qquad |f_k| \leq F, \qquad \|F\|_{L_p} < \infty$

Beh.:

$f \in \mathcal{L}_p$ und $\lim_{k\to\infty} \|f - f_k\|_{L_p} = 0$

IX.15 Transformationsformel in $\mathcal{L}_1$

Vorlesungen vom 23.01.2004 bis 23.01.2004

IX.15.1 Definition: $\mathcal{L}_1(V)$

$V \subset \mathbb{R}^n$

$$\mathcal{L}_1(V) := \left\{ f \in \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n) \mid f_{|\mathbb{R}^n \setminus V} = 0 \right\}$$

IX.15.2 Satz: Transformationsregel

Vor.:

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\qquad \varphi : U \to V \quad C^1-$Diffeomorphismus

Beh.:

$f : V \to \mathbb{R}$ integrierbar über V
$\Longleftrightarrow$
$f \circ \varphi \cdot |\det D\varphi|$ integrierbar über U
und

$$\int_U f(\varphi(x))\,|\det D\varphi|\,dx = \int_V f(y)\,dy$$

Salopp: “ $dy = |\det D\varphi|\,dx = \left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| dx$ ”

IX.15.3 Lemma (Dichtigkeit von C_c in $\mathcal{L}_1$)

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\qquad f \in \mathcal{L}_1(U)$

Beh.:

$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\varphi \in C_c(U) : \|f - \varphi\|_{L_1} < \varepsilon$

IX.15.4 Folgerung (Polarkoordinaten)

$(x, y) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$

Beh.:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ integrierbar
$\Longleftrightarrow$
$(r, \varphi) \mapsto f\,(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,r \quad$ integrierbar über $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$
und

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\,(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\,dx\,dy$$

IX.16 Mannigfaltigkeiten

Vorlesungen vom 27.01.2004 bis 06.02.2004

Aspekt 1

Lokal als “stabile” Nullstellenmenge

IX.16.1 Definition 1: C^k-Mannigfaltigkeit

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension n* ($k \geq 1$),
falls $\forall\,\bar{x} \in M$ gilt: Es existieren eine offene Umgebung $\mathcal{O}$ von $\bar{x}$ und $n - m$ Funktionen $f_1, f_2, \ldots, f_{n-m} \in C^k(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, sodas

1. $$M \cap \mathcal{O} = \{x \in \mathcal{O} \mid f_1(x) = 0, f_2(x) = 0, \ldots, f_{n-m}(x) = 0\}$$

2.

$$\operatorname{Rang}\begin{bmatrix} Df_1 \\ Df_2 \\ \vdots \\ Df_{n-m} \end{bmatrix}_{|\bar{x}} = n - m$$

$n - m$ heißt *Kodimension*.

Aspekt 2

M lokal als Graph einer Funktion von m Variablen:

IX.16.2 Satz 1

Vor.:

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension m und $\bar{x} \in M$.

Beh.:

Nach eventueller Umnummerierung der Koordinaten existieren eine offene Umgebung $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ von $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ und $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^{n-m}$ von $(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m)$ und ein $g \in C^k(\mathcal{U}, \mathcal{V})$, sodas

$$M \cap (\mathcal{U} \times \mathcal{V}) = \{(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mid v = g(u)\}$$

(g implizite Funktion)

Aspekt 3

M sieht in lokalen Koordinaten aus wie $\mathbb{R}^m$

IX.16.3 Satz 2

$M \subset \mathbb{R}^n$ ist eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension n

$\iff$

$\forall\, \bar{x} \in M\ \exists$ offene Umgebung $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, eine offene Menge $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ und ein C^k-Diffeomorphismus $F : \mathcal{O} \to \mathcal{V}$, so das

$F(M \cap \mathcal{O}) = (\mathbb{R}^m \times \{0_{n-m}\}) \cap \mathcal{V}$.

IX.16.4 Definition: C^k-Diffeomorphismus

F *C^k-Diffeomorphismus*, falls $F \in C^k(\mathcal{O}, \mathcal{V})$ und $F^{-1} \in C^k(\mathcal{V}, \mathcal{O})$.

IX.16.5 Definition 2: Homöomorphismus

Seien $A \subset \mathbb{R}^m, B \subset \mathbb{R}^n, F : A \to B$ *Homöomorphismus*, falls
F bijektiv und F, F^{-1} beide stetig.

IX.16.6 Definition 3: C^k-Immersion

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen.
Ein $f \in C^k(U, \mathbb{R}^n)(k \geq 1)$ heißt C^k-*Immersion*, falls
$\text{Rang}(DF(x)) = m \quad \forall\, x \in U$.

IX.16.7 Satz 3

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $\qquad F \in C^k(U, \mathbb{R}^n),\ k \geq 1,\ C^k$-Immersion

Beh.:

$\forall\, \bar{y} \in U$ existiert eine offene Umgebung $V \subset U$ von $\bar{y}$, sodas $F(V)$ eine C^k-Mannigfaltigkeit ist und $F : V \to F(V)$ ein Homöormorphismus.

Aspekt 4

Karte "lokale Parametrisierung" / Kartenwechsel

IX.16.8 Satz 4

$$\begin{aligned}
&M \subset \mathbb{R}^n \text{ ist } C^k\text{-Mannigfaltigkeit der Dimension } m\\
&\quad \Longleftrightarrow\\
&\forall\, \bar{y} \in M\ \exists\, V \subset M (\bar{y} \in V),\ V \text{ relativ offen in } M,\\
&U \subset \mathbb{R}^m \text{ offen und eine } C^k\text{-Immersion } \varphi : U \to \mathbb{R}^n \text{mit}\\
&\varphi(U) = V \text{ und } \varphi : U \to V \text{ Homöormorphismus.}
\end{aligned}$$

IX.16.9 Definition: Karte

φ aus Satz 4 heißt *Karte*.
(C^k-Immersion und Homöormorphismus)

Notation:

$\varphi : U \xrightarrow{\text{Ⓚ}} V$

IX.16.10 Satz 5: (Kartenwechsel)

Vor.:

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension m.
$\varphi_i : U_i \xrightarrow{K} V_i,\ (i = 1, 2) \quad$ zwei Karten mit $\quad V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$

Beh.:

1. $W_i := \varphi_i^{-1}(V)$ offen $\quad (i = 1, 2)$
2. $\tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2 \quad C^k$-Diffeomorphismus

Aspekt 5 (Abstrakt)

X topologischer Raum, Hausdorff'sch (Konvergenz ist definiert)
Karte: $\varphi : U \xrightarrow{K} X$ stetig
Fordere: Kartenwechsel ist differenzierbar

IX.16.11 Definition: Maßtensor, Gramsche Determinante

Maßtensor

$M \subset \mathbb{R}^n, C^k$-Mannigfaltigkeit der Dimension $m (k \geq 1)$. Es sei $\varphi : U \xrightarrow{Ⓚ} V$ Karte.
Maßtensor: $G := (D\varphi)^T \cdot D\varphi$ (*Gram-Matrix*)

Bemerkung:

1. G ist symmetrisch.
2. G ist positiv definit.
   $\Longrightarrow$ Alle Eigenwerte sind strikt positiv.
   $\Longrightarrow \det G > 0$

Gramsche Determinante

$g := \det G$ heißt *gramsche Determinante*.

IX.16.12 Definition: Integrierbar über Mannigfaltigkeit

M Mannigfaltigkeit. Sei $F : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

Fall I: Es gibt eine Karte $\varphi : U \xrightarrow{Ⓚ} V \quad (V = M)$

f heißt *integrierbar über* M, falls

$$\begin{aligned} x &\mapsto f(\varphi(x)) \cdot \sqrt{g(x)} \quad \text{integrierbar über } U. \\ \int_M f dS &:= \int_U (f \circ \varphi)\sqrt{g} \end{aligned}$$

Beh.:

$\int_M f dS$ ist invariant unter Kartenwechsel.

IX.16.13 Lemma

$A, B \in \mathbb{R}^{n \times m}$

$$\det(A^T \cdot B) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_m} \det(A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}) \cdot \det(B_{i_1,i_2,\ldots,i_m})$$

Wobei $A_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ die Matrix mit den Zeilen $i_1, i_2, \ldots, i_m$ von A bezeichne.

Spezialfall:

$$A = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \dots \quad \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

Dann ist $\det(A^T \cdot A) = 1 + \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$

Fall II: Es gibt enlich viele Karten

$\varphi_i : U_i \xrightarrow{Ⓚ} V_i, \qquad i = 1, \dots, p$

IX.16.14 Definition: Atlas

Die Menge der Karten $\{\varphi_i \mid i = 1, \dots, p\}$ heißt *Atlas*.

$M = \bigcup_{i=1}^p V_i$

$$\int_M f dS := \sum_{i=1}^p \alpha_i f dS$$

wobei $a_i := \kappa_{W_i}$ mit $W_i = V_i \setminus (\bigcup_{k=1}^{i-1} V_k)$
Anmerkung: $\sum \alpha_i \equiv 1 \qquad$ (Zerlegung der 1)

Beh.:

$\int_M f dS$ ist unabhängig vom Atlas.

IX.16.15 Definition: Integrierbare Teilmenge

M C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension m.
$A \subset M$ heißt *integrierbare Teilmenge von* M, falls die charakteristische Funktion κ_A über M integrierbar ist.

IX.16.16 Definition: Volumen einer Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \mathrm{Vol}_m(M) &:= \int_M 1 dS \\ \mathrm{Vol}_m(A) &:= \int_M \kappa_A dS \end{aligned}$$

IX.16.17 Definition: Integrierbare Funktion über Mannigfaltigkeit

$F : M \to \mathbb{R}$ heißt *integrierbar über* A, falls $\kappa_A \cdot f$ integrierbar ist über M.

$$\int_A f dS := \int_M \kappa_A f dS$$

IX.16.18 Definition: m-dimensionale Nullmenge

$N \subset M$ heißt *m-dimensionale Nullmenge*, falls N integrierbare Teilmenge von M ist und

$$\mathrm{Vol}_m(N) = 0$$

Bemerkung:

Ändert man eine integrierbare Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ auf einer (m-dimensionalen) Nullmenge ab, so bleibt f integrierbar mit gleichem Integral.

IX.16.19 Beispiel: Rotationsfläche

$a < b \in \mathbb{R}, \qquad f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\quad f(x) > 0 \;\forall\, x \in [a, b]$
$M := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in (a, b) \text{ und } \sqrt{y^2 + z^2} = f(x) \right\}$ (Rotationsfläche)

Dann ist

$$\mathrm{Vol}_2(M) = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{a + f'(t)^2}\,dt$$

IX.16.20 Beispiel: Verzerrungsfaktor

$M \subset \mathbb{R}^n$ sei eine C^k-Mannigfaltigkeit der Dimension m. Sei $r > 0$.
Betrachte $F : x \mapsto rx$. Sei $A \subset M$ integrierbar.

Dann ist $F(A) \subset F(M)$ integrierbar und

$$\mathrm{Vol}_m(F(A)) = r^m \,\mathrm{Vol}_m(A)$$

Anhang A

Differentialgleichungen

A.1 Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen

Vgl. Übung 1, SA 4

Vor.:

Seien $I_x, I_y \subset \mathbb{R}$ zwei offene Mengen, $f(x)$ und $g(y)$ auf I_x bzw. I_y stetig mit $g(y) \neq 0$ für $y \in I_y$ und $x_0 \in I_x, y_0 \in I_y$.

Setze $\quad G(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{dt}{g(t)}, \quad F(x) := \int_{x_0}^{x} f(s)ds.$

Beh.:

1. Die Gleichung $\quad G(y) = F(x) \quad$ ist lokal um (x_0, y_0) nach y auflösbar.
2. Die implizite Funktion $y(x)$ ist Lösung der Differentialgleichung
$$y' = f(x)g(y), \qquad y(x_0) = y_0.$$

A.2 Die homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Vgl. Übung 1, HA 4

Vor.:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = a(x)\,y, \qquad x \in I$$

wobei $a : I \to \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in \mathring{I}$

Beh.:

Jede Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung ist von der Form

$$y(x) = C \cdot \exp\left(\int_{x0}^{x} a(t)dt\right) \qquad \text{mit } C \in \mathbb{R}$$

A.3 Die inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung

Methode der Variation der Konstanten
Vgl. Übung 2, SA 3

Vor.:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = a(x)\,y + h(x), \qquad x \in I, \quad y(x_0) = y_0$$

wobei $a(x), h(x) \in C(I, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathring{I}$.

Sei $y_1(x) := \exp\left(\int_{x0}^{x} a(t)dt\right)$ eine Lösung von $y' = a(x)\,y$ (Vgl. A.2)

Beh.:

$$y(x) = C(x)\,y_1(x)$$

ist eine Lösung der Differentialgleichung, wobei

$$C(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\ (y_1(t))^{-1}\,dt + y_0$$

ist.

A.4 Ähnlichkeitsdifferentialgleichung

Vgl. Übung vom 27.10.2003

Geg.:

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Hinweis:

Setze $z(x) := \frac{y(x)}{x}$
$\Rightarrow$ Löse: $z' = \frac{f(z)-z}{x}$ (Getrennte Veränderliche A.1) und setze $y(x) = x \cdot z(x)$.

A.5 Typ $y' = \frac{Ax+By+C}{Dx+Ey+F}$

Vgl. Übung vom 27.10.2003

Geg.:

Differentialgleichung

$$y' = \frac{Ax + By + C}{Dx + Ey + F}$$

Lösungsansatz:

Variablen x und y verschieben, so dass C und F verschwinden.

1. $$s := x + a, \qquad t := y + b \qquad \text{für geeignete } a, b \in \mathbb{R}$$
   $$\begin{aligned} \text{Rechte Seite} &= \frac{A(s-a) + B(t-b) + c}{D(s-a) + E(t-b) + F} \\ &= \frac{As + Bt}{Ds + Et} \end{aligned}$$
   falls a, b das lineare Gleichungssystem
   $$\begin{pmatrix} A & B \\ D & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ F \end{pmatrix}$$
   löst.

2. $$t' = \frac{As + Bt}{Ds + Et} = \frac{A + B\frac{t}{s}}{D + E\frac{t}{s}}$$

3. Ähnlichkeitsdifferentialgleichung (A.4) :
   $u(s) := \frac{t(s)}{s}$
   $$\Rightarrow \qquad u' = \frac{\frac{A+Bu}{D+Eu} - u}{s}$$

4. Differentialgleichung mit getrennten Veränderlichen (A.1)

5. Rücksubstituieren

Für $C = F = 0$ nur 2. - 5.

A.6 Bernoulli-Differentialgleichung

Vgl. Übung 2, HA 3

Geg.:

$$y' + g(x)\, y + h(x)\, y^k = 0, \qquad k \neq 1$$

Hinweis:

Setze $u(x) = (y(x))^{1-k}$.

A.7 Riccati-Differentialgleichung

Vgl. Übung 2, HA 3

Geg.:

$$y' + g(x)\,y + h(x)\,y^2 = k(x), \qquad g, h, k \in C(I), \quad I \subset \mathbb{R}$$

Hinweis:

Sei ϕ eine spezielle Lösung der Riccati-Differentialgleichung, dann erhält man alle übrigen Lösungen der Riccati-Differentialgleichung in der Form

$$y(x) = \phi(x) + \frac{1}{z(x)}$$

wobei $z(x)$ eine beliebige Lösung der Differentialgleichung

$$z' = [g(x) + 2\phi(x)\,h(x)]\,z + h(x)$$

ist.

A.8 Ergänzung zum linearen DGL-System $x' = Ax$

Vgl. Übung 5, SA 1

Problem:

Angenommen es existiert *keine* Basis aus Eigenvektoren - was ist dann zu tun?

Def.:

Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A, so heißt $v \in \mathbb{C}^n$ ein *Hauptvektor der Stufe* k zu λ, falls gilt:

$$(A - \lambda E)^k v = 0 \qquad \text{und} \qquad (A - \lambda E)^{k-1} v \neq 0.$$

Die Eigenvektoren von A sind somit gerade die Hauptvektoren der 1. Stufe.

Ansatz:

Es gilt: Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ besitzt eine Basis aus Hauptvektoren. Die Berechnung eines Hauptvektors k-ter Stufe erfolgt sinnvollerweise nicht durch das Lösen des homogenen Gleichungssystems $(A - \lambda E)^k v = 0$ sondern durch iteratives Lösen des inhomogenen Systems $(A - \lambda E)v = w$, wobei w ein Hauptvektor der Stufe $k-1$ ist. Man erhält wie folgt ein *Fundamentalsystem* für $x' = Ax$:

1. Bestimme eine Basis aus Hauptvektoren.

2. Für jeden Hauptvektor v der Stufe k zum Eigenwert λ setze

$$x(t) := e^{\lambda t}\left(v + t(A-\lambda E)v + \ldots + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda E)^{k-1}v\right).$$

Die n Funktionen, die man damit erhält, bilden dann ein Fundamentalsystem.

Anmerkung

Die lineare Abbildung A hat bezüglich der Hauptvektorbasis Jordannormalform:
Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von A und $k_1, \ldots k_r$ die Stufen der Eigenwerte.
$(v_{\lambda_1,1}, \ldots, v_{\lambda_1,k_1}), \ldots, (v_{\lambda_r,1}, \ldots, v_{\lambda_r,k_r})$ seien die zugehörigen Hauptvektoren, wobei $v_{i,j}$ Stufe j hat.

Dann ist $A = \Gamma \cdot M \cdot \Gamma^{-1}$, wobei M Jordannormalform von A ist, mit

$$\Gamma = (v_{\lambda_1,1}|\ldots|v_{\lambda_1,k_1}|\ldots\ldots|v_{\lambda_r,1}|\ldots|v_{\lambda_r,k_r})$$

Also hat M die Jordanblöcke $J_1, \ldots, J_r$ wobei $J_i \quad (k_i \times k_i)$-Jordanblock (Vgl. VIII.23.2) ist zum Eigenwert λ_i.

A.9 Ergänzung zur inhomogenen linearen DGL n-ter Ordnung

Vgl. Übung 5, HA 4

Vor.:

Gegeben sei eine Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten der Form:

$$a_n y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \ldots + a_0 y(x) = e^{\alpha x} \cdot \sum_{j=0}^{m} \left[b_j \cos(\beta x) + c_j \sin(\beta x)\right] x^j,$$

wobei $a_j, b_j, c_j, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $n, m \in \mathbb{N}_0$. Sei außerdem $p(\lambda)$ das zu der Differentialgleichung gehörige charakteristische Polynom, d.h. $p(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot \lambda^j$.

Problem:

Wie findet man eine partikuläre Lösung, ohne das zugehörige DGL-System erster Ordnung untersuchen zu müssen?

Ansatz:

Wir definieren $\gamma \in \mathbb{C}$ durch $\gamma := \alpha + i\beta$ und bezeichnen mit k die Vielfachheit von γ als Nullstelle von $p(\lambda)$ (dabei setzen wir $k = 0$, falls γ keine Nullstelle von $p(\lambda)$ ist).

Der Ansatz

$$y(x) = e^{\alpha x} x^k \sum_{j=0}^{m} \left[d_j \cos(\beta x) + e_j \sin(\beta x)\right] x^j$$

führt durch Koeffizientenvergleich *immer* zu eine partikulären Lösung der Differentialgleichung.

Anmerkung:

Zur Bestimmung der Lösungsgesamtheit vergleiche: VIII.15 Lösungsraum linearer, inhomogener Differentialgleichungen.

A.10 Das Inverse einer 2×2-Matrix

$$\begin{aligned} A &:= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \text{ invertierbar} \\ A^{-1} &= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Anhang B

Integration von Funktionen mehrerer Veränderlichen

B.1 $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und gleichmäßige Stetigkeit

Vgl. Übung 7, SA 2

Vor.:

$f \in C_c(\mathbb{R}^n)$

Beh.:

Dann ist f *gleichmäßig* stetig.

B.2 Charakterisierung: f von unten/ von oben halbstetig

Vgl. Übung 8, SA 1, SA2

Vor.:

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Beh.:

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (a) f ist von unten halbstetig.
   (b) $f^{-1}\left((b, +\infty)\right)$ ist offen für alle $b \in \mathbb{R}$.
   (c) $f^{-1}\left((-\infty, b]\right)$ ist abgeschlossen für alle $b \in \mathbb{R}$.
2. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (a) f ist von oben halbstetig.

   (b) $f^{-1}((-\infty, b))$ ist offen für alle $b \in \mathbb{R}$.
   (c) $f^{-1}([b, +\infty))$ ist abgeschlossen für alle $b \in \mathbb{R}$.

3. Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (a) f ist stetig.
   (b) f ist von oben und von unten halbstetig.

B.3 Volumen der n-dimensionalen Kugel

Vgl. Übung 9, SA 2

$$\begin{aligned} K_n(r) &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq r\} \\ \mathrm{Vol}_n\left(K_n(r)\right) &= \begin{cases} \frac{\pi^k}{k!} r^n, & \text{falls } n = 2k \\ \frac{2^{k+1}\pi^k}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2k+1)} r^n, & \text{falls } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

B.4 Masse, Schwerpunkt

Vgl. Übung 10, SA

Auf einer (beschränkten) Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ sei eine Massendichte $\rho : K \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann ist die *Masse* M des beschriebenen Objektes

$$M = \int_K \rho(x) dx.$$

Der *Schwerpunkt* $\bar{x}$ hat dann die Koordinaten

$$\bar{x}_i = \frac{1}{M} \int_K x_i \rho(x) dx, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

B.5 Simplex

Vgl. Übung 10, SA 1

Simplex: $S(a_0, \ldots, a_n) = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i a_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}$ (a_i Vektor)

$$\mathrm{Vol}_n(S(a_0, \ldots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_0)|$$

B.6 Transformationsregel (Lebesgue-Integral)

Vgl. Übung 10, SA 4 Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ integrierbar und seien $A \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Dann ist auch die Funktion $x \mapsto f(Ax + b)$ integrierbar und es gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) \, |\det A| \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$$

B.7 Riemann-integrierbar

Vgl. Übung 11, SA 3

1. Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt:

$$\begin{aligned}&f \text{ Riemann-integrierbar}\\ &\Longleftrightarrow\\ &f \text{ Lebesgue-integrierbar und } \{x \in [a,b] \mid f \text{ unstetig in } x\} \text{ Nullmenge}\end{aligned}$$

2. Falls $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und
   f Riemann-integrierbar auf allen kompakten Teilmengen $I' \subset I$:

$$\begin{aligned}&|f| \text{ uneigentlich Riemann-integrierbar}\\ &\Longleftrightarrow\\ &f \text{ Lebesgue-integrierbar}\end{aligned}$$

Bemerkung:

1. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar $\not\Rightarrow$ f Riemann-integrierbar!
2. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar $\not\Rightarrow$ f Lebesgue-integrierbar!

B.8 3-dimensionale Polarkoordinaten

Vgl. Übung 12, Frontalübung

Parametrisierung der 3-dimensionalen Einheitskugel:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$\text{mit} \quad 0 \le r \le 1, \quad 0 \le \theta \le \pi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

B.8.1 Beispiel: Einheitskugel

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \Psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Dann ist $|\det(D\Psi(r,\theta,\varphi))| = r^2 \sin(\theta)$ und somit

$$\begin{aligned}\int_{\overline{B(0,1)}} 1dy &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin(\theta)\, d\varphi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 dr \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

Index